

Solutionnaire du chapitre 7

1. Pour avoir de l'interférence destructive, le déphasage doit être égal à un nombre impair de π .

$$\Delta\phi = (2m+1)\pi$$

On doit donc trouver la différence de phase entre les ondes.

$\Delta\phi_T$ est

$$\Delta\phi_T = -\frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi$$

On doit donc trouver les distances des sources. Les distances sont (en posant que l'onde 2 est celle qui arrive du haut-parleur B)

$$r_1 = \sqrt{(1m)^2 + (2,4m)^2}$$

$$r_2 = 2,4m$$

La différence de marche est donc

$$\begin{aligned}\Delta r &= 2,4m - \sqrt{(1m)^2 + (2,4m)^2} \\ &= -0,2m\end{aligned}$$

$\Delta\phi_T$ est donc

$$\begin{aligned}\Delta\phi_T &= -\frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi \\ &= -\frac{-0,2m}{\lambda} \cdot 2\pi \\ &= \frac{0,2m}{\lambda} \cdot 2\pi\end{aligned}$$

Comme il n'y a pas de déphasage entre les sources ni de réflexion, ce déphasage est le déphasage total

$$\Delta\phi = \frac{0,2m}{\lambda} \cdot 2\pi$$

La condition d'interférence destructive devient donc

$$\Delta\phi = (2m+1)\pi$$

$$\frac{0,2m}{\lambda} \cdot 2\pi = (2m+1)\pi$$

En isolant λ , on arrive a

$$\frac{0,2m}{\lambda} \cdot 2 = (2m+1)$$

$$\lambda = \frac{0,4m}{2m+1}$$

Pour avoir la fréquence minimale, il faut la longueur d'onde maximale. Il faut avoir le plus petit diviseur positif, qu'on obtient avec $m = 0$. On a donc

$$\lambda_{\max} = \frac{0,4m}{2 \cdot 0 + 1} = 0,4m$$

La fréquence minimale est donc

$$f_{\min} = \frac{v}{\lambda_{\max}}$$

$$= \frac{340 \frac{m}{s}}{0,4m}$$

$$= 850Hz$$

- 2.** Pour avoir de l'interférence constructive, le déphasage doit être égal à un nombre pair de π .

$$\Delta\phi = 2m\pi$$

On doit donc trouver la différence de phase entre les ondes.

$\Delta\phi_T$ est

$$\Delta\phi_r = -\frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi$$

On doit donc trouver les distances des sources. Les distances sont (en posant que l'onde 1 est celle qui se réfléchit sur le mur)

$$r_1 = 2\sqrt{(3m)^2 + d^2}$$

$$r_2 = 6m$$

La différence de marche est donc

$$\Delta r = 6m - 2\sqrt{(3m)^2 + d^2}$$

Il nous faut aussi la longueur d'onde du signal. Cette longueur d'onde est

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

$$= \frac{343 \frac{m}{s}}{490 Hz}$$

$$= 0,7m$$

$\Delta\phi_T$ est donc

$$\Delta\phi_T = -\frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi$$

$$= -\frac{6m - 2\sqrt{(3m)^2 + d^2}}{0,7m} \cdot 2\pi$$

$$= \frac{2\sqrt{(3m)^2 + d^2} - 6m}{0,7m} \cdot 2\pi$$

Le son réfléchi sur un mur étant inversé, $\Delta\phi_R$ est

$$\Delta\phi_R = \phi_{2R} - \phi_{1R}$$

$$= 0 - \pi$$

$$= -\pi$$

Comme il n'y a pas de déphasage entre les sources, le déphasage total est

$$\Delta\phi = \frac{2\sqrt{(3m)^2 + d^2} - 6m}{0,7m} \cdot 2\pi - \pi$$

La condition d'interférence constructive devient donc

$$\Delta\phi = 2m\pi$$

$$\frac{2\sqrt{(3m)^2 + d^2} - 6m}{0,7m} \cdot 2\pi - \pi = 2m\pi$$

Remarquons ici que puisque les deux termes de gauche sont positifs, le terme de droite doit aussi être positif, ce qui élimine toutes les valeurs de m négatives.

En isolant d , on arrive à

$$\frac{2\sqrt{(3m)^2 + d^2} - 6m}{0,7m} \cdot 2 - 1 = 2m$$

$$\frac{2\sqrt{(3m)^2 + d^2} - 6m}{0,7m} \cdot 2 = 2m + 1$$

$$2 \cdot \sqrt{(3m)^2 + d^2} - 6m = \frac{2m+1}{2} \cdot 0,7m$$

$$2 \cdot \sqrt{(3m)^2 + d^2} = \frac{2m+1}{2} \cdot 0,7m + 6m$$

$$\sqrt{(3m)^2 + d^2} = \frac{2m+1}{4} \cdot 0,7m + 3m$$

$$(3m)^2 + d^2 = \left(\frac{2m+1}{4} \cdot 0,7m + 3m \right)^2$$

$$d^2 = \left(\frac{2m+1}{4} \cdot 0,7m + 3m \right)^2 - (3m)^2$$

Voici ce qu'on obtient selon la valeur de m .

$$m = 0 \quad d^2 = 1,080625 \text{ m}^2$$

$$m = 1 \text{ et plus} \quad d^2 \text{ est plus grand que } 1,080625 \text{ m}^2$$

La valeur minimale se trouve donc avec $m = 0$. La distance est alors

$$d = \sqrt{1,080625 \text{ m}^2}$$

$$= 1,0395 \text{ m}$$

3. On va trouver l'intensité à partir de l'amplitude résultante. Cette amplitude est

$$A = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2 \cos(\Delta\phi) + A_2^2}$$

Mais avec la lumière, l'amplitude est notée E_0 plutôt que A . L'amplitude résultante est donc

$$E_{0tot} = \sqrt{E_{01}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(\Delta\phi) + E_{02}^2}$$

On doit donc trouver la différence de phase entre les ondes.

$\Delta\phi_T$ est

$$\Delta\phi_T = -\frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi$$

On doit donc trouver les distances des sources. Les distances sont (en posant que l'onde 2 est celle qui se réfléchit sur le mur)

$$r_1 = 6m$$

$$r_2 = 2\sqrt{(3m)^2 + (2m)^2}$$

La différence de marche est donc

$$\Delta r = 2 \cdot \sqrt{(3m)^2 + (2m)^2} - 6m$$

$$= 1,211m$$

et $\Delta\phi_T$ est

$$\Delta\phi_T = -\frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi$$

$$= -\frac{1,211m}{1,4m} \cdot 2\pi$$

$$= -5,435rad$$

L'onde réfléchie sur un mur étant inversée, $\Delta\phi_R$ est

$$\Delta\phi_R = \pi$$

Comme il n'y a pas de déphasage entre les sources, le déphasage total est

$$\Delta\phi = -5,435 + \pi = -2,294rad$$

Puisque $E_{02} = 0,7E_{01}$, l'amplitude est

$$\begin{aligned}
 E_{0tot} &= \sqrt{E_{01}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(\Delta\phi) + E_{02}^2} \\
 &= \sqrt{E_{01}^2 + 2 \cdot E_{01} \cdot 0,7E_{01} \cdot \cos(-2,294) + (0,7 \cdot E_{01})^2} \\
 &= \sqrt{E_{01}^2 \cdot (1 + 2 \cdot 0,7 \cdot \cos(-2,294) + (0,7)^2)} \\
 &= \sqrt{E_{01}^2 \cdot 0,5637} \\
 &= E_{01} \cdot 0,7508
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'intensité est de

$$\begin{aligned}
 I_{tot} &= \frac{1}{2} cn\epsilon_0 E_{0tot}^2 \\
 &= \frac{1}{2} cn\epsilon_0 (0,7508 \cdot E_{01})^2
 \end{aligned}$$

Sans réflexion, l'amplitude de l'onde aurait été simplement E_{01} et l'intensité aurait été de

$$I_1 = \frac{1}{2} cn\epsilon_0 E_{01}^2$$

En divisant une intensité par l'autre, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{I_{tot}}{I_1} &= \frac{\frac{1}{2} cn\epsilon_0 (0,7508 \cdot E_{01})^2}{\frac{1}{2} cn\epsilon_0 E_{01}^2} \\
 &= (0,7508)^2 \\
 &= 0,5637
 \end{aligned}$$

L'intensité est donc 56,37% de l'intensité qu'il y aurait s'il y avait seulement l'onde qui arrive directement de la source.

4. On sait que l'amplitude résultante est donnée par

$$E_{0tot} = \sqrt{E_{01}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(\Delta\phi) + E_{02}^2}$$

Pour connaître l'amplitude totale, on doit donc connaître les amplitudes et le déphasage.

On peut facilement trouver l'amplitude de l'onde venant de la source A. Cette amplitude est

$$I_1 = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_{01}^2$$

$$0,001 \frac{W}{m^2} = \frac{1}{2} \cdot 3 \times 10^8 \frac{m}{s} \cdot 8,854 \times 10^{-12} \frac{m^2}{NC^2} \cdot E_{0A}^2$$

$$E_{0A} = 0,8677 \frac{N}{C}$$

Pour trouver l'amplitude de l'onde 2, on utilise le fait que l'intensité diminue avec le carré de la distance. Avec le rapport des intensités, on obtient

$$\frac{I_B}{I_A} = \frac{\frac{1}{2} c n \epsilon_0 E_{0B}^2}{\frac{1}{2} c n \epsilon_0 E_{0A}^2}$$

$$\frac{I_B}{I_A} = \frac{E_{0B}^2}{E_{0A}^2}$$

$$\frac{\frac{P}{4\pi r_B^2}}{\frac{P}{4\pi r_A^2}} = \frac{E_{0B}^2}{E_{0A}^2}$$

$$\frac{r_A^2}{r_B^2} = \frac{E_{0B}^2}{E_{0A}^2}$$

$$\frac{r_A}{r_B} = \frac{E_{0B}}{E_{0A}}$$

On a donc

$$\frac{E_{0B}}{E_{0A}} = \frac{r_A}{r_B}$$

$$= \frac{300m}{\sqrt{(300m)^2 + (200m)^2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{13}}$$

L'amplitude de l'onde 2 est donc

$$\begin{aligned}
 E_{0B} &= \frac{3}{\sqrt{13}} E_{0A} \\
 &= \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot 0,8677 \frac{N}{C} \\
 &= 0,7220 \frac{N}{C}
 \end{aligned}$$

Reste à trouver le déphasage. Comme il n'y a que le déphasage dû à la différence de distance, le déphasage est

$$\begin{aligned}
 \Delta\phi &= -\frac{r_B - r_A}{\lambda} 2\pi \\
 &= \frac{\sqrt{(300m)^2 + (200m)^2} - 300m}{3 \times 10^8 \frac{m}{s} / 100 \text{ MHz}} \cdot 2\pi \\
 &= \frac{60,555m}{3m} \cdot 2\pi \\
 &= 126,826 \text{ rad}
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'amplitude est

$$\begin{aligned}
 E_{0tot} &= \sqrt{E_{01}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(\Delta\phi) + E_{02}^2} \\
 &= \sqrt{(0,8677 \frac{N}{C})^2 + 2 \cdot 0,8677 \frac{N}{C} \cdot 0,7220 \frac{N}{C} \cdot \cos(126,826) + (0,7220 \frac{N}{C})^2} \\
 &= 1,3311 \frac{N}{C}
 \end{aligned}$$

L'intensité est donc

$$\begin{aligned}
 I_{tot} &= \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_{01}^2 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 3 \times 10^8 \frac{m}{s} \cdot 8,854 \times 10^{-12} \frac{m^2}{NC^2} \cdot (1,3311 \frac{N}{C})^2 \\
 &= 2,353 \times 10^{-3} \frac{W}{m^2}
 \end{aligned}$$

5. Le déphasage est

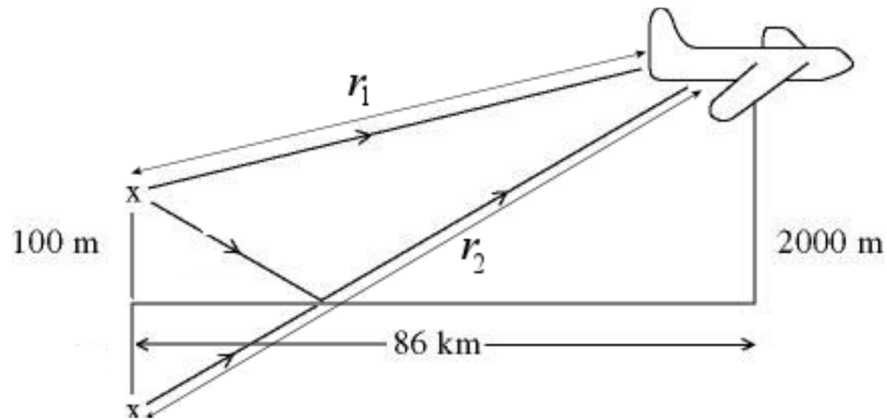
$$\Delta\phi = \Delta\phi_T + \Delta\phi_S + \Delta\phi_R$$

$\Delta\phi_T$ est

$$\Delta\phi_r = -\frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi$$

On doit trouver la différence de marche et la longueur d'onde.

Les distances sont (en posant que l'onde 2 est celle qui se réfléchit)



$$r_1 = \sqrt{(86000m)^2 + (1900m)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(86000m)^2 + (2100m)^2}$$

La différence de marche est donc

$$\begin{aligned} \Delta r &= \sqrt{(86000m)^2 + (2100m)^2} - \sqrt{(86000m)^2 + (1900m)^2} \\ &= 4,6499m \end{aligned}$$

La longueur d'onde est

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{c}{f} \\ &= \frac{3 \times 10^8 \frac{m}{s}}{120 \times 10^6 \text{ Hz}} \\ &= 2,5m \end{aligned}$$

$\Delta\phi_r$ est donc

$$\begin{aligned}\Delta\phi_T &= -\frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi \\ &= -\frac{-4,6499m}{2,5m} \cdot 2\pi \\ &= -11,686rad\end{aligned}$$

$\Delta\phi_S$ est nulle puisque les deux ondes proviennent de la même source.

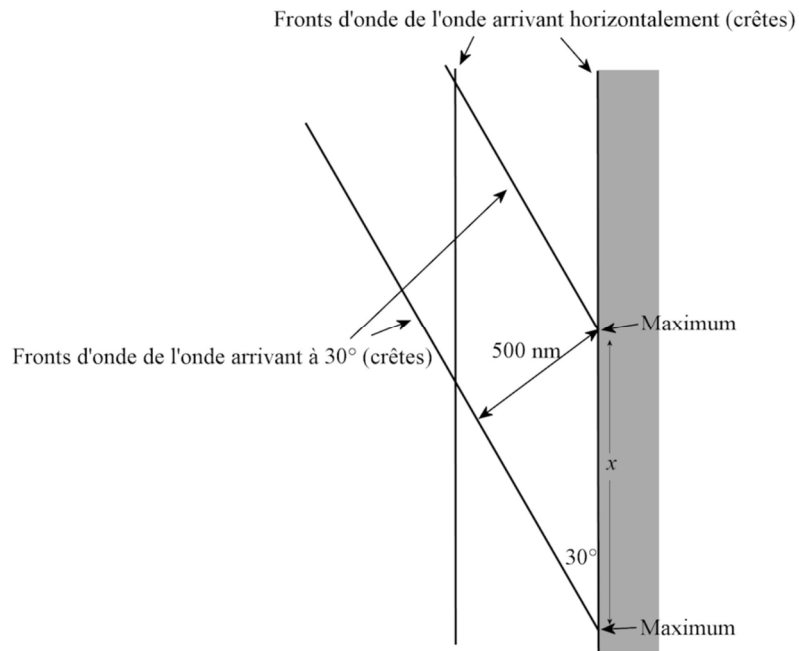
Puisque l'onde réfléchie est inversée, $\Delta\phi_R$ est

$$\Delta\phi_R = \pi$$

Le déphasage total est donc

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= -11,686rad + \pi \\ &= -8,545rad\end{aligned}$$

- 6.** Il y a de l'interférence constructive quand les crêtes se croisent. Si on considère que les fronts d'onde sont les crêtes, la distance entre les maximums sur l'écran est donc égale à la distance entre deux endroits où les fronts d'ondes se croisent.



On forme alors un triangle rectangle (en bas à droite). On a alors

$$\sin 30^\circ = \frac{500nm}{x}$$

$$x = 1000nm$$

7. La distance entre les fentes se trouve avec

$$d \sin \theta = m\lambda$$

Pour la trouver, il nous fait l'angle du 4^e maximum.

L'angle est

$$\tan \theta = \frac{y}{L}$$

$$\tan \theta = \frac{1cm}{200cm}$$

$$\theta = 0,2865^\circ$$

On trouve ensuite la distance avec

$$d \sin \theta = m\lambda$$

$$d \cdot \sin(0,2865^\circ) = 4 \cdot 600nm$$

$$d = 4,8 \times 10^{-4} m = 0,48mm$$

8. On va trouver la position à partir de l'angle. L'angle est donné par

$$d \sin \theta = m\lambda$$

$$0,1 \times 10^{-3} m \cdot \sin \theta = 5 \cdot 500nm$$

$$\theta = 1,4325^\circ$$

La position du maximum est donc

$$\tan \theta = \frac{y}{L}$$

$$\tan(1,4325^\circ) = \frac{y}{160cm}$$

$$y = 4,001cm$$

9. On va trouver la longueur d'onde avec

$$d \sin \theta = m\lambda$$

On ne connaît pas d et l'angle, mais on peut trouver ce que vaut $d \sin \theta$ avec ce qu'on sait concernant la lumière qui a une longueur d'onde de 550 nm puisque les maximums sont à la même position.

Avec la longueur d'onde de 550 nm, on a

$$d \sin \theta = m\lambda$$

$$d \sin \theta = 5 \cdot 550 \text{ nm}$$

$$d \sin \theta = 2750 \text{ nm}$$

Pour la lumière ayant une longueur d'onde inconnue, on a donc

$$d \sin \theta = m\lambda$$

$$2750 \text{ nm} = 4\lambda$$

$$\lambda = 687,5 \text{ nm}$$

10. On va trouver la distance de l'écran avec

$$\tan \theta = \frac{y}{L}$$

La figure nous montre que $y = 11,5$ mm pour le troisième minimum ($m = 2$). Il nous manque l'angle.

L'angle est du 3^e minimum est

$$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda$$

$$0,2 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \sin \theta = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot 632 \times 10^{-9} \text{ m}$$

$$\theta = 0,4526^\circ$$

On a donc

$$\tan \theta = \frac{y}{L}$$

$$\tan(0,4526^\circ) = \frac{1,15 \text{ cm}}{L}$$

$$L = 145,6 \text{ cm}$$

- 11.** Dans l'expérience de Young, on peut trouver la différence de marche avec le déphasage avec

$$\Delta\phi = -\frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi$$

$$2 = \left| -\frac{\Delta r}{450 \times 10^{-9} m} \cdot 2\pi \right|$$

$$\Delta r = 143,24 nm$$

Comme la différence de marche est

$$\Delta r = d \sin \theta$$

on a

$$143,24 \times 10^{-9} m = 0,2 \times 10^{-3} m \cdot \sin \theta$$

$$\theta = 0,041^\circ$$

La position se trouve alors avec

$$\tan \theta = \frac{y}{L}$$

$$\tan(0,041^\circ) = \frac{y}{240 cm}$$

$$y = 0,1719 cm$$

12. a)

Il y a 9 fentes puisqu'il y a 7 petits maximums. (Le nombre de fentes est toujours égal au nombre de petits maximums + 2.)

- b) On va trouver la distance entre les fentes à partir de la position d'un grand maximum sur l'écran qui est donnée par

$$d \sin \theta = m\lambda$$

Il nous faut l'angle.

On peut prendre n'importe quel maximum. Ici on va prendre le maximum d'ordre 2 qui est à $y = 5$ cm. À cette position, l'angle est

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{y}{L} \\ \tan \theta &= \frac{5\text{cm}}{30\text{cm}} \\ \theta &= 9,46^\circ\end{aligned}$$

De là, on trouve la distance avec

$$\begin{aligned}d \sin \theta &= m\lambda \\ d \cdot \sin(9,46^\circ) &= 2 \cdot 500 \times 10^{-9} \text{ m} \\ d &= 6,083 \times 10^{-6} \text{ m} = 6,083 \mu\text{m}\end{aligned}$$

c) L'intensité étant $N^2 I_1$ avec N fentes, l'intensité est $81 I_1$ avec 9 fentes.

13. a) La valeur maximale de m est

$$m < \frac{d}{\lambda} = \frac{\frac{1}{300} \times 10^{-3} \text{ m}}{650 \times 10^{-9} \text{ m}} = 5,13$$

La valeur maximale de m est donc de 5. Il y a donc 11 maximums au total (les maximums $m = 1$ à $m = 5$ à droite, les maximums $m = 1$ à $m = 5$ à gauche et le maximum central).

b) On trouve la distance avec

$$\tan \theta = \frac{y}{L}$$

On a déjà L , on doit trouver l'angle.

L'angle du premier maximum est

$$\begin{aligned}d \sin \theta &= m\lambda \\ \frac{1}{300} \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \sin \theta &= 1 \cdot 650 \times 10^{-9} \text{ m} \\ \theta &= 11,24^\circ\end{aligned}$$

La position est alors

$$\tan \theta = \frac{y}{L}$$

$$\tan(11,24^\circ) = \frac{y}{240\text{cm}}$$

$$y = 47,7\text{cm}$$

14. a) On va trouver la longueur d'onde avec

$$d \sin \theta = m\lambda$$

On a déjà d , on doit trouver l'angle.

L'angle du premier maximum est

$$\tan \theta = \frac{y}{L}$$

$$\tan \theta = \frac{43,6\text{cm}}{100\text{cm}}$$

$$\theta = 23,56^\circ$$

On a donc

$$d \sin \theta = m\lambda$$

$$\frac{1}{800} \times 10^{-3} \text{m} \cdot \sin(23,56^\circ) = 1 \cdot \lambda$$

$$\lambda = 499,6\text{nm}$$

b) On va trouver la position de 2^e maximum avec

$$\tan \theta = \frac{y}{L}$$

On a déjà L , on doit trouver l'angle.

L'angle du deuxième maximum est

$$d \sin \theta = m\lambda$$

$$\frac{1}{800} \times 10^{-3} \text{m} \cdot \sin \theta = 2 \cdot 499,6\text{nm}$$

$$\theta = 53,07^\circ$$

La position est donc

$$\tan \theta = \frac{y}{L}$$

$$\tan(53,07^\circ) = \frac{y}{100\text{cm}}$$

$$y = 133,02\text{cm}$$

La distance entre le maximum d'ordre 2 et le maximum d'ordre 1 est donc

$$x = 133,02\text{cm} - 43,6\text{cm} = 89,42\text{cm}$$

c) La valeur maximale de m est

$$m < \frac{d}{\lambda} = \frac{\frac{1}{800} \times 10^{-3} \text{m}}{499,6 \times 10^{-9} \text{m}} = 2,50$$

La valeur maximale de m est donc de 2. Il y a donc 5 maximums au total (les maximums $m = 1$ et $m = 2$ à droite, les maximums $m = 1$ et $m = 2$ à gauche et le maximum central).

15. On va trouver la position des maximums avec

$$\tan \theta = \frac{y}{L}$$

On a déjà L , on doit trouver l'angle.

Pour la première longueur d'onde, l'angle de premier maximum est

$$d \sin \theta = m\lambda$$

$$\frac{1}{300} \times 10^{-3} \text{m} \cdot \sin \theta = 1 \cdot 589,0 \text{nm}$$

$$\theta = 10,1776^\circ$$

La position est donc

$$\tan \theta = \frac{y}{L}$$

$$\tan(10,1776^\circ) = \frac{y}{200\text{cm}}$$

$$y = 35,9050\text{cm}$$

Pour la deuxième longueur d'onde, l'angle de premier maximum est

$$d \sin \theta = m\lambda$$

$$\frac{1}{300} \times 10^{-3} m \cdot \sin \theta = 1.589,6 nm$$

$$\theta = 10,1881^\circ$$

La position est donc

$$\tan \theta = \frac{y}{L}$$

$$\tan(10,1881^\circ) = \frac{y}{200 cm}$$

$$y = 35,9427 cm$$

La distance entre ces maximums est donc

$$x = 35,9427 cm - 35,9050 cm = 0,0377 cm$$

16. On va trouver la position du maximum d'ordre 2 avec

$$\tan \theta_2 = \frac{y}{L}$$

On a déjà L , mais on doit trouver l'angle (qu'on appelle ici θ_2)

L'angle du 2^e maximum se trouve avec

$$d \sin \theta = m\lambda$$

$$d \sin \theta_2 = 2\lambda$$

Toutefois, on ne connaît pas d et λ .

On peut trouver l'angle avec ce qu'on sait du premier maximum. Pour le premier maximum, on a

$$d \sin \theta = m\lambda$$

$$d \sin \theta_1 = \lambda$$

On a donc les 2 équations suivantes.

$$d \sin \theta_2 = 2\lambda$$

$$d \sin \theta_1 = \lambda$$

En divisant les équations, on a

$$\frac{d \sin \theta_2}{d \sin \theta_1} = \frac{2\lambda}{\lambda}$$

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = 2$$

Pour trouver l'angle, on a donc besoin de l'angle de premier maximum. Cet angle est

$$\tan \theta_1 = \frac{y}{L}$$

$$\tan \theta_1 = \frac{35\text{cm}}{100\text{cm}}$$

$$\theta_1 = 19,29^\circ$$

On a donc

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = 2$$

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin(19,29^\circ)} = 2$$

$$\theta_2 = 41,35^\circ$$

La position est donc

$$\tan \theta_2 = \frac{y}{L}$$

$$\tan(41,35^\circ) = \frac{y}{100\text{cm}}$$

$$y = 88,02\text{cm}$$

17. a) L'intensité de la lumière avec N fentes est

$$I_N = I_1 \frac{\sin^2\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$$

Le maximum commence et se termine quand l'intensité est nulle. On a une intensité nulle quand le sinus au numérateur est nul (mais sans que le dénominateur soit nul, car alors on a 0/0 qui ne fait pas 0). On a donc

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right) &= 0 \\ \frac{N\Delta\phi}{2} &= M\pi \\ \frac{\Delta\phi}{2} &= \frac{M}{N}\pi\end{aligned}$$

où M est un entier (mais qui ne peut pas être un nombre entier de N , car le dénominateur est alors nul et cela correspond au déphasage des grands maximums).

Le grand maximum d'ordre 1 est à

$$\frac{\Delta\phi}{2} = \pi$$

Cela signifie que le maximum au premier ordre se produit quand $M = N$. Le minimum qui précède est donc à $M = N - 1$ et celui qui suit est donc à $M = N + 1$. L'écart de différence de phase entre les deux minimums (qui est la largeur du maximum central) est donc

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\phi_{\min \text{ après}}}{2} - \frac{\Delta\phi_{\min \text{ avant}}}{2} &= \frac{N+1}{N}\pi - \frac{N-1}{N}\pi \\ \frac{\Delta\phi_{\min \text{ après}}}{2} - \frac{\Delta\phi_{\min \text{ avant}}}{2} &= \frac{2\pi}{N} \\ \Delta\phi_{\min \text{ après}} - \Delta\phi_{\min \text{ avant}} &= \frac{4\pi}{N}\end{aligned}$$

Avec des fentes, le déphasage est

$$\Delta\phi = \frac{d \sin \theta}{\lambda} 2\pi$$

On a donc

$$\frac{d \sin \theta_{\min \text{ après}}}{\lambda} 2\pi - \frac{d \sin \theta_{\min \text{ avant}}}{\lambda} 2\pi = \frac{4\pi}{N}$$

$$\sin \theta_{\min \text{ après}} - \sin \theta_{\min \text{ avant}} = \frac{2\lambda}{Nd}$$

$$\Delta(\sin \theta) = \frac{2\lambda}{Nd}$$

Puisque l'écart entre les angles est petit, on peut écrire

$$\Delta(\sin \theta) = \frac{d \sin \theta}{d\theta} \Delta\theta$$

$$= \cos \theta \Delta\theta$$

L'angle est donc

$$\cos \theta \Delta\theta = \frac{2\lambda}{Nd}$$

$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{Nd \cos \theta}$$

On voit bien que la largeur des maximums diminue avec N .

Note: On pourrait simplifier davantage puisque

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{d}$$

Ainsi, on aurait pu écrire

$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{Nd \cos \theta}$$

$$= \frac{2 \sin \theta}{N \cos \theta}$$

$$= \frac{2 \tan \theta}{N}$$

- b) Trouvons de combien change l'angle du maximum d'ordre 1 quand on change un peu la longueur d'onde. On cherche donc $\Delta\theta$ quand $\Delta\lambda$ est petit. On le trouve avec

$$\Delta\theta = \frac{d\theta}{d\lambda} \Delta\lambda$$

Puisque l'angle d'un maximum au premier ordre est donné par

$$d \sin \theta = \lambda$$

on a

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\lambda}{d} \\ \frac{d \sin \theta}{d \theta} &= \frac{1}{d} \frac{d \lambda}{d \theta} \\ \cos \theta &= \frac{1}{d} \frac{d \lambda}{d \theta} \\ \frac{d \theta}{d \lambda} &= \frac{1}{d \cos \theta}\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\Delta \theta &= \frac{d \theta}{d \lambda} \Delta \lambda \\ \Delta \theta &= \frac{1}{d \cos \theta} \Delta \lambda\end{aligned}$$

Or, cet écart d'angle doit être (approximativement) supérieur ou égal à la moitié de la largeur du maximum central. On a donc

$$\frac{1}{d \cos \theta} \Delta \lambda \geq \frac{\lambda}{Nd \cos \theta}$$

En simplifiant, on arrive à

$$\Delta \lambda \geq \frac{\lambda}{N}$$

Le nombre de fentes est donc

$$\begin{aligned}0,59nm &\geq \frac{589,00nm}{N} \\ N &\geq 998,3 \text{ fentes}\end{aligned}$$

Approximativement, il faut 1000 fentes pour voir les maximums séparément.