Solutionnaire du chapitre 8

1. La position du maximum est donnée par

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$

Pour a et b, on a L, mais on doit trouver l'angle.

a) L'angle de premier minimum est

$$a\sin\theta = \lambda$$
$$0{,}01\times10^{-3}m\cdot\sin\theta = 500\times10^{-9}m$$
$$\theta = 2{,}866°$$

La position sur l'écran est donc

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan(2{,}866°) = \frac{y}{200cm}$$
$$y = 10{,}0cm$$

b) L'angle de deuxième minimum est

$$a\sin\theta = 2\lambda$$
$$0{,}01\times10^{-3}m\cdot\sin\theta = 2\cdot500\times10^{-9}m$$
$$\theta = 5{,}74°$$

La position sur l'écran est donc

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan(5{,}74°) = \frac{y}{200cm}$$
$$y = 20{,}1cm$$

2. On va trouver la largeur de la fente avec la position du premier minimum.

$$a \sin \theta = \lambda$$

Si le maximum central a une largeur de 4 cm, c'est que la distance entre le premier minimum et le centre du maximum central est de 2 cm. On a donc

$$\tan \theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan \theta = \frac{2cm}{500cm}$$
$$\theta = 0{,}2292°$$

On a donc

$$a \sin \theta = \lambda$$
$$a \cdot \sin\left(0{,}2292°\right) = 560 \times 10^{-9} m$$
$$a = 0{,}14mm$$

3. On va trouver la longueur d'onde avec la position du premier minimum.

$$a \sin \theta = \lambda$$

Si le maximum central a une largeur de 50 cm, c'est que la distance entre le premier minimum et le centre du maximum central est de 25 cm. On a donc

$$\tan \theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan \theta = \frac{25cm}{160cm}$$
$$\theta = 8{,}88°$$

On a donc

$$a \sin \theta = \lambda$$
$$0{,}01m \cdot \sin\left(8{,}88°\right) = \lambda$$
$$\lambda = 1{,}544mm$$

4. L'intensité de la lumière se calcule avec

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right)^2$$

Pour obtenir l'intensité, il nous fait α, qui est

$$\alpha = \frac{a \sin\theta}{\lambda} 2\pi$$

On a λ, mais on doit trouver l'angle.

À 0,5 cm du centre du maximum central, l'angle est

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan\theta = \frac{0,5cm}{200cm}$$
$$\theta = 0,1432°$$

La valeur de α est donc

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a \sin\theta}{\lambda} 2\pi \\ &= \frac{0,1\times 10^{-3} m \cdot \sin(0,1432°)}{600\times 10^{-9} m} \cdot 2\pi \\ &= 2,618 rad \end{aligned}$$

L'intensité est donc

$$\begin{aligned} I &= I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right)^2 \\ &= I_0 \left(\frac{\sin(1,309)}{(1,309)} \right)^2 \\ &= 0,5445 I_0 \end{aligned}$$

5. La demi-largeur du maximum centrale est

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{a}$$

Les deux longueurs d'onde nous donnent 2 équations.

À 450 nm, on a

$$\sin\theta_1 = \frac{450nm}{a}$$

À 650 nm, on a

$$\sin\theta_2 = \frac{650nm}{a}$$

En divisant les équations, on a

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{\frac{650nm}{a}}{\frac{450nm}{a}}$$
$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{13}{9}$$

On peut trouver l'angle 1 (quand la longueur d'onde de 450 nm).

Si le maximum central a une largeur de 4 cm, c'est que la distance entre le premier minimum et le centre du maximum central est de 2 cm. On a donc

$$\tan\theta_1 = \frac{y}{L}$$
$$\tan\theta_1 = \frac{2cm}{300cm}$$
$$\theta_1 = 0,382°$$

On a donc

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{13}{9}$$
$$\frac{\sin\theta_2}{\sin(0,382°)} = \frac{13}{9}$$
$$\theta_2 = 0,5517°$$

La position du premier minimum sur l'écran est alors

$$\tan\theta_2 = \frac{y}{L}$$
$$\tan(0,5517°) = \frac{y}{300cm}$$
$$y = 2,889cm$$

La largeur du maximum central est donc deux fois plus grande, donc 5,778 cm.

6. On doit trouver la position des deux minimums. Comme le maximum central a une largeur de 10 cm, on sait déjà que le premier minimum est à y = 5 cm.

Il reste à trouver la position du 2e minimum.

La position des minimums est donnée par

$$a\sin\theta = M\lambda$$

On a alors les 2 équations suivantes.

Premier minimum

$$a\sin\theta_1 = \lambda$$

Deuxième minimum

$$a\sin\theta_2 = 2\lambda$$

En divisant les équations, on a

$$\frac{a\sin\theta_2}{a\sin\theta_1} = \frac{2\lambda}{\lambda}$$
$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = 2$$

On a besoin de l'angle du premier minimum. Comme le premier minimum est à y = 5 cm, on a

$$\tan\theta_1 = \frac{y}{L}$$
$$\tan\theta_1 = \frac{5cm}{400cm}$$
$$\theta_1 = 0,716°$$

On a donc

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = 2$$
$$\frac{\sin\theta_2}{\sin(0,716°)} = 2$$
$$\theta_2 = 1,432°$$

La position du deuxième minimum sur l'écran est alors

$$\tan\theta_2 = \frac{y}{L}$$
$$\tan(1,432°) = \frac{y}{400cm}$$
$$y = 10,002cm$$

La distance entre le deuxième minimum et le premier minimum est donc

$$\Delta y = 10,002cm - 5cm = 5,002cm$$

7. Les angles des minimums se trouvent avec

$$a\sin\theta = M\lambda$$

Le premier minimum à 20° nous indique que

$$a\sin 20° = \lambda$$
$$\sin 20° = \frac{\lambda}{a}$$

L'angle du deuxième minimum est donc

$$a\sin\theta = 2\lambda$$
$$\sin\theta = 2\frac{\lambda}{a}$$
$$\sin\theta = 2\cdot\sin 20°$$
$$\sin\theta = 0,68404$$
$$\theta = 43,16°$$

Pour le troisième minimum, on a

$$a\sin\theta = 3\lambda$$
$$\sin\theta = 3\frac{\lambda}{a}$$
$$\sin\theta = 3\cdot\sin 20°$$
$$\sin\theta = 1,026$$

Comme il n'y a pas de solution, il n'y a pas de troisième minimum.

8. a) On a

$$\frac{d}{a} = \frac{0,2mm}{0,04mm} = 5$$

Ce qui signifie que $m_d = 4$. Le nombre de maximums est donc 2 · 4 + 1 = 9.

b) L'intensité est donnée par

$$I_{tot} = 4I_{10}\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2 \cos^2\frac{\Delta\phi}{2}$$

Pour la calculer, il nous faut $\Delta\phi$ et α.

$$\Delta\phi = \frac{d\sin\theta}{\lambda}2\pi \qquad \alpha = \frac{a\sin\theta}{\lambda}2\pi$$

Pour les calculer, il nous faut l'angle θ.

À 3 cm du centre du maximum central, l'angle est

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan\theta = \frac{3cm}{240cm}$$
$$\theta = 0,7162°$$

La valeur de $\Delta\phi$ est donc

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{d\sin\theta}{\lambda}2\pi \\ &= \frac{0,2\times 10^{-3}m\cdot\sin(0,7162°)}{600\times 10^{-9}m}\cdot 2\pi \\ &= 26,178rad\end{aligned}$$

La valeur de α est

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{a\sin\theta}{\lambda}2\pi \\ &= \frac{0,04\times 10^{-3}m\cdot\sin(0,7162°)}{600\times 10^{-9}m}\cdot 2\pi \\ &= 5,236rad\end{aligned}$$

L'intensité est donc

$$\begin{aligned}I_{tot} &= 4I_{10}\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2\cos^2\frac{\Delta\phi}{2} \\ &= 4I_{10}\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{5,236}{2}\right)}{\left(\frac{5,236}{2}\right)}\right)^2\cdot\cos^2\frac{26,178}{2} \\ &= 0,1097I_{10}\end{aligned}$$

c) L'intensité est donnée par

$$I_{tot} = 4I_{10}\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2\cos^2\frac{\Delta\phi}{2}$$

Pour la calculer, il nous faut $\Delta\phi$ et α.

$$\Delta\phi = \frac{d\sin\theta}{\lambda}2\pi \qquad\qquad \alpha = \frac{a\sin\theta}{\lambda}2\pi$$

Pour les calculer, il nous faut l'angle θ.

L'angle du premier maximum d'interférence est

$$\begin{aligned} d\sin\theta &= \lambda \\ \sin\theta &= \frac{\lambda}{d} \end{aligned}$$

La valeur de $\Delta\phi$ est donc

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{d\sin\theta}{\lambda}2\pi \\ &= \frac{d\,\frac{\lambda}{d}}{\lambda}2\pi \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

La valeur de α est

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a\sin\theta}{\lambda}2\pi \\ &= \frac{a\,\frac{\lambda}{d}}{\lambda}2\pi \\ &= \frac{a}{d}2\pi \\ &= \frac{0,04mm}{0,2mm}\cdot 2\pi \\ &= \frac{2\pi}{5} \end{aligned}$$

L'intensité est donc

$$\begin{aligned} I_{tot} &= 4I_{10}\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2 \cos^2\frac{\Delta\phi}{2} \\ &= 4I_{10}\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\left(\frac{\pi}{5}\right)}\right)^2\cdot\cos^2\frac{2\pi}{2} \\ &= 3,5I_{10} \end{aligned}$$

Comme le maximum central a une intensité de $4I_{10}$, le rapport des intensités est

$$rapport = \frac{3,5I_{10}}{4I_{10}} = 0,875$$

L'intensité est donc 87,5% de l'intensité du maximum central d'interférence.

9. a) On trouve la distance entre les fentes avec la position des maximums d'interférence.

$$d\sin\theta = m\lambda$$

On remarque que le maximum d'interférence d'ordre 8 est tout près de y = 5 cm. (On peut prendre n'importe quel autre maximum ou minimum). À cette position, l'angle est

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan\theta = \frac{5cm}{200cm}$$
$$\theta = 1,432°$$

Pour le maximum d'ordre 8, on a

$$d\sin\theta = 8\lambda$$
$$d\cdot\sin(1,432°) = 8\cdot 650\times 10^{-9}m$$
$$d = 2,0806\times 10^{-4}m = 0,20806mm$$

Comme c'est un peu approximatif, on va dire 0,2 mm.

b) On trouve la largeur des fentes avec la position des minimums de diffraction

$$a\sin\theta = M\lambda$$

On remarque que le minimum d'ordre 1 est tout près de y = 3,2 cm. (On peut prendre n'importe quel autre minimum). À cette position, l'angle est

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan\theta = \frac{3,2cm}{200cm}$$
$$\theta = 0,9167°$$

Pour le minimum d'ordre 1, on a

$$a\sin\theta = \lambda$$
$$a \cdot \sin(0{,}9167°) = 650\times10^{-9} m$$
$$a = 4{,}063\times10^{-5} m = 0{,}04063mm$$

Comme c'est un peu approximatif, on va dire 0,04 mm.

10. L'angle de premier minimum est

$$\sin\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{a}$$
$$\sin\theta = 1{,}22\cdot\frac{560\times10^{-9} m}{0{,}1\times10^{-3} m}$$
$$\theta = 0{,}39145°$$

La distance entre le centre de la tache de diffraction et le premier minimum sur l'écran est donc

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan(0{,}3914°) = \frac{y}{200cm}$$
$$y = 1{,}366cm$$

11. On va trouver le diamètre du trou avec

$$\sin\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{a}$$

Si le diamètre du maximum central est de 6 mm, c'est qu'il y a 3 mm entre le centre du maximum central et le premier minimum. L'angle est donc

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan\theta = \frac{0{,}3cm}{180cm}$$
$$\theta = 0{,}0955°$$

On a donc

$$\sin\theta = 1,22\frac{\lambda}{a}$$
$$\sin(0,0955°) = 1,22 \cdot \frac{620\times10^{-9}m}{a}$$
$$a = 4,538\times10^{-4}m = 0,4538mm$$

12. Selon le principe de Babinet, la figure de diffraction obtenue avec un cheveu est identique à celle qu'on obtient avec une fente. La largeur du cheveu est la même que celle de la fente qui fait la même figure de diffraction. On va donc traiter ce problème comme un problème de fente.

On peut donc trouver le largueur du cheveu avec la formule donnant la largeur de la fente.

$$a\sin\theta = \lambda$$

L'angle du premier minimum est

$$\tan\theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan\theta = \frac{0,065m}{9,67m}$$
$$\theta = 0,3851°$$

La largeur du cheveu est donc

$$a\sin\theta = \lambda$$
$$a \cdot \sin(0,3851°) = 523\times10^{-9}m$$
$$a = 7,78\times10^{-5}m$$
$$a = 77,8\mu m$$

13. On trouve la distance avec

$$\theta_{c(rad)} = \frac{d}{L}$$

Pour y arriver, on doit connaitre l'angle critique. L'angle critique est

$$\sin\theta_c = 1,22\frac{\lambda}{a}$$
$$\sin\theta_c = 1,22\cdot\frac{550\times10^{-9}m/1,33}{3\times10^{-3}m}$$
$$\theta_c = 0,009635°$$

La distance est donc

$$\theta_{c(rad)} = \frac{d}{L}$$
$$1,6817\times10^{-4}rad = \frac{0,02m}{L}$$
$$L = 118,9m$$

14. On trouve la distance avec

$$\theta_{c(rad)} = \frac{d}{L}$$

Pour y arriver, on doit connaitre l'angle critique. L'angle critique est

$$\sin\theta_c = 1,22\frac{\lambda}{a}$$
$$\sin\theta_c = 1,22\cdot\frac{550\times10^{-9}m}{0,25m}$$
$$\theta_c = 1,538\times10^{-4}\,°$$

On a donc

$$\theta_{c(rad)} = \frac{d}{L}$$
$$2,684\times10^{-6}rad = \frac{d}{200\,000m}$$
$$d = 0,5368m$$

15. On trouve le diamètre avec

$$\sin\theta_c = 1{,}22\frac{\lambda}{a}$$

Pour y arriver, on doit connaitre l'angle entre les objets. Cet angle est

$$\begin{aligned}\theta_{c(rad)} &= \frac{d}{L} \\ &= \frac{8\times10^{7}\,km}{4{,}73\times10^{13}\,km} \\ &= 1{,}691\times10^{-6}\,rad\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\sin\theta_c &= 1{,}22\frac{\lambda}{a} \\ \sin\left(1{,}691\times10^{-4}\,rad\right) &= 1{,}22\cdot\frac{550\times10^{-9}\,m}{a} \\ a &= 0{,}3967m\end{aligned}$$

16. L'intensité est

$$I = I_0\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha}{2}}\right)^2$$

À un maximum (ou un minimum), on doit avoir $dI/d\alpha = 0$. Ainsi, on doit avoir

$$\begin{aligned}\frac{dI}{d\alpha} &= 0 \\ \frac{d}{d\alpha}\left(I_0\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\right) &= 0 \\ I_0 2\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha}{2}}\right)\left(\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{2}}{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}\right) &= 0\end{aligned}$$

Il y a deux possibilités pour que cette dérivée soit nulle. Première possibilité : le premier terme entre parenthèses est nul.

$$\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha}{2}} = 0$$

La solution de cette équation est

$$\frac{\alpha}{2} = M\pi$$

où $M = 1, 2, 3,,,$. On reconnait cette solution : elle correspond au minimum d'intensité.

Deuxième possibilité : le deuxième terme entre parenthèses est nul.

$$\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{2}}{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = 0$$

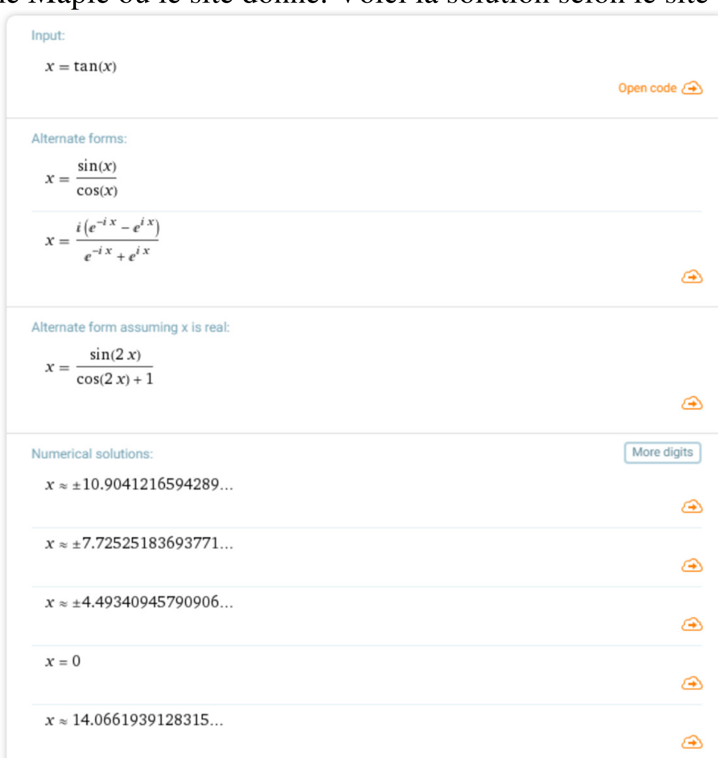
La solution mène à

$$\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Cette équation n'est pas facile à résoudre. On peut, entre autres, la résoudre avec un logiciel comme Maple ou le site donné. Voici la solution selon le site Wolfram.


Input:

$x = \tan(x)$

Open code

Alternate forms:

$x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$x = \frac{i\left(e^{-ix} - e^{ix}\right)}{e^{-ix} + e^{ix}}$

Alternate form assuming x is real:

$x = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x) + 1}$

Numerical solutions:

More digits

$x \approx \pm 10.9041216594289...$

$x \approx \pm 7.72525183693771...$

$x \approx \pm 4.49340945790906...$

$x = 0$

$x \approx 14.0661939128315...$

Le premier maximum est donc à x = 4,49341. (L'approximation dans laquelle le maximum est exactement entre les minimums donnait 4,7124) On a alors

$$\frac{\alpha}{2} = 4,49341$$
$$\alpha = 8,98682$$

Puisque

$$\alpha = \frac{a \sin \theta}{\lambda} 2\pi$$

on arrive à

$$\frac{a \sin \theta}{\lambda} 2\pi = 8,98682$$
$$\frac{0,1 \times 10^{-3} m \cdot \sin \theta}{600 \times 10^{-9} m} \cdot 2\pi = 8,98682$$
$$\sin \theta = 0,00858178$$
$$\theta = 0,4917°$$

La distance est donc

$$\tan \theta = \frac{y}{L}$$
$$\tan(0,4917°) = \frac{y}{2m}$$
$$y = 0,01716m$$
$$y = 1,716cm$$