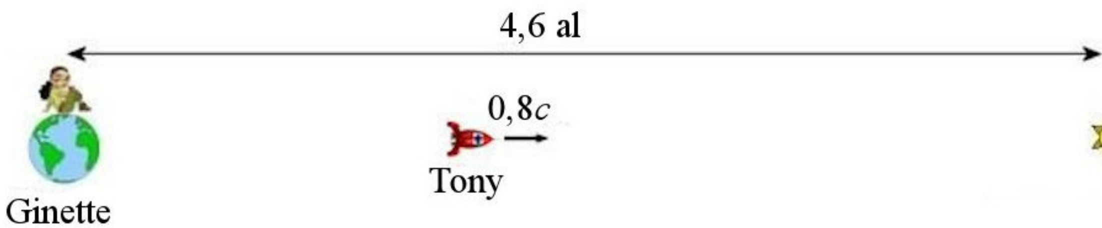
8 LA RELATIVITÉ

Ginette reste sur Terre pendant que Tony va vers une étoile située à 4,6 années-lumière de la Terre. La vitesse du vaisseau de Tony est de 80 % de la vitesse de la lumière.



a) Quelle est la durée du voyage selon Ginette ?

b) Quelle est la durée du voyage selon Tony ?

hdwpapers.com/spaceship_wallpaper_hd-wallpapers.html

Découvrez comment résoudre ce problème dans ce chapitre.

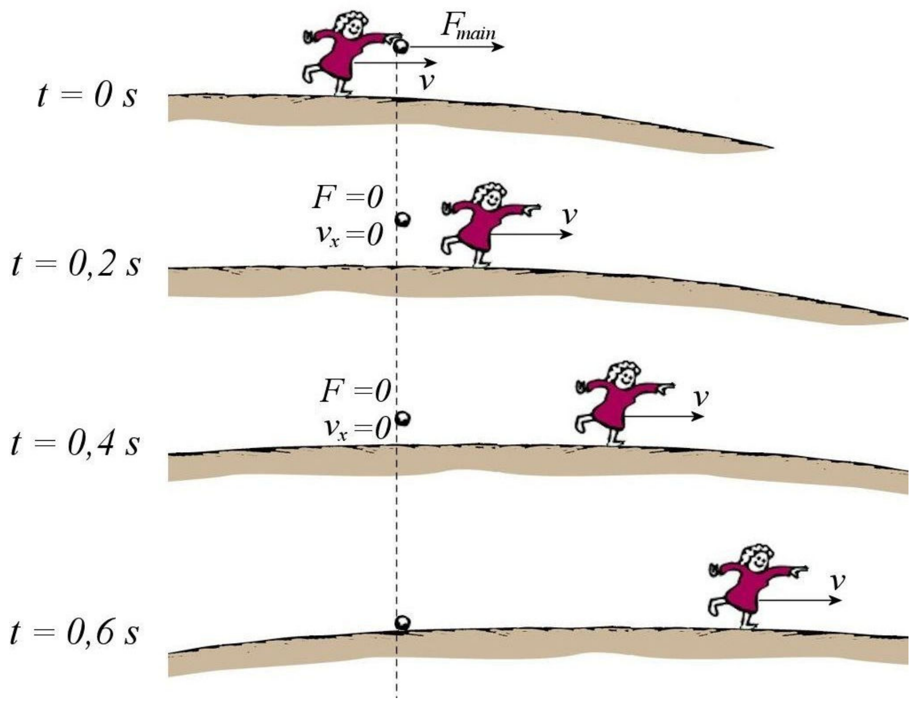
8.1 LE PRINCIPE DE RELATIVITÉ

Le débat sur le mouvement de la Terre

Des effets importants selon la physique prénewtonnienne

Avant le 17e siècle, bien peu de gens pouvaient accepter que la Terre puisse se déplacer autour du Soleil. Plusieurs s'y opposaient parce qu'il aurait des effets importants sur Terre si elle tournait autour du Soleil selon la physique de l'époque.

Dans cette physique, on associait la force à la vitesse, ce qui signifie qu'il faut qu'une force s'applique sur un objet pour qu'il puisse se déplacer. Pour illustrer les conséquences d'une telle physique, imaginons que quelqu'un laisse tomber une pierre au sol pendant que la Terre se déplace. Tant que la pierre est dans la main de la personne, on pourrait dire que la main de la personne fait une force sur la pierre qui permet à celle-ci de se déplacer à la même vitesse que la Terre. Toutefois, quand la personne lâche la pierre, il ne peut plus y avoir de force horizontale sur la pierre. Selon cette physique, cela signifie que la pierre ne pourrait plus avancer. La pierre s'arrêterait donc pendant que la Terre continuerait son mouvement. On aurait alors la situation suivante, si on suppose que la durée de la chute de la pierre est de 0,6 seconde.



slid.es/tofergregg/gravity-and-fluid-dynamics/fullscreen#/22

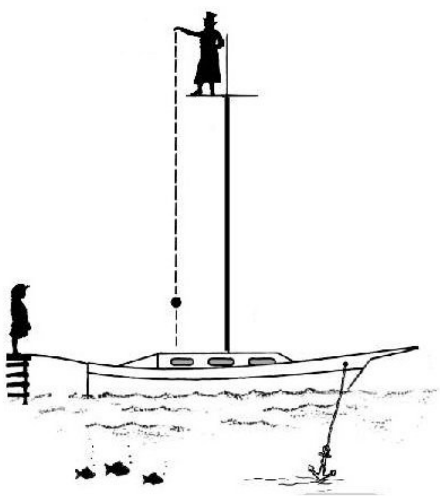
La personne sur Terre voit donc la pierre tomber derrière elle. En fait, elle serait vraiment loin derrière puisque la Terre se déplace à près de 30 km/s ! S'il a fallu 0,6 seconde pour que la pierre tombe, alors la Terre aurait avancé de 18 km pendant que la pierre est restée à la même position horizontale. La pierre serait donc tombée à 18 km derrière la personne.

De toute évidence, les objets ne tombent pas loin derrière nous quand on les laisse tomber, ce qui montrait que la Terre ne se déplace pas (selon la physique prénewtonienne où la force est liée à la vitesse).

En raisonnant ainsi, on peut déduire toute une série d'effets qu'on devrait observer si la Terre se déplaçait. Notons particulièrement ce vent qu'il devrait y avoir continuellement à la surface de la Terre. L'air entourant la Terre ne pourrait pas se déplacer avec la Terre parce qu'on voit mal comment une force pourrait pousser l'air pour la faire avancer. On devrait donc avoir une Terre en déplacement dans de l'air au repos, ce qui donnerait l'impression qu'il y a un vent continuel dans le sens contraire du déplacement de la Terre. Il est certain qu'on noterait la présence d'un tel vent continuel de 30 km/s.

<u>Les arguments de Galilée en faveur du mouvement de la Terre</u>

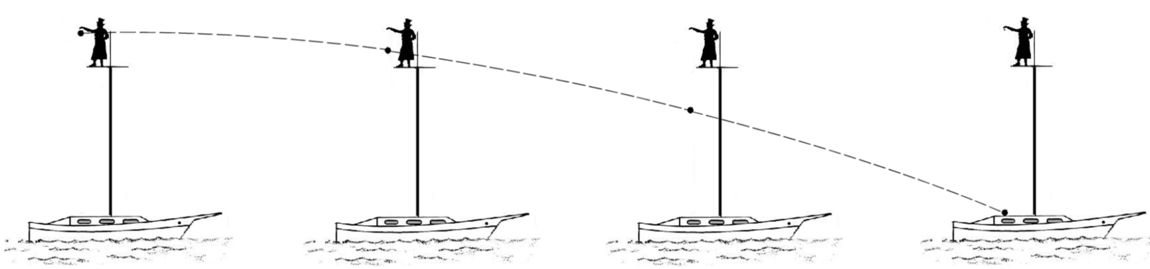
Galilée fut le premier à trouver des arguments assez convaincants pour montrer qu'on pouvait être sur une Terre en mouvement sans qu'il y ait le moindre effet. On ne fera pas exactement le raisonnement de Galilée parce qu'il utilise une physique prénewtonnienne faisant appel à des forces imprégnées, mais les conclusions seront les mêmes.



www.relativityoflight.com/Chapter5.html

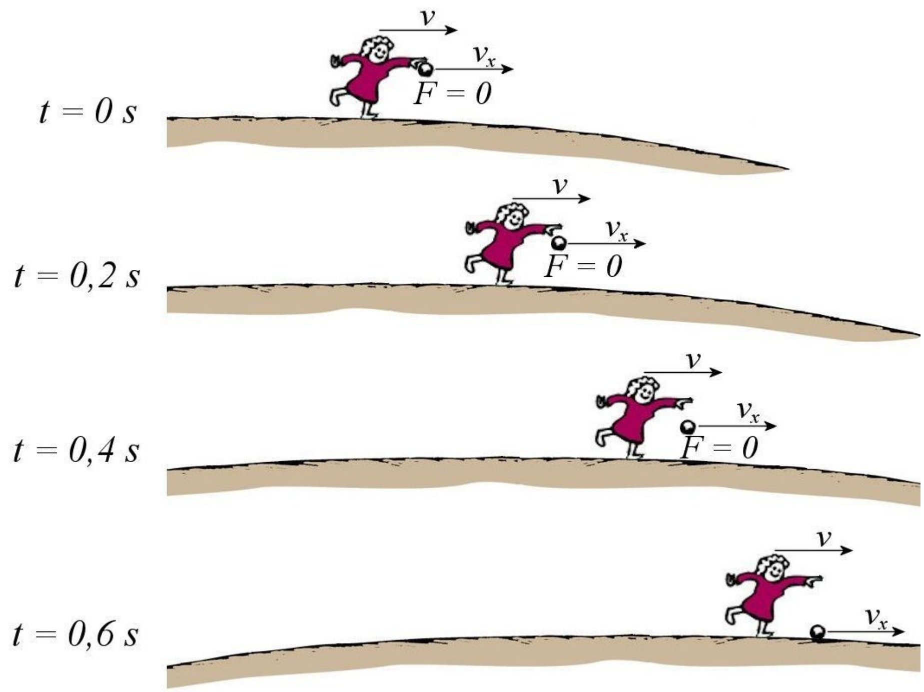
Imaginons ce qui arrive si Valtéri laisse tomber une pierre du haut du mât d'un navire sur un navire au repos (image de gauche). Remarquez bien où elle frappe la cabine : juste au-dessus de la dernière fenêtre.

On va maintenant regarder ce qui arrive si Valtéri laisse tomber la pierre du haut du mât quand le navire est en mouvement. Certains, qui utilisent intuitivement la physique prénewtonienne, nous diraient que la pierre va tomber plus loin vers l'arrière du bateau parce que le bateau va avancer pendant que la pierre tombe. Ce n'est pas ce qui va arriver. Quand Valtéri lâche la pierre, elle a déjà une vitesse horizontale égale à celle du bateau. Comme il n'y a pas de force horizontale, elle va garder toujours cette même vitesse horizontale en tombant. Elle va donc avancer au même rythme que le bateau et on aura alors le mouvement suivant (je sais, le bateau va pas mal vite).



On remarque premièrement que l'objet est tombé exactement à la même place que quand le bateau était arrêté : au-dessus de la dernière fenêtre. Vue du bateau, la chute est donc identique à ce qu'elle était quand le bateau était arrêté : la pierre est tombée tout en restant toujours à la même distance du mât et elle a frappé la cabine au-dessus de la dernière fenêtre.

Avec de tels arguments, on voit qu'on peut être sur une Terre en mouvement à vitesse constante sans que cela paraisse. Reprenons l'exemple de la personne qui lâche une pierre à la surface de la Terre pour illustrer cela.



Quand la pierre est dans la main de la personne, la main n'exerce pas de force sur la pierre. Comme la pierre va à la même vitesse que la Terre et que cette vitesse est constante, il n'y a pas d'accélération et donc pas de force.

Quand on lâche la pierre, il n'y a pas de force horizontale sur la pierre. Cela signifie qu'il n'y a pas d'accélération en x et que la vitesse horizontale de la pierre reste la même. Ainsi, la vitesse en x de la pierre reste toujours identique à celle de la Terre et elle avance au même rythme que la Terre. Cela l'amène à toucher le sol devant la personne, exactement sous la main de la personne, exactement comme si la Terre ne se déplaçait pas.

Avec de tels arguments, l'idée d'une Terre en mouvement a fait lentement son chemin pour devenir un peu plus populaire (mais la majorité des scientifiques de l'époque n'acceptaient toujours pas une Terre en mouvement avant les travaux de Newton.)

Le principe de relativité

Ces arguments sont à la base du principe de relativité. On vient de montrer que notre personne sur le bateau verra la pierre tomber exactement de la même façon que le bateau soit au repos ou en train de se déplacer à vitesse constante. Cela signifie qu'il n'y a pas de nouveaux effets qui apparaissent quand on se déplace à vitesse constante. En mouvement à vitesse constante, tout se passe exactement comme si on était arrêté.

Par exemple, on sait comment verser un café quand est au repos dans notre maison. Si vous devenez un jour agent de bord et que vous devez verser un café dans un avion en mouvement à vitesse constante, ne changez pas vos habitudes : versez le café exactement de la même façon dans l'avion en mouvement qu'à la maison. Inutile de verser le café un peu en avant de la tasse en se disant que le café partira un peu vers l'arrière de l'avion à cause du mouvement. On peut donc jouer au billard dans un avion se déplaçant à vitesse constante en jouant exactement de la même façon que dans une salle de billard. Il n'y a aucune « compensation » à faire à cause du mouvement de l'avion.

Dans ce vidéo, on laisse tomber une balle d'un camion en mouvement. Ils ont mis une planche pour donner une référence pour le mouvement de la balle. On peut voir que la balle tombe en restant au milieu de la planche, exactement ce qui se serait produit si on avait lâché la balle alors que le véhicule était arrêté.
http://www.youtube.com/watch?v=_ky-ITbNfeY

Tout cela veut aussi dire que si on vous enferme dans un avion en mouvement à vitesse constante sans fenêtres, il vous sera impossible de dire si l'avion est en mouvement ou non. S'il n'y a aucun nouvel effet qui apparait en mouvement, tout se passera exactement de la même façon que l'avion soit en mouvement ou non. Aucune expérience ne pourrait vous indiquer que vous êtes en mouvement.
http://www.youtube.com/watch?v=uJ8l4kh_jto

Cela voudrait aussi dire que si on fermait les yeux dans une automobile en mouvement (si on n'est pas en train de conduire évidemment), on ne pourrait pas dire si la voiture est en mouvement ou non. Un instant, n'importe quel moron pourrait dire si la voiture est en mouvement ou arrêté, il doit y avoir une erreur. En fait, non. On sait que la voiture se déplace parce que les bosses sur la route secouent un peu la voiture. Toutefois, on dit que le mouvement est indétectable si on va à vitesse constante. Si on veut que la vitesse soit constante, il ne faut pas qu'il y ait de bosses sur la route parce que ces bosses font accélérer la voiture dans tous les sens. Imaginons donc que la route est fraichement asphaltée et qu'il n'y a aucune bosse. Soudainement, il devient plus difficile de dire si la voiture se déplace. On entend toujours l'air qui frappe la voiture, mais ce pourrait être du vent qui arrive sur la voiture arrêtée… Ce serait plus convaincant si on était dans un vaisseau spatial. Alors, il n'y aurait pas de son de l'air ni de sons de la route et ce serait totalement impossible de dire si le vaisseau est arrêté ou non avec les yeux fermés.

Ce qui devrait vraiment vous convaincre que rien ne change quand on se déplace à vitesse constante est le fait que nous nous déplaçons autour du Soleil à 29,8 km/s et que ça ne parait pas du tout. Encore mieux, le Soleil tourne autour du centre de la Galaxie à une vitesse de 240 km/s, et ça ne parait pas non plus. Tout se passe comme si la Terre était arrêtée.

S’il n’y a pas de nouveaux effets quand on se déplace à vitesse constante, c’est que les lois de la physique sont les mêmes. Il n’y a pas de nouvelles forces qui entrent en jeux, ce qui veut dire que les lois sont exactement les mêmes. Cela nous amène donc au principe de relativité de Galilée (mais en fait formulé par Euler).

Le principe de relativité

Les lois de la physique sont les mêmes pour tous les observateurs se déplaçant à vitesse constante.

8.2 LES LOIS DE TRANSFORMATIONS DE GALILÉE

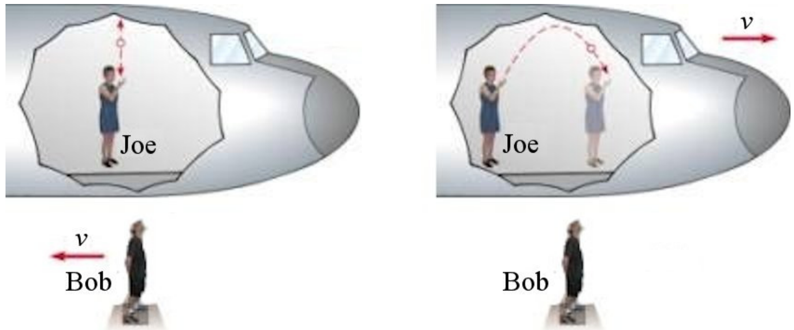
Un phénomène vu par deux observateurs

On a dit que ce principe fait en sorte qu’on ne peut pas dire si notre vaisseau spatial se déplace ou pas si on ferme les yeux quand le vaisseau se déplace à vitesse constante. Mais si on ouvre les yeux, on va bien voir que le vaisseau spatial se déplace en voyant les planètes se déplacer autour de nous. On va bien voir les planètes se déplacer, mais cela ne veut pas nécessairement dire que le vaisseau se déplace. On pourrait très bien dire que le vaisseau spatial est arrêté et que ce sont les planètes qui se déplacent. Selon le principe de relativité, c’est une explication tout à fait valable. Le point de vue dans lequel le vaisseau ne se déplace pas et que les planètes se déplacent est tout aussi bon que le point de vue dans lequel le vaisseau se déplace et que les planètes ne se déplacent pas.

Avec le principe de relativité, vous pouvez donc affirmer que votre voiture est arrêtée et que c’est la route et tout le paysage qui se déplacent lorsque vous faites une balade en voiture. C’est un point de vue tout à fait acceptable selon le principe de relativité. C’est un point de vue tout aussi valide que celui où la Terre est arrêtée et votre voiture se déplace.

Puisque tous les points de vue sont bons en relativité, on peut analyser un phénomène à partir de n’importe quel point de vue en utilisant les mêmes lois de la physique et le résultat obtenu sera toujours valide. Il n’y a pas de point de vue qui est meilleur qu’un autre. Analyser le mouvement d’une voiture en prenant le point de vue où la voiture est arrêtée et le sol se déplace à 100 km/h est tout aussi bon que de prendre le point de vue où le sol est arrêté et la voiture se déplace à 100 km/h (ce qu’on fait habituellement). On pourrait même prendre un point de vue où la Terre va à 50 km/h dans une direction et la voiture à 50 km/h dans l’autre direction.

Par exemple, supposons que Joe, dans un avion, lance une balle dans les airs et la rattrape. Bob est au sol et observe le mouvement de la balle lancée par Joe. Chacun va décrire ce mouvement à partir de son point de vue.



Selon Joe Selon Bob

www.physics.uc.edu/~sitko/CollegePhysicsIII/26-Relativity/Relativity.htm

Pour Joe, qui est dans l'avion, la balle a fait un mouvement en ligne droite vers le haut puis vers le bas. Bob, qui est au sol, va plutôt dire que la balle a fait un mouvement parabolique. La description est différente, mais la loi de ce phénomène est la même pour les deux observateurs : la balle tombe vers le bas avec l'accélération gravitationnelle de 9,8 m/s² vers le bas.

Est-ce qu'une description est meilleure que l'autre ? Pas du tout selon le principe de relativité. La description du mouvement de la balle selon Joe est différente de la description du mouvement de la balle selon Bob, mais elle est tout aussi bonne. Tous les observateurs sont sur un pied d'égalité selon la relativité. Joe va dire que la balle n'a pas de vitesse initiale en x alors que Bob va dire que la balle a une vitesse initiale en x. Qui a raison ? Les deux ont raison. Les conditions initiales du mouvement peuvent être différentes d'un observateur à l'autre, mais les lois de la physique doivent être les mêmes. Cela veut dire que même si Bob et Joe ne sont pas d'accord sur la vitesse initiale, ils sont d'accord sur le fait que l'accélération de la balle est de 9,8 m/s² vers le bas.

Quelques définitions

Un **évènement** est quelque chose qui se produit à un endroit et à un moment précis. Ce pourrait être une explosion par exemple. Pour décrire un évènement, on doit donner la position et le moment auquel s'est produit l'évènement. Si je vous parle d'un évènement qui s'est produit le 15 avril 1912 à 2 h 20 à la position 41°43′57″N 49°56′49″O dans l'Atlantique, vous savez (peut-être) que je vous parle du naufrage du Titanic. On notera donc les évènements par ses coordonnées de position et de temps (x,y,z,t). L'évènement ne doit pas être nécessairement spectaculaire. Quelqu'un qui éternue est un évènement qu'on peut noter par sa position et le moment où il s'est produit.

Un **observateur** est quelqu'un qui note la position et le temps auxquels se produisent les évènements. Les observateurs peuvent être en mouvement les uns par rapport aux autres à vitesse constante. Selon le principe de relativité, il n'y a pas d'observateur qui est mieux qu'un autre. Tous les observateurs ont des points de vue différents, mais qui sont tous aussi valides les uns que les autres.

Chaque observateur utilise un système d'axe qui peut être différent de celui des autres observateurs. Ce sont les **repères ou référentiels**. Si un observateur se déplace à une certaine vitesse, son système d'axe se déplace à la même vitesse que l'observateur. Bien qu'on ne soit pas obligé de le faire, on peut considérer que chaque observateur est toujours à l'origine de son système d'axe. Chaque observateur notera donc la position et le temps des évènements à partir de son référentiel. Il faudra s'attendre à ce qu'ils obtiennent des coordonnées différentes puisque les origines ne sont pas toutes à la même place.

On fait une différence ici entre **voir** un évènement et l'**observer**. Pour illustrer cette différence, imaginons qu'une étoile distante de 5 années-lumière explose en 2012. (L'année-lumière est une unité de distance qui correspond à la distance parcourue par la lumière en un an. Puisque la lumière va à 300 000 km/s, cela donne une distance de $9{,}46 \times 10^{15}$ m). Comme il faut 5 ans pour que la lumière de l'explosion arrive jusqu'à nous, on verra l'explosion en 2017. Cependant, quand on va voir l'explosion en 2017, on pourra déduire que l'explosion s'est véritablement produite en 2012. On va donc **voir** l'explosion en 2017 et on va **observer**, en faisant un petit calcul, qu'elle s'est produite en 2012.

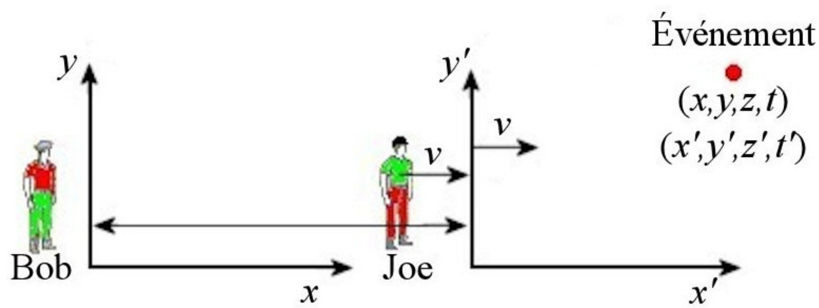
(En fait, le calcul peut être un peu plus compliqué que cela si la source se déplace. Il faut alors déterminer où était la source quand la lumière arrivant de celle-ci est partie. Ce n'est donc pas la distance actuelle de la source qu'il faut utiliser, mais la distance de la source au moment de l'émission de la lumière.)

Les lois de transformation

On veut maintenant passer d'un observateur à l'autre. Par exemple, on veut connaitre la position d'un évènement selon un observateur si on connait la position d'un évènement selon un autre observateur.

La transformation des positions

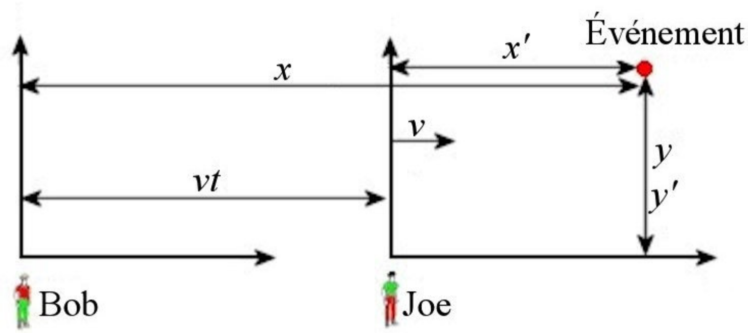
Deux observateurs observent un évènement. Bob est au repos et Joe se déplace à la vitesse constante v vers la droite. Chacun des observateurs note la position et le temps d'un évènement avec des systèmes de coordonnées différents.



en.wikibooks.org/wiki/Special_Relativity/Print_version

Le système de coordonnées de Bob est immobile alors que le système de coordonnées de Joe suit Joe et se déplace donc à vitesse constante v vers la droite. Évidemment, les deux observateurs n'obtiendront pas les mêmes valeurs pour la position puisque les origines des systèmes d'axes qu'ils utilisent ne sont pas à la même place. Ils seront donc en désaccord sur les coordonnées de la position de l'évènement.

On peut faire des lois permettant de passer des coordonnées de Bob à celles de Joe et vis-versa. Si Joe dit à Bob les coordonnées de l'évènement, alors, avec ces formules, Bob pourrait calculer la position de l'évènement avec ses propres axes.



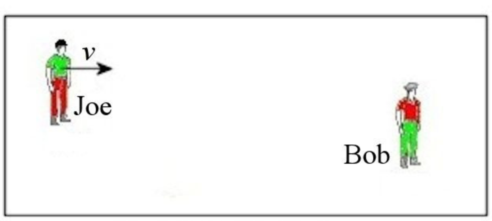
La distance entre les deux axes des y augmente toujours puisque Joe se déplace vers la droite. En supposant que les deux axes des y étaient à la même place à $t = 0$, la distance entre les axes est vt. La distance entre l'axe des y et l'évènement est la valeur de x et la distance entre l'axe des y' et l'évènement est x'. De même, la distance entre les axes des x et l'évènement donne les valeurs de y. On remarque alors sur la figure que

$$x = x' + vt$$
$$y = y'$$

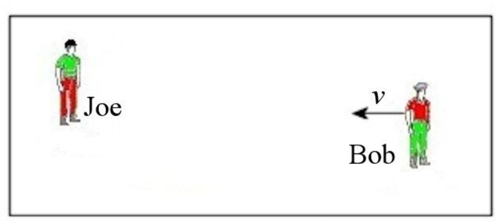
Ce sont les lois de transformations. Elles sont appelées les *transformations de Galilée*. On peut aussi les inverser pour calculer les x' et y' à partir des x et y.

$$\begin{aligned} x &= x' + vt & \qquad x' &= x - vt \\ y &= y' & y' &= y \\ z &= z' & z' &= z \end{aligned}$$

Il y a une convention pour déterminer lequel des deux observateurs note les coordonnées avec les primes. Dans notre situation, Bob voit Joe aller vers les x positifs. Si on prend le point de vue de Joe, il voit Bob aller vers les x négatifs.



Repère de Bob



Repère de Joe

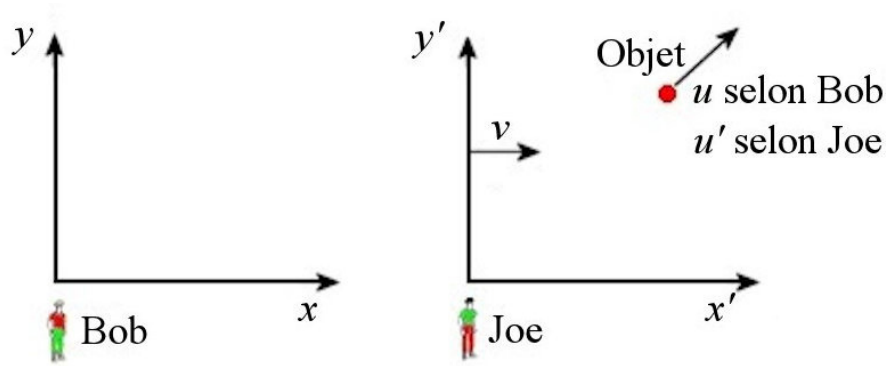
La règle est la suivante.

L'observateur qui voit l'autre se diriger vers les *x* négatifs utilise les primes.

C'est donc Joe qui utilise les primes dans le cas présenté. (Si on suppose évidemment que l'axe des *x* est vers la droite.)

La transformation des vitesses

Supposons que les observateurs observent un objet en mouvement. On veut savoir comment obtenir la vitesse de l'objet selon un observateur à partir de la vitesse mesurée par l'autre observateur. Nous noterons la vitesse de l'objet *u* parce que *v* est déjà utilisé pour indiquer la vitesse de Joe par rapport à Bob.



Comme la vitesse d'un objet correspond au rythme auquel change sa position, les composantes de la vitesse selon Bob sont

$$u_x = \frac{dx}{dt} \qquad u_y = \frac{dy}{dt}$$

et les composantes de la vitesse selon Joe sont

$$u'_x = \frac{dx'}{dt} \qquad u'_y = \frac{dy'}{dt}$$

Avec la transformation de Galilée $x = x' + vt$, on a alors

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\left(x'+vt\right)}{dt}$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \frac{d\left(vt\right)}{dt}$$
$$u_x = u'_x + v$$

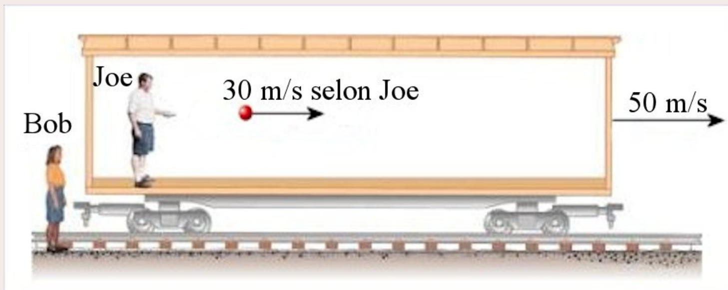
En procédant de la même façon pour les composantes *y* et *z*, on obtient les lois de transformation galiléennes des vitesses.

$$\begin{aligned} u_x &= u'_x + v & \qquad u'_x &= u_x - v \\ u_y &= u'_y & u'_y &= u_y \\ u_z &= u'_z & u'_z &= u_z \end{aligned}$$

On voit qu'encore une fois, les deux observateurs ne s'entendent pas sur la vitesse des objets. Tout ça est cependant très logique. Illustrons le tout par un exemple.

Exemple 8.2.1

Joe, qui est dans un train, lance une balle vers l'avant du train. Si la vitesse de la balle selon Joe est de 30 m/s et que le train va à 50 m/s selon Bob, quelle est la vitesse de la balle selon Bob ?



www.physics.uc.edu/~sitko/CollegePhysicsIII/26-Relativity/Relativity.htm

La vitesse de la balle selon Joe est $u'_x = 30$ m/s.
(La vitesse de l'objet selon les observateurs est toujours u ou u'. Comme Joe va vers les x positifs selon Bob, tout ce qu'observe Joe a un prime.)
La vitesse entre les deux observateurs est $v = 50$ m/s.
(v est toujours la vitesse entre les deux observateurs.)
On cherche la vitesse de la balle selon Bob qui est u_x.
(La vitesse de l'objet selon les observateurs est toujours u ou u'. Comme Bob a les axes x et y, tout ce qu'observe Bob n'a pas de prime.)

Selon les lois de transformation des vitesses on a donc

$$\begin{aligned} u_x &= u'_x + v \\ &= 30\tfrac{m}{s} + 50\tfrac{m}{s} \\ &= 80\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Cela semble très logique. Une balle lancée à 30 m/s dans un train qui va déjà à 50 m/s, ça fait bien une vitesse totale de 80 m/s pour un observateur qui voit le train passer.

Ce vidéo illustre ces transformations de vitesse.
http://www.youtube.com/watch?v=iHfCwJwdIv8

Ce n'est pas bien grave que les deux observateurs ne mesurent pas la même vitesse puisque les lois de Newton ne sont pas centrées sur les vitesses. Même s'il y a certaines quantités qui dépendent de la vitesse dans la physique de Newton, cela n'affecte pas les principes de la physique newtonienne. Par exemple, les deux observateurs ne seront pas d'accord sur les quantités de mouvement des objets puisque les vitesses sont différentes, mais ce n'est pas grave puisqu'ils seront quand même d'accord sur la conservation de la quantité de mouvement totale d'un système, et c'est ce qui est important dans la physique de Newton.

La transformation des accélérations

Pour que les lois de Newton soient respectées, il faut cependant qu'ils soient d'accord sur l'accélération d'un objet. En effet, les forces étant nécessairement les mêmes selon les deux observateurs, on doit espérer que les accélérations sont les mêmes pour les deux observateurs. Une différence signifierait que les lois de Newton ne sont pas valides pour tous les observateurs, ce qui contreviendrait au principe de relativité. Vérifions-le en faisant les lois de transformations de l'accélération. L'accélération de l'objet, qui est le rythme auquel change la vitesse est, selon Bob

$$a_x = \frac{du_x}{dt} \qquad a_y = \frac{du_y}{dt}$$

Selon Joe, l'accélération est

$$a'_x = \frac{du'_x}{dt} \qquad a'_y = \frac{du'_y}{dt}$$

On obtient les transformations des accélérations en utilisant les transformations des vitesses. Par exemple

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{d\left(u'_x + v\right)}{dt}$$
$$\frac{du_x}{dt} = \frac{du'_x}{dt} + \frac{d\left(v\right)}{dt}$$
$$a_x = a'_x$$

La dérivée *dv/dt* est nulle puisque la vitesse de Joe est constante. En procédant de la même façon pour les autres composantes de la vitesse, on obtient les lois de transformation galiléennes des accélérations.

$$\begin{aligned} a_x &= a'_x \qquad & a'_x &= a_x \\ a_y &= a'_y \qquad & a'_y &= a_y \\ a_z &= a'_z \qquad & a'_z &= a_z \end{aligned}$$

On voit que les accélérations sont les mêmes pour les deux observateurs. Cela veut dire que les forces, qui sont évidemment identiques selon les deux observateurs, donnent la même accélération pour les deux observateurs et que les lois de Newton sont valides pour les deux observateurs : celui au repos et celui se déplaçant à vitesse constante. Cela veut donc dire que la mécanique de Newton est conforme au principe de relativité. La personne qui se déplace à vitesse constante applique les lois de Newton exactement de la même façon que la personne qui est au repos.

La même expérience selon 2 observateurs

Le principe de relativité spécifie que la même expérience faite par 2 observateurs ayant des vitesses différentes doit donner exactement les mêmes résultats. Par exemple, si Joe dans un vaisseau spatial qui se déplace par rapport à la Terre lance un projectile avec une certaine vitesse initiale, la trajectoire doit être identique à celle obtenue par Bob sur Terre qui lance un projectile avec la même vitesse initiale. (Attention, ici les deux observateurs ne regardent pas la même expérience. Chaque observateur fait une expérience en lançant chacune une balle avec la même vitesse initiale telle que mesurée par la personne qui lance la balle.)

Selon Bob, la position de sa balle sur sa trajectoire parabolique est notée (x,y). Selon Joe, la position de sa balle sur sa trajectoire parabolique est notée (x',y'). Selon le principe de relativité, les 2 trajectoires doivent être identiques, ce qui signifie que les positions (x,y) mesurées par Bob doivent être identiques aux positions (x',y') mesurées par Joe.

Voici ce que Bob va prévoir. Le lancement de la balle de Joe est identique au lancement de la balle de Bob, sauf que sa vitesse initiale en x est v plus grande selon Bob (puisque la balle a déjà la vitesse du vaisseau spatial lors du lancement selon Bob). Bob peut donc trouver la trajectoire de la balle de Joe selon Joe en trouvant la trajectoire de sa propre balle selon Joe puis en additionnant la vitesse v à la vitesse de la balle en x.

La position de la balle de Bob selon Joe est donnée par les transformations de Galilée.

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$

Si Bob ajoute maintenant la vitesse initiale supplémentaire v en x, il arrive à

$$x' = x - vt + vt$$
$$y' = y$$

Les vt s'annulent et on obtient les mêmes positions ! Les trajectoires sont donc identiques pour les 2 observateurs tel que le spécifie le principe de relativité.

L'utilisation du principe de relativité

Le principe de relativité permet de simplifier la solution de certains problèmes ou d'obtenir des résultats intéressants. En voici deux exemples pour illustrer.

Par exemple, on peut résoudre des problèmes de collision plus facilement en prenant le point de vue de l'observateur qui mesure une quantité de mouvement totale nulle.

http://physique.merici.ca/ondes/collisionrel.pdf

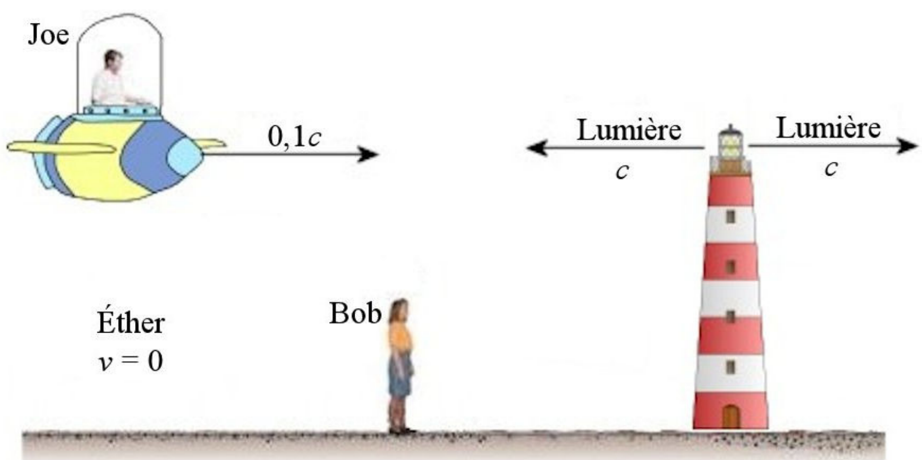
On peut aussi faire quelques démonstrations. Par exemple, voici la démonstration que la quantité de mouvement doit être obligatoirement conservée si l'énergie cinétique est conservée dans une collision.
http://physique.merici.ca/ondes/preuveEetp1.pdf

8.3 DES PROBLÈMES AVEC LA LUMIÈRE

La vitesse de la lumière et l'éther

À la fin du 19e siècle, tous étaient convaincus que la lumière était une onde. De plus, selon les modèles de l'époque, la lumière se propageait dans un milieu appelé *éther* qui était présent partout dans l'univers. La lumière se propageait donc à 300 000 km/s par rapport à l'éther. Toutefois, il y avait un sérieux problème avec les mesures de la vitesse de la lumière[1].

Pour comprendre le problème, examinons ce que prévoit la relativité de Galilée quand deux observateurs observent la lumière se propageant dans l'éther. Un des observateurs, Bob, est au repos dans l'éther pendant que l'autre observateur, Joe, se déplace à 0,1c dans l'éther. Dans le repère de Bob, on a



www.physics.uc.edu/~sitko/CollegePhysicsIII/26-Relativity/Relativity.htm
www.tuxpaint.org/stamps/index.php3?cat=town&page=3
www.jrj-socrates.com/Cartoon%20Pages/kaput_and_zosky.htm

Si Bob mesure la vitesse de la lumière, il obtiendra 300 000 km/s dans toutes les directions.

[1] On cite souvent Kelvin en affirmant qu'il a dit en 1900 que tout était découvert et qu'il ne restait plus que deux petits nuages dans le monde de la physique. En fait, on fait dire à Kelvin beaucoup plus qu'il en a dit. En 1900, Kelvin ne fait pas référence à la physique en général, mais aux modèles mécanistes (c'est-à-dire aux tentatives d'explication du monde par des mécanismes comme l'éther) en optique et en thermodynamique. Il parle alors des problèmes de la vitesse de la lumière dans l'éther et de la difficulté que pose le théorème de l'équipartition de l'énergie dans la construction de modèles moléculaires.

Regardons maintenant cette situation en prenant le point de vue de Joe et calculons la vitesse des deux faisceaux lumineux selon Joe.

Faisceau allant vers la droite.

Vitesse du faisceau selon Bob : $u_x = c$
Vitesse du faisceau selon Joe : $u_x' = ?$
Vitesse relative de Joe par rapport à Bob : $v = 0{,}1c$

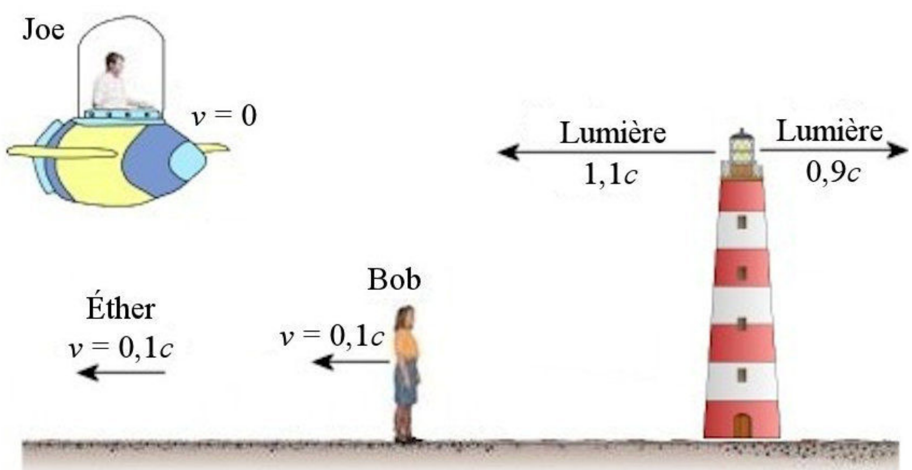
$$u_x' = u_x - v = c - 0{,}1c = 0{,}9c$$

Faisceau allant vers la gauche.

Vitesse du faisceau selon Bob : $u_x = -c$
Vitesse du faisceau selon Joe : $u_x' = ?$
Vitesse relative de Joe par rapport à Bob : $v = 0{,}1c$

$$u_x' = u_x - v = -c - 0{,}1c = -1{,}1c$$

On a donc la situation suivante dans le repère de Joe.



Ce résultat n'est pas si surprenant. Selon Joe, la lumière allant vers la droite est ralentie par le mouvement de l'éther vers la gauche, un peu comme un poisson nageant contre le courant qui va moins vite que quand il n'y a pas de courant. La lumière allant vers la gauche est entrainée par le mouvement de l'éther allant vers la gauche, ce qui lui donne une vitesse plus grande, comme un poisson nageant dans le même sens que le courant.

Ainsi, si on est au repos dans l'éther, comme c'est le cas pour Bob, la vitesse de la lumière semblera être la même dans toutes les directions. Si on se déplace dans l'éther, comme c'est le cas pour Joe, la vitesse semblera différente selon les directions. Remarquez que la différence entre les vitesses de la lumière selon Joe dans les directions opposées est de $1{,}1c - 0{,}9c = 0{,}2c$, qui est deux fois la vitesse de l'éther selon Joe. Cette différence de vitesse est toujours égale à deux fois la vitesse de l'éther.

L'expérience de Michelson-Morley

Le raisonnement précédent est exactement ce qui mena à la conception d'une expérience visant à mesurer la vitesse de la Terre dans l'éther. Si la Terre est immobile dans l'éther, la vitesse de la lumière sera la même dans toutes les directions. Si la Terre se déplace dans l'éther, la vitesse sera différente selon la direction. La différence entre la plus grande vitesse mesurée et la plus petite vitesse mesurée sera égale à deux fois la vitesse de la Terre dans l'éther.

Michelson fit cette expérience en 1881 et la refit, avec plusieurs améliorations, avec Morley en 1887. L'expérience de 1887 était si précise qu'elle pouvait détecter une variation de vitesse aussi petite que 2 km/s. À la surprise de tous, on n'a mesuré aucune variation dans la vitesse de la lumière. Si la vitesse de la lumière est la même dans toutes les directions, alors la Terre devait être immobile dans l'éther. On pouvait expliquer ce résultat en supposant que l'éther tournait autour du Soleil à la même vitesse que la Terre ou en supposant que la Terre entraine l'éther dans son mouvement.

supernovae.in2p3.fr/~llg/Enseignements/LP353/TD-correction-derniers-exos.pdf

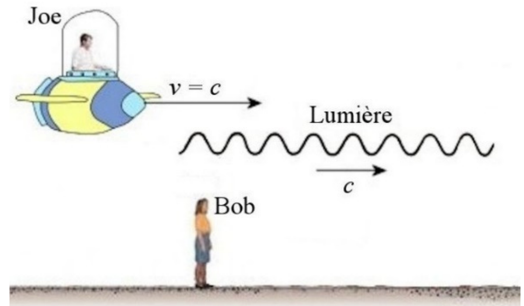
Le problème, c'est qu'une autre observation montrait que la Terre devait se déplacer dans l'éther. Il s'agit de l'aberration. Pour comprendre ce phénomène, imaginons ce qui se produit quand il pleut. Si la personne est au repos sous la pluie, elle doit mettre le parapluie exactement au-dessus de sa tête. Si la personne court, elle doit incliner le parapluie parce que, dans le repère de la personne, la pluie a maintenant une vitesse horizontale.

Il se produit la même chose avec la lumière. Si la Terre est au repos dans l'éther, la lumière arrivera dans une certaine direction. Si la Terre se déplace dans l'éther. La lumière arrivera dans une direction un peu différente, ce qui veut dire qu'on doit changer un peu l'alignement des télescopes pour regarder une étoile. Cette correction est d'à peine 0,005° au maximum, mais on parvient à la mesurer. Comme la direction de la vitesse de la Terre change constamment durant l'année, la correction d'alignement change constamment de direction pendant l'année. On peut même déduire de ces mesures que la Terre se déplace à près de 30 km/autour du Soleil. Selon la théorie de l'éther, il n'y aurait pas d'aberration si l'éther allait à la même vitesse que la Terre. Cette observation montrait donc que l'éther ne tourne pas autour du Soleil ou qu'il n'est pas entrainé par le mouvement de la Terre.

Il y a donc une contradiction. L'expérience de Michelson-Morley montrait que la Terre est au repos dans l'éther et l'aberration montrait que la Terre se déplace dans l'éther. Comment se sortir de ce paradoxe ? C'est ce problème qu'on tentait de régler à la fin du 19^{e} siècle.

La vitesse de la lumière dans le vide est toujours la même !

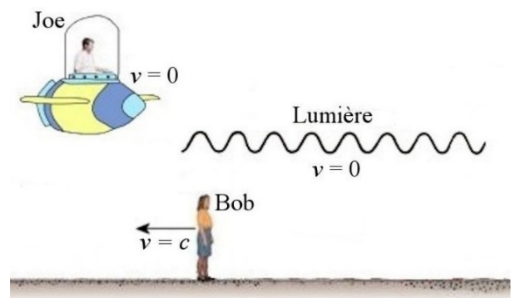
La vitesse de la Terre dans l'éther n'était pas le seul problème. Les équations de l'électromagnétisme, obtenues par Maxwell en 1865, indiquent que la lumière est une onde électromagnétique. Quand on calcule la vitesse de ces ondes dans le vide, on arrive, évidemment, à la vitesse de la lumière.



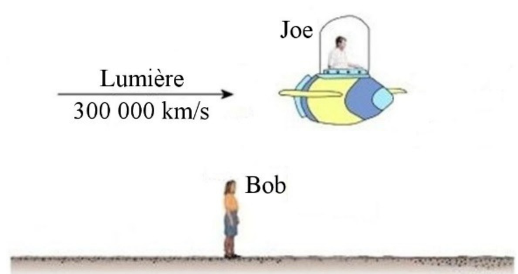
Il y avait cependant un petit conflit entre les équations de Maxwell et la relativité. La situation de droite illustre ce conflit. Dans cette situation, il y a une onde électromagnétique qui se déplace vers la droite. Qu'est-ce que Joe va observer s'il va à la vitesse de la lumière ?

Selon les équations de la relativité de Galilée, la vitesse de l'onde selon Joe est

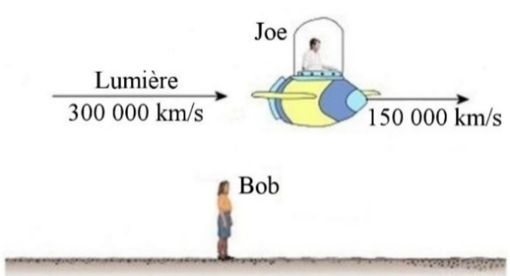
$$u'_x = u_x - v = c - c = 0$$



On aurait donc la situation montrée à droite dans le repère de Joe. Joe verrait donc une onde électromagnétique qui n'avance pas. Toutefois, il est impossible de pouvoir observer une telle onde au repos selon les équations de Maxwell. Si on résout ces équations, on trouve que cette onde doit absolument se déplacer à 300 000 km/s selon Bob aussi ! De toute évidence, il y a un problème : les équations de Maxwell ne respectaient pas les équations de la relativité de Galilée. La vitesse de la lumière dans le vide devrait toujours être de 300 000 km/s pour tous les observateurs, peu importe leur vitesse.

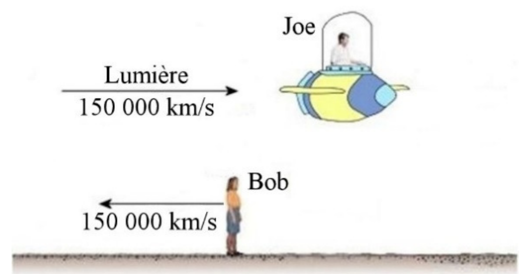


Prenons un exemple pour illustrer ce désaccord. Bob et Joe sont tous les deux arrêtés et un faisceau de lumière passe à la vitesse de la lumière. Joe mesure alors le temps nécessaire pour que la lumière passe de l'arrière de son vaisseau à l'avant de son vaisseau. Supposons que le vaisseau a 300 m de long. Dans ce cas, il faudra 1 μs pour que la lumière passe de l'arrière à l'avant du vaisseau.

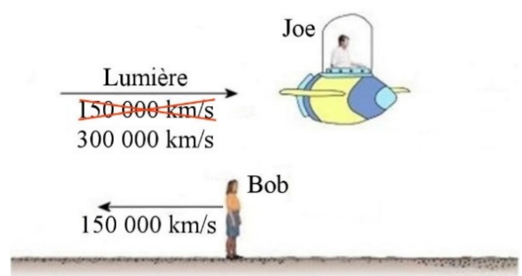


Joe part ensuite avec son vaisseau à une vitesse de 0,5c.

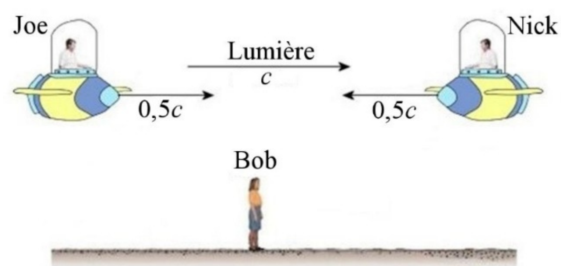
Si on se place dans le repère de Joe, on a les vitesses montrées à droite. Selon la relativité de Galilée, le faisceau de lumière va seulement à 150 000 km/s selon Joe. À cette vitesse, le temps nécessaire pour que cette lumière parcoure les 300 m pour aller de l'arrière du vaisseau à l'avant du vaisseau devrait alors être de 2 µs.



Pourtant, si Joe faisait vraiment cette expérience, il mesurerait un temps de 1 µs, ce qui veut dire que la vitesse de faisceau de lumière n'est pas de 150 000 km/s, mais de 300 000 km/s ! Cette mesure est en désaccord avec les prévisions de la relativité de Galilée ! Peu importe la vitesse de Joe, il mesurera toujours que le temps pris par la lumière pour passer d'un bout à l'autre du vaisseau est de 1 µs !



Ainsi, dans la situation de droite, tous les observateurs vont mesurer la même vitesse pour la lumière. Cela signifie que si Joe ou Nick mesure le temps que prend la lumière pour aller d'un bout à l'autre de leur vaisseau respectif, ils mesureront toujours 1 µs si les vaisseaux ont 300 m de long. La mesure de la vitesse de la lumière selon Joe donnera une valeur de c, et non pas de 0,5*c* tel que le prévoit les transformations des vitesses. La mesure de la vitesse de la lumière selon Nick donnera une valeur de *c*, et non pas de 1,5*c* tel que le prévoit les transformations des vitesses. Si on tente de rattraper la lumière, comme le fait Joe ici, elle va toujours nous dépasser à 300 000 km/s, peu importe notre vitesse. Si on fonce vers la lumière, comme le fait Nick ici, elle va toujours nous frapper à 300 000 km/s, peu importe notre vitesse.



http://www.youtube.com/watch?v=XR3OJwstfE8

8.4 LES POSTULATS D'EINSTEIN

Il y avait donc quelques problèmes à régler. La Terre se déplace-t-elle dans l'éther ? Comment réconcilier les équations de Maxwell et la relativité ?

Pendant que certains essayaient de modifier la théorie de Maxwell pour qu'elle soit en accord avec la relativité de Galilée et que d'autres essayaient de faire un modèle d'éther qui permettait d'expliquer toutes les observations, Albert Einstein arrive, en 1905, à une solution complètement différente. En partant de 2 idées de départ simples (qu'on appelle des *postulats*), il montre qu'on peut régler ces problèmes en modifiant les équations de la relativité.

Voici les 2 postulats de départ d'Einstein.

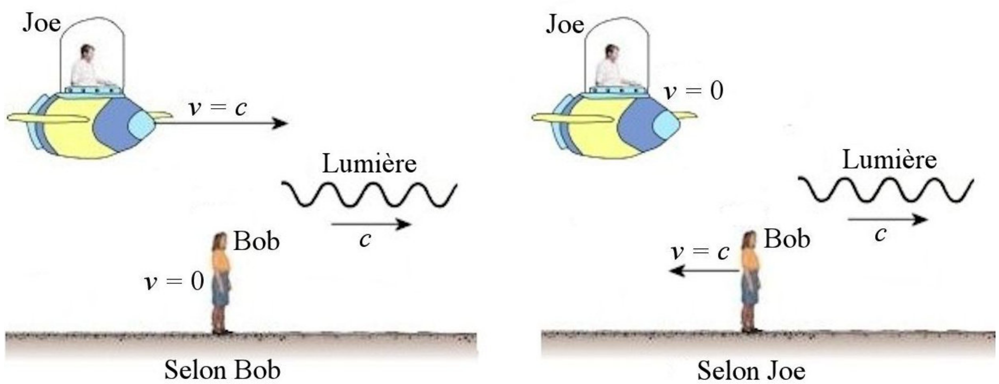
Les postulats d'Einstein

1) Les lois de la physique sont les mêmes pour tous les observateurs se déplaçant à vitesse constante.
2) La vitesse de la lumière dans le vide est toujours de 300 000 km/s (en fait 299 792,458 km/s) pour tous les observateurs.

(Petite note amusante : les postulats de la relativité nous disent que les lois de la physique et la vitesse de la lumière ne sont justement **pas des quantités relatives**, c'est-à-dire qui dépendent de l'observateur !)

Le premier postulat est simplement le principe de relativité. Toutefois, Einstein va un peu plus loin que ce qui était admis à l'époque. En ce début de 20e siècle, on savait que le principe était vrai pour la mécanique, mais on ne savait pas vraiment si le principe s'appliquait aussi à d'autres phénomènes comme l'optique et l'électromagnétisme. Einstein postule que ce principe est vrai pour tous les phénomènes.

Le deuxième postulat vient expliquer pourquoi on ne mesurait pas de différence de vitesse dans l'expérience de Michelson-Morley et pourquoi on obtient toujours la même vitesse de la lumière avec les équations de Maxwell, peu importe la vitesse de l'observateur. Ça peut sembler bizarre que plusieurs observateurs en mouvement les uns par rapport aux autres obtiennent tous la même vitesse quand ils mesurent la vitesse d'un faisceau de lumière. Cela signifie, par exemple, qu'on aurait la situation suivante.



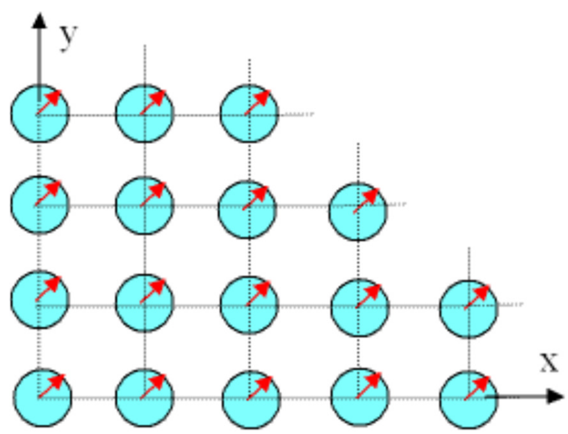
Comme on l'a dit précédemment, ce résultat est en contradiction flagrante avec les équations de la relativité de Galilée.

On mentionne souvent que les postulats de la relativité ont signé l'arrêt de mort de l'éther. Ce n'est pas tout à fait exact. Ces postulats faisaient en sorte que l'éther pouvait toujours exister, mais il fallait qu'elle garde exactement les mêmes propriétés quand on passe du point de vue d'un observateur au point de vue d'un autre observateur. Autrement dit, on ne pouvait pas attribuer de vitesse à l'éther. Le concept de vitesse ne pouvait pas s'appliquer à l'éther. Il fallait donc tenter de construire un modèle d'éther dans lequel on ne pouvait pas lui attribuer de vitesse tout en lui donnant des propriétés parfois contradictoires si on voulait expliquer toutes les observations (ce devait être une substance rigide et élastique, qui peut pénétrer la matière sans obstruction, qui n'a pas de masse volumique et qui n'offre aucune résistance quand un objet se déplace…). La tâche était impossible, mais il faut attendre les années 30 avant de voir l'éther disparaitre de la physique.

Examinons maintenant les conséquences de ces deux postulats. Attachez bien votre tuque avec de la broche, elles sont spectaculaires.

8.5 LA RELATIVITÉ DU TEMPS

On va voir maintenant que c'est notre conception du temps qui est la plus modifiée par les postulats d'Einstein. Pour bien comprendre pourquoi, il faut voir comment les observateurs vont noter le temps auquel se produit un évènement.

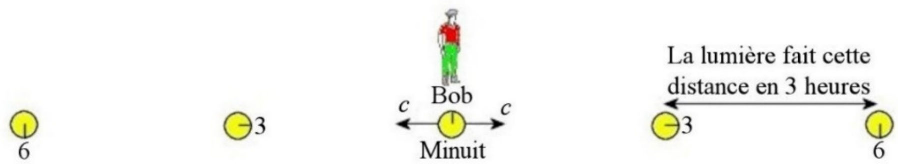


www.pstcc.edu/departments/natural_behavioral_sciences/Web%20Physics/Chapter039.htm

On sait que quand un observateur, disons Bob, voit un évènement, il doit calculer à quel moment s'est produit l'évènement en tenant compte du temps qu'a pris la lumière pour arriver. S'il voit en 2017 une explosion d'étoile et que la lumière de l'explosion a pris 500 ans pour arriver jusqu'à lui, il va déduire que cette explosion s'est véritablement produite en 1517. Pour simplifier cette procédure, on va imaginer que Bob a placé des horloges partout dans l'univers (figure). Quand il se produit un évènement à un endroit, imaginons que l'horloge imprime un petit bout de papier ou envoie un signal indiquant quand s'est produit l'évènement. Notre observateur n'a qu'à ramasser les bouts de papier ou capter les signaux pour connaitre le temps des évènements.

Toutefois, pour que cette solution fonctionne, il faut que les horloges soient toutes synchronisées, qu'elles indiquent toutes la même heure. On peut penser que Bob peut synchroniser ses horloges chez lui et ensuite aller les placer partout dans l'univers, mais on va voir plus tard que cette solution n'est pas bonne. (En déplaçant les horloges, il les change de référentiels et cela pourrait affecter le temps indiqué par l'horloge.) Bob doit donc mettre chaque horloge à sa place avant de les démarrer. Pour les démarrer, il pourra envoyer un signal lumineux qui fera démarrer les horloges quand elles le recevront. On prend un signal lumineux parce qu'on sait, par le deuxième postulat, qu'un tel signal va toujours à la vitesse c.

Mais Bob n'est pas un épais. Il sait que le signal lumineux prendra un certain temps pour se rendre jusqu'à une horloge. S'il met toutes les horloges à minuit et qu'il déclenche son signal à minuit, une horloge qui reçoit ce signal 3 heures plus tard va démarrer quand il sera 3 h et elle sera donc en retard de trois heures sur son horloge centrale. Pour compenser cela, Bob a pensé à ne pas mettre toutes ses horloges à minuit. Par exemple, l'horloge qui recevra son signal au bout de trois heures a initialement été ajustée à 3 h. Quand Bob envoie son signal à minuit, cette horloge va démarrer quand elle recevra le signal à 3 h. Comme elle indiquait déjà 3 h, elle sera synchronisée avec l'horloge centrale de Bob.

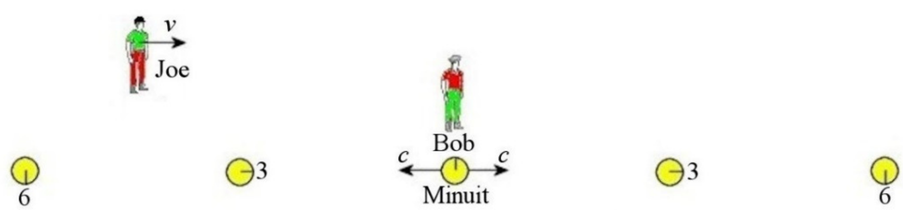


Situation à minuit: départ du signal

Situation à 6 h

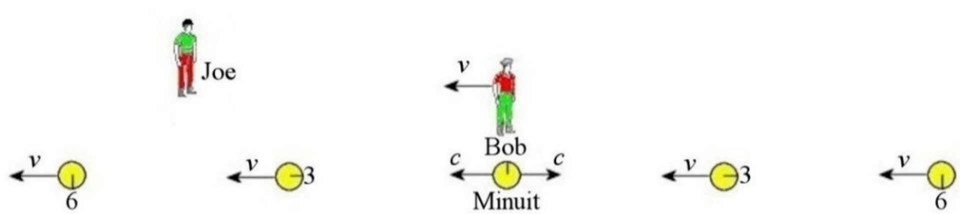
L'animation suivante montre cette synchronisation.
https://www.desmos.com/calculator/zsuj9xzqda?lang=fr

Bravo Bob, toutes tes horloges sont synchronisées. Il y a cependant un problème : regardons ce que ça donne selon un autre observateur (Joe).



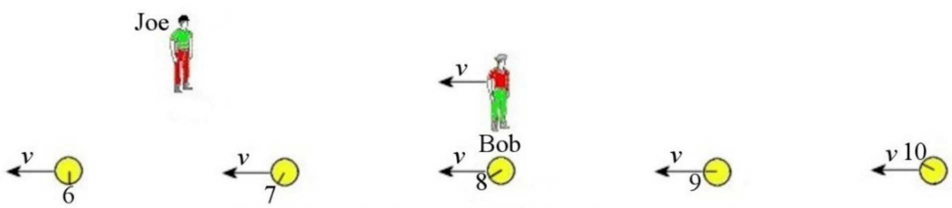
Selon Bob

Joe voit Bob, avec ses horloges, se déplacer vers la gauche à vitesse v.



Selon Joe

Dans cette situation, on n'obtient pas des horloges synchronisées selon Joe. Comme les horloges à gauche de Bob se déplaçant vers la gauche selon Joe, elles fuient le signal lumineux se dirigeant vers elles. Le signal lumineux provenant de l'horloge de Bob ne va cependant pas plus vite, il reste à la vitesse c, car la vitesse de la lumière est la même pour tous les observateurs. Il faudra donc plus de temps pour que les horloges soient déclenchées, car elles fuient le signal, et elles seront démarrées plus tard que si elles étaient immobiles. S'il faut 8 h pour que le signal rattrape l'horloge qui devait démarrer à 6 h, elle sera en retard de 2 h. En fait, selon Joe, plus les horloges de gauche sont loin de Bob, plus elles sont en retard. Pour les horloges de droite, c'est l'inverse qui se produit : elles seront démarrées trop tôt. Ces horloges se dirigent vers le signal lumineux et elles vont donc rencontrer ce signal plus tôt que si elles étaient immobiles. S'il a fallu seulement 4 h pour que le signal arrive à l'horloge qui devait être déclenchée à 6 h, elle aura démarré 2 h trop tôt et elle sera donc en avance de 2 h. Les horloges de droite sont donc toutes en avance selon Joe et cette avance est de plus en plus grande à mesure qu'on s'éloigne de Bob. Le résultat de la synchronisation, selon Joe, est donc



Résultat de la synchronisation selon Joe

En conclusion, les horloges de Bob ne sont pas synchronisées selon Joe, alors qu'elles le sont selon Bob ! Joe va dire à Bob qu'il n'a pas tenu compte du fait que lui et ses horloges se déplacent quand il a fait la synchronisation. Mais Bob va dire, et c'est très correct, que ce n'est pas lui qui se déplace, mais que c'est Joe et que sa synchronisation est parfaite. Le problème est même plus important que ça parce que Joe doit aussi mettre ses horloges partout dans l'univers, et ces horloges vont à la même vitesse que Joe. Il les synchronise de la même façon et, par le même raisonnement, on se rend compte que les horloges de Joe sont synchronisées selon Joe, mais ne le sont pas selon Bob.

Qui a raison ? Les horloges sont-elles synchronisées oui ou non ? En fait, tout le monde a raison. C'est qu'avec la relativité, le temps auquel s'est produit un évènement change selon les observateurs. Quand les observateurs vont voir la même explosion, chacun va calculer quand s'est véritablement produite l'explosion en tenant compte du temps qu'a pris la lumière pour arriver. Ils vont alors arriver à des conclusions différentes. Par exemple, Bob va déduire que l'évènement s'est produit en 1955 et Joe va déduire qu'il s'est produit en 1969 ! Pour le prouver, chacun pourra fournir l'information fournie par l'horloge qu'il a installée à l'endroit où s'est produit l'évènement. Bob aura son papier indiquant 1955 et Joe aura son papier indiquant 1969. Le plus mongol dans cela, c'est que les deux ont raison. Le moment auquel se produit un évènement dépend de l'observateur.

Le temps en relativité

Dès qu'un observateur est en mouvement par rapport à un autre, les moments auxquels se produisent les évènements ne sont pas les mêmes selon ces deux observateurs.

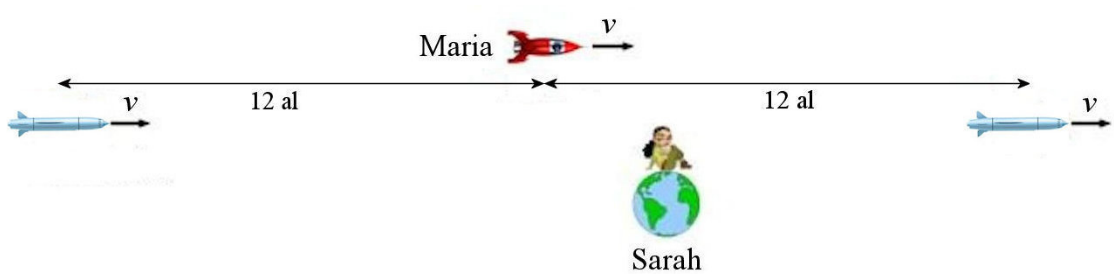
Bien sûr, Joe pourra toujours dire que l'information fournie par l'horloge de Bob n'est pas bonne, car les horloges de Bob ne sont pas synchronisées selon Joe. Mais Bob va répliquer que ses horloges sont parfaitement synchronisées et que c'est plutôt l'information de l'horloge de Joe qui ne vaut pas de la marde puisque les horloges de Joe ne sont pas synchronisées selon Bob…Joe répondra que ses horloges sont parfaitement synchronisées et que l'information est valide. Et ils ont tous les deux raison !

Déjà, vous pouvez voir que la relativité d'Einstein va secouer un peu votre conception du temps. Il n'y a plus de temps absolu comme c'était le cas avec la physique de Newton et la relativité de Galilée. Dans les théories de Newton et Galilée, quand un évènement se produit en 1929, il se produit en 1929 pour tous les observateurs. C'est ce qu'on veut dire par *temps absolu* : tout le monde obtient la même valeur. Avec la relativité d'Einstein, l'évènement se produit à des moments différents pour chaque repère et le temps dépend de la vitesse de l'observateur. Le temps devient donc relatif.

8.6 LA SIMULTANÉITÉ

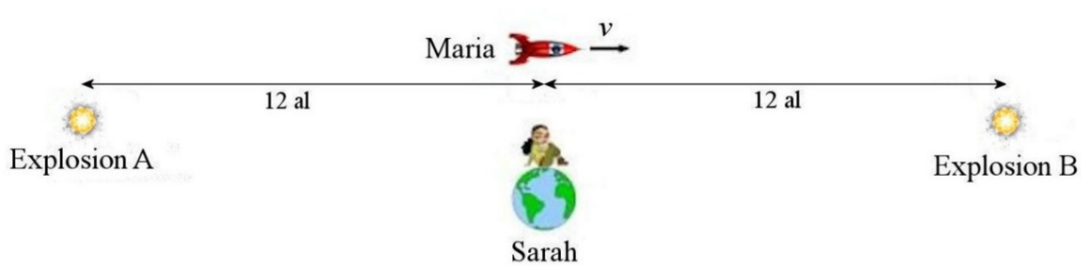
Pour illustrer une fois de plus comment change la notion de temps, explorons cette situation où un observateur voit deux explosions simultanément.

Sarah est sur Terre pendant que Maria est dans un vaisseau qui va très vite. Sarah observe qu'il y a deux missiles qui se déplacent aussi à vitesse v vers la droite et que Maria est à mi-chemin entre les missiles, à 12 al de chaque missile.



www.how-to-draw-cartoons-online.com/cartoon-earth.html et fr.depositphotos.com/6046354/stock-photo-Spaceship.html et www.canstockphoto.ca/flying-cruise-missiles-20039121.html

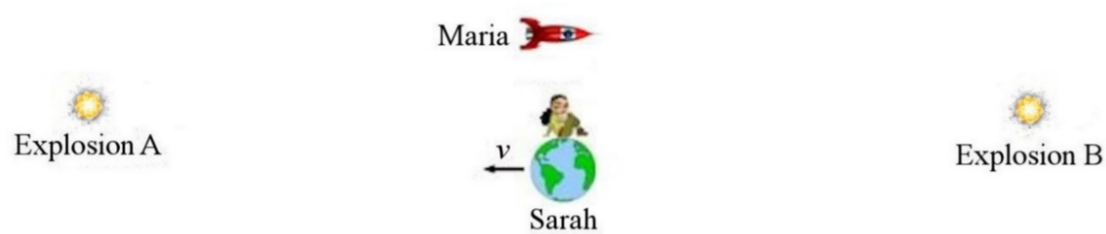
Juste au moment où Maria passe à côté de la Terre, les missiles explosent. On va supposer que leurs calendriers indiquent tous les deux 2016 quand elles se croisent.



Comme Sarah est à égale distance de chaque explosion (12 années-lumière), la lumière de chaque explosion prendra le même temps pour arriver aux yeux de Sarah (12 ans) et elle va les voir simultanément (en 2028).

Sachant cela, Sarah peut déduire ce que verra Maria. Si les deux explosions se sont produites en même temps, la lumière part des deux explosions en même temps. Toutefois, il faudra plus de temps pour que la lumière de l'explosion A arrive à Maria, car la lumière de cette explosion et Maria vont vers la droite. La lumière doit donc rattraper Maria, et il faudra plus de temps pour que la lumière de l'explosion A arrive à Maria que pour qu'elle arrive à la Terre. C'est le contraire qui se passe avec l'explosion B. La lumière de l'explosion B, qui va vers la gauche, et Maria va vers la droite. Maria va donc à la rencontre de ce faisceau et il faudra moins de temps pour que la lumière de l'explosion B arrive à Maria que pour qu'elle arrive à la Terre. Maria va donc voir l'explosion B en premier pour ensuite voir l'explosion A. Jusqu'ici, pas de problème. Il est possible qu'on ne voie pas les évènements en même temps, même s'ils se sont produits en même temps, ça dépend du temps que prend la lumière pour arriver jusqu'à l'observateur.

Si, selon Sarah, Maria a vu l'explosion B avant l'explosion A, c'est certain que c'est ce que Maria va voir. Ce fait ne peut pas être relatif à l'observateur. Le problème vient de ce que Maria va déduire de cette information. Prenons le point de vue de Maria dans cette situation.



Dans le repère de Maria, le vaisseau est arrêté et c'est la Terre qui va vers la gauche. Sachant que Maria est à mi-chemin des explosions, on en déduit que la lumière des deux explosions prend exactement le même temps pour arriver à Maria. Mais comme elle a vu l'explosion B avant l'explosion A, elle va donc déduire que l'explosion B s'est bel et bien produite avant l'explosion A. Si la vitesse de Sarah selon Maria est de 0,6*c*, les calculs montrent que l'explosion B s'est produite en 2007 et l'explosion A en 2025 selon Maria. (On fera ce calcul plus tard dans le chapitre.)

Ainsi, les deux explosions se sont produites en même temps (2016) selon Sarah, alors que l'explosion B (en 2007) s'est produite avant l'explosion A (2025) selon Maria. Le film suivant illustre une situation similaire, mais avec un train.
http://www.youtube.com/watch?v=wteiuxyqtoM

Qui a donc raison ? Est-ce que les explosions se sont produites simultanément en 2016 comme l'affirme Sarah ou en 2007 (explosion B) et 2025 (explosion A) comme l'affirme Maria ? Les deux ont raison. Dans le repère de Sarah, les deux évènements sont simultanés et dans le repère de Maria, l'explosion B s'est produite avant l'explosion A. Chacun pourrait d'ailleurs fournir les petits morceaux de papier de ses horloges pour montrer qu'il a raison. Sarah aurait deux papiers indiquant 2016, alors que Maria aurait un papier montrant 2007 et un autre montrant 2025. Bien sûr, elles vont toutes les deux dire que les horloges de l'autre ne sont pas synchronisées et que les papiers de l'autre ne signifient donc rien. Reste que les horloges de Sarah sont parfaitement synchronisées selon Sarah et les horloges de Maria sont parfaitement synchronisées selon Maria et ces papiers indiquent véritablement le moment auquel s'est produite chaque explosion selon chaque observateur.

C'est le même phénomène qui revient ici : le moment auquel se produit un évènement devient relatif à l'observateur. Ici, cela a fait que deux évènements étaient simultanés selon Sarah et que les deux évènements ne l'étaient pas selon Maria. Même si cela n'est qu'un exemple, on peut tirer la conclusion suivante (on le prouvera formellement plus tard).

La simultanéité

Si deux évènements sont simultanés pour un observateur A, ils ne le sont pas pour tous les observateurs en mouvement par rapport à l'observateur A.

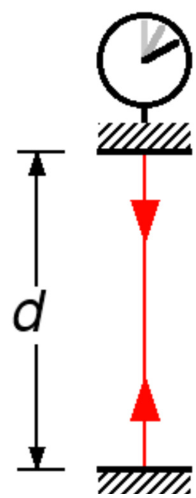
Une conclusion qu'avait pressentie Henri Poincaré en 1898. (Il fut tout près de devancer Einstein dans la découverte de la relativité.)

8.7 LA DILATATION DU TEMPS

La formule

On va maintenant montrer que le rythme auquel le temps s'écoule est aussi relatif à l'observateur. Pour illustrer le tout, on utilise une horloge un peu particulière. Cette horloge fonctionne avec un rayon lumineux qui se reflète sur des miroirs. La lumière revient donc frapper le miroir du haut à intervalle régulier, disons 1 milliseconde. Chaque fois que la lumière revient au miroir du haut, elle fait avancer l'horloge de 1 ms.

On utilise cette horloge un peu particulière parce qu'une des seules choses qu'on sait pour l'instant, c'est que la vitesse de la lumière est la même pour tous les observateurs. En prenant une horloge fonctionnant avec de la lumière, on peut facilement savoir ce qui se passe pour les autres observateurs.



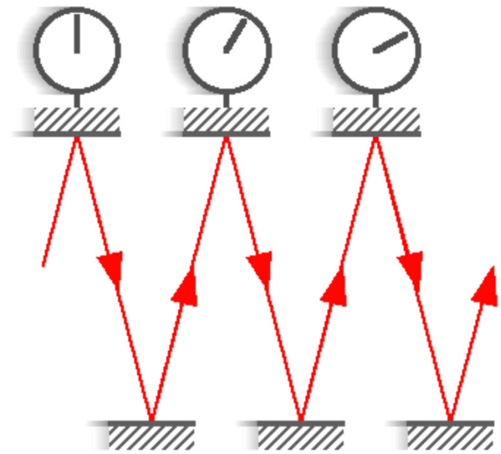
commons.wikimedia.org/wiki/File:Light-clock.png

Le temps nécessaire pour que la lumière fasse un aller-retour dans cette horloge, quand elle est au repos, est

$$\Delta t_0 = \frac{2d}{c}$$

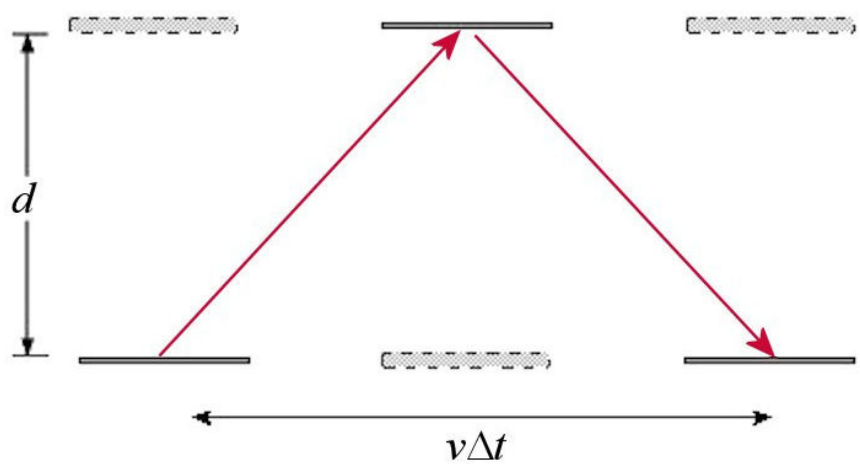
Cependant, le temps pour faire l'aller-retour sera différent si l'horloge est en mouvement.

On peut comprendre assez rapidement que cette horloge va aller au ralenti si elle se déplace. Dans ce cas, la trajectoire de la lumière est illustrée par la figure de droite. La distance entre les miroirs est restée la même, mais la lumière fait maintenant une trajectoire en zigzag. Chacun de ces mouvements en diagonal est plus long que la distance entre le miroir et il faudra donc plus de temps pour passer d'un miroir à l'autre puisqu'on doit faire une plus grande distance avec une vitesse identique.



commons.wikimedia.org/wiki/File:Light-clock.png

Calculons le temps qu'il faut pour que la lumière fasse un aller-retour selon un observateur qui voit l'horloge se déplacer.



www.astro.cornell.edu/academics/courses/astro201/time_dilation.htm

Disons que la lumière prend un temps Δt pour faire un aller-retour selon cet observateur. Durant ce temps, l'horloge a avancé d'une distance $v\Delta t$. La longueur d'une diagonale (hypoténuse) est donc

$$\sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}$$

Le temps nécessaire pour faire l'aller-retour est donc

$$\Delta t = \frac{2 \times hypoténuse}{c}$$

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}}{c}$$

Reste à isoler Δt dans cette équation. On arrive rapidement à

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2$$

Comme

$$\Delta t_0 = \frac{2d}{c}$$

on a

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2$$

$$\Delta t^2 = \Delta t_0^2 + \frac{v^2}{c^2}\Delta t^2$$

$$\Delta t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \Delta t_0^2$$

Ce qui nous donne

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Cette racine revient souvent en relativité et ils se sont tannés de l'écrire. Ils ont donc inventé ceci.

Facteur γ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

On a donc

La dilatation du temps

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(v est la vitesse relative entre les observateurs.)

Notez que valeur de γ augmente avec la vitesse, passant de 1 (quand $v = 0$) à ∞ (quand $v = c$).

Cette formule fut obtenue pour la première fois par Einstein en 1905. Elle prédit que les horloges en mouvement avancent moins vite que les horloges au repos, et donc que le temps s'écoule moins rapidement quand on se déplace à de grandes vitesses !

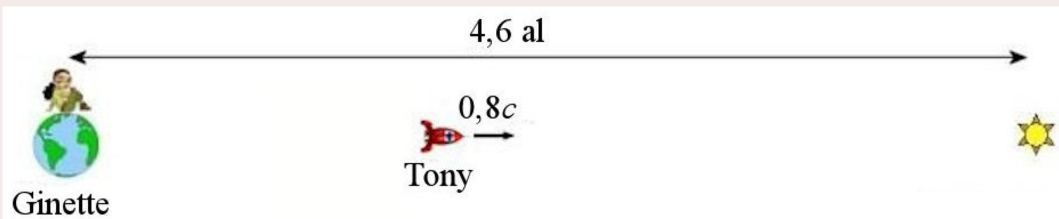
En fait, tout ce qui change en fonction du temps est une horloge. Les humains qui vieillissent sont comme des horloges. Si les horloges en mouvement vont moins vite, cela veut dire qu'on vieillit moins vite quand on est en mouvement que quand on reste au repos.

Voici le tout illustré par un film.
http://www.youtube.com/watch?v=KHjpBjgIMVk

Allons-y maintenant avec un petit exemple.

Exemple 8.7.1

Ginette reste sur Terre pendant que Tony va vers une étoile située à 4,6 années-lumière de la Terre. La vitesse du vaisseau de Tony est de 80 % de la vitesse de la lumière.



a) Quelle est la durée du voyage selon Ginette ?

La durée du voyage selon Ginette est

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}} \\ &= \frac{4,6al}{0,8c} \\ &= \frac{4,6ans\cdot c}{0,8c} \\ &= \frac{4,6ans}{0,8} \\ &= 5,75ans\end{aligned}$$

(Remarquez ce truc pour les distances en années-lumière : 4,6 al = 4,6 ans $\cdot c$. Ça simplifie parfois beaucoup les calculs.)

b) Quelle est la durée du voyage selon Tony ?

Le temps mesuré dans le vaisseau est Δt_0 (voir explication plus loin). On a donc

$$\begin{aligned}\Delta t_0 &= \Delta t\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}} \\ &= 5,75ans\cdot\sqrt{1-\tfrac{(0,8c)^2}{c^2}}\end{aligned}$$

$$= 5{,}75ans \cdot \sqrt{1 - 0{,}8^2}$$
$$= 3{,}45ans$$

Surprenant non ? L'effet est encore plus spectaculaire si on augmente la vitesse à 99,9 % de la vitesse de la lumière. Le temps selon Ginette est alors 4,605 ans et le temps selon Tony est 0,206 an, soit environ 2 mois et demi. Si Tony fait l'aller-retour et revient sur Terre, il se sera écoulé 9,21 ans sur Terre, alors que pour Tony, il ne se sera écoulé qu'un peu moins de 5 mois. Ginette aura vieilli de 9,21 ans alors que Tony n'aura vieilli que de 5 mois.

Poussons encore plus loin avec un exemple plus sophistiqué. Supposons que Tony va au centre de galaxie (26 000 années-lumière) en vaisseau. Pour y aller, il accélère à 9,8 m/s² pendant la moitié du trajet puis décélère à 9,8 m/s² pendant l'autre moitié du trajet. Ces accélérations permettent à Tony d'avoir un poids apparent dans le vaisseau identique à son poids sur Terre. Une fois rendu au centre de la galaxie, Tony revient sur Terre. Des calculs (plus complexes que ceux faits dans l'exemple, car la vitesse change constamment) montrent que la durée de ce voyage pour Ginette est de 52 004 ans alors qu'elle est de 39,6 ans pour Tony ! Un astronaute peut donc faire ce voyage pendant sa vie. Quand Tony revient sur Terre, il a vieilli de près de 40 ans, mais il ne reconnait pas beaucoup de monde puisque 52 004 ans se sont écoulés sur Terre. Pas sûr qu'il y a même quelqu'un qui va se rappeler qu'il était parti. Peut-être même que les singes auront pris le contrôle de la Terre à ce moment…
(Pour voir comment on a fait ce calcul, voyez ce document :
http://physique.merici.ca/ondes/dilatation.pdf)

Est-ce prouvé ?

Est-ce que cet effet est prouvé ou est-ce une pure fantaisie de physiciens ? Il existe en fait de nombreuses preuves expérimentales que cet effet est réel. Aucune n'implique d'envoyer des astronautes dans de tels voyages, car on est loin de pouvoir atteindre des vitesses assez grandes pour les réaliser. Toutefois, en 1971, on a mis une horloge atomique dans un avion et on lui a fait faire un petit tour pendant qu'une autre restait au sol. On avait préalablement synchronisé les deux horloges et quand celle de l'avion est revenue, elle était légèrement en retard (de 214 ns) sur celle restée au sol. L'écart entre les deux était exactement celui prévu par la relativité.
http://www.youtube.com/watch?v=gdRmCqylsME

Même si on ne peut envoyer d'astronautes à des vitesses proches de la vitesse de la lumière, on peut donner de telles vitesses à de petites particules. C'est ce que font les accélérateurs de particules. Dans ces accélérateurs, les particules peuvent aller pratiquement à la vitesse de la lumière. Or, certaines particules ont une durée de vie limitée. Par exemple, les muons ont une durée de vie moyenne de 2,2 µs quand ils sont repos. (Les muons ressemblent beaucoup aux électrons, mais ils sont 207 fois plus massifs.) Quand les muons se déplacent à de grandes vitesses, on remarque qu'ils vivent beaucoup plus longtemps. C'est ce que prévoit la relativité : en se déplaçant, ils vieillissent moins vite et vivent donc plus longtemps pour un observateur qui voit les particules se déplacer. L'allongement de la vie des muons est exactement celui prévu par la formule de dilatation du temps.

Les muons donnèrent d'ailleurs une des premières preuves de la relativité. Quand les rayons cosmiques frappent l'atmosphère, ils créent, entre autres, des muons se déplaçant à de très grandes vitesses. Même si les muons allaient à la vitesse de la lumière, ils ne feraient que 660 m en 2,2 µs. Toutefois, ces muons se forment à quelques dizaines de kilomètres d'altitude et atteignent quand même la surface de la Terre. Ce qui leur permet d'arriver au sol est l'allongement de leur durée de vie due à la dilatation du temps. La quantité de muons arrivant au sol est exactement celle prévue par la théorie de la relativité.

On pourrait penser que la relativité ne joue aucun rôle dans notre vie quotidienne et on ne serait pas loin de la vérité. Sachez cependant que les horloges placées dans les satellites ne vont pas au même rythme que celles qui sont sur Terre si on les place une à côté de l'autre. Une fois placées en orbite, elles vont au même rythme que celle sur Terre avec les effets relativistes. Si les ingénieurs n'avaient pas tenu compte des effets relativistes lors de la conception des satellites, les horloges des satellites auraient lentement décalé par rapport aux horloges sur Terre, ce qui aurait entrainé des erreurs de calcul. Par exemple, il y a des horloges dans les satellites pour les GPS. Si on n'avait pas tenu compte des effets relativistes, les données des GPS pourraient être faussées de 5 km, même si on resynchronise les horloges des satellites toutes les 12 heures.

Quel observateur mesure Δt_0?

Dans les calculs de l'exemple précédent, on a dit que c'est Tony qui mesure Δt_0, qu'on appelle le *temps propre.* Pourquoi est-ce Tony ?

De façon correcte, le temps propre est

Temps propre Δt_0

Le temps propre est le temps entre deux évènements selon l'observateur qui observe les deux évènements au même endroit.

Dans la plupart des cas, cela revient à dire que c'est le temps entre les évènements selon l'observateur qui est présent aux deux évènements. Dans notre exemple, Ginette n'est pas présente aux deux évènements qui marquent le début du voyage (départ) et la fin du voyage (l'arrivée). Elle est présente au départ, mais pas à l'arrivée. C'est Tony qui est présent au départ et à l'arrivée et c'est donc lui qui mesure le temps propre.

C'est peut-être un peu moins évident si on prend la vraie définition du temps propre. C'est évident que Ginette n'observe pas les évènements au même endroit : le départ est près de la Terre et l'arrivée est près de l'étoile qui est à 4,6 al de la Terre. Ce n'est clairement pas au même endroit. C'est moins évident pour Tony. Pour voir que pour Tony les deux évènements sont au même endroit, il faut se placer dans le référentiel de Tony. Selon Tony, il est au repos, la Terre s'éloigne et l'étoile se dirige vers lui.

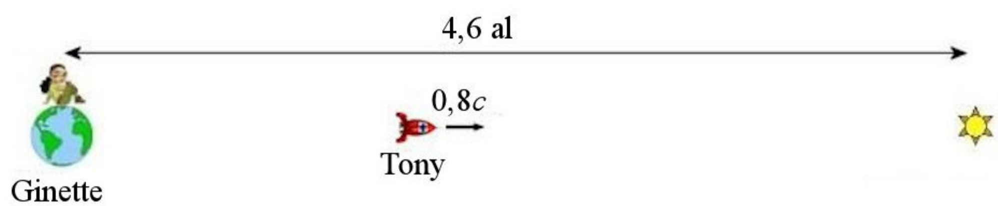
Pour Tony, le départ s'est fait quand la Terre était à côté de son vaisseau et l'arrivée se fait quand l'étoile arrive à côté de son vaisseau. Pour Tony, ces deux évènements sont au même endroit : à côté de son vaisseau. C'est donc lui qui mesure le temps propre.

Erreur fréquente : prendre la formule de dilatation du temps alors qu'aucun des observateurs ne mesure Δt_0

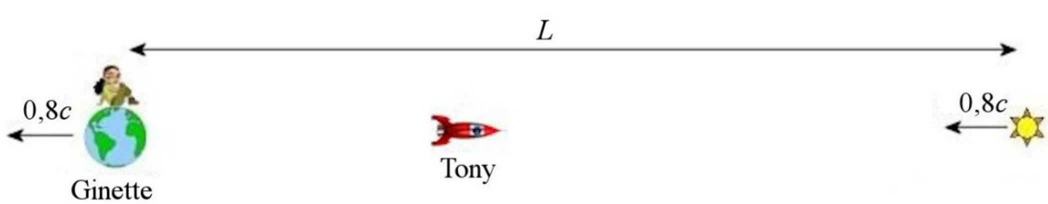
Le temps entre deux évènements n'est pas nécessairement Δt_0 pour un des deux observateurs. Il se peut que les deux évènements ne soient pas à la même place pour aucun des deux observateurs. Dans ce cas, il ne faut pas utiliser la formule de dilatation de temps, mais plutôt utiliser les transformations de Lorentz (que l'on verra plus loin).

8.8 LA CONTRACTION DES LONGUEURS

S'il n'y avait que la dilatation du temps, il y aurait un problème de logique en relativité. Reprenons l'exemple de Ginette et de Tony. Selon Ginette, la situation est la suivante.



On sait que pour cette situation, la durée du voyage est de 5,75 ans pour Ginette et de 3,45 ans pour Tony. Toutefois, examinons ce qu'on obtient dans le référentiel de Tony pour voir ce qui arrive selon ce dernier.



Dans ce repère, Tony est immobile et c'est l'étoile qui se dirige vers lui. Mais si l'étoile est à 4,6 al et qu'elle se dirige vers Tony à 0,8c, elle arrivera au bout de

$$\text{temps} = \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}}$$
$$t = \frac{4,6a \cdot c}{0,8c}$$
$$t = 5,75ans$$

Mais elle est censée arriver en 3,45 ans. Pour pouvoir arriver à cette valeur, il n'y a qu'une seule solution : l'étoile était plus près que 4,6 al selon Tony. Pour qu'elle arrive en 3,45 ans, elle devait être initialement à une distance de

$$\begin{aligned} L &= v\Delta t_0 \\ &= 0,8c \cdot 3,45ans \\ &= 2,76al \end{aligned}$$

Ainsi, la distance entre la Terre et l'étoile est de 4,6 al selon Ginette, mais seulement de 2,76 al selon Tony. C'est ce qu'on appelle la contraction des longueurs.

On va appeler L_0 la distance entre deux objets au repos. Cette variable peut aussi représenter la longueur d'un objet au repos, car la longueur d'un objet au repos est la distance entre les deux bouts. Elle porte le nom de *longueur propre*.

On va appeler L la distance entre deux objets en mouvement (à la même vitesse). Cette variable peut aussi représenter la longueur d'un objet en mouvement.

On trouve facilement la formule de la contraction des longueurs en refaisant le raisonnement fait avec l'exemple de Tony et Ginette. Selon Ginette, la vitesse de Tony est

$$v = \frac{L_0}{\Delta t}$$

Selon Tony, la vitesse de l'étoile (qui est égale à la vitesse de Ginette) est

$$v = \frac{L}{\Delta t_0}$$

Comme la vitesse de Tony selon Ginette est la même que celle de Ginette selon Tony, on a

$$\frac{L_0}{\Delta t} = \frac{L}{\Delta t_0}$$
$$L = L_0 \frac{\Delta t_0}{\Delta t}$$
$$L = L_0 \frac{\Delta t_0}{\Delta t_0 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ce qui nous donne

Contraction des longueurs

$$L = L_0\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}} = \frac{L_0}{\gamma}$$

(v est la vitesse relative entre les observateurs.)

Formule obtenue par FitzGerald en 1889 et, indépendamment, par Lorentz en 1892. (Ils tentaient alors d'expliquer les résultats de l'expérience de Michelson-Moreley.) On appelle donc souvent cette contraction la *contraction de FitzGerald-Lorentz*.

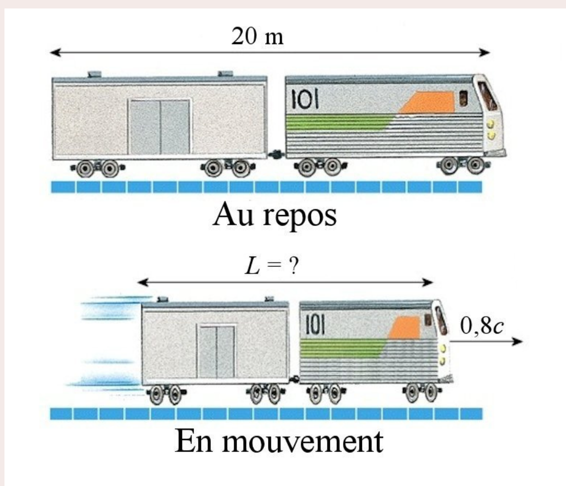
Vérifions si la formule fonctionne. Pour Tony, la distance entre la Terre et l'étoile est

$$\begin{aligned} L &= L_0\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}} \\ &= 4,6al\cdot\sqrt{1-\frac{(0,8c)^2}{c^2}} \\ &= 4,6al\cdot\sqrt{1-(0,8)^2} \\ &= 2,76al \end{aligned}$$

Bingo, ça marche.

Exemple 8.8.1

Un train a une longueur de 20 m au repos. Quelle est sa longueur s'il se déplace à une vitesse de 0,8c ?



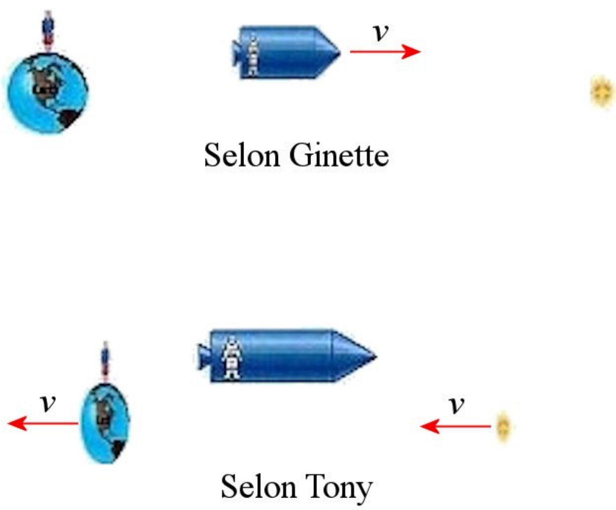
www.zamandayolculuk.com/cetinbal/htmldosya1/SpecialTheory.htm

La longueur est

$$\begin{aligned} L &= L_0\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}} \\ &= 20m\cdot\sqrt{1-\frac{(0,8c)^2}{c^2}} \\ &= 20m\cdot\sqrt{1-(0,8)^2} \\ &= 12m \end{aligned}$$

Seule la dimension dans la direction de la vitesse est contractée. Les dimensions perpendiculaires à la vitesse restent identiques. Ici, le train a la même hauteur au repos et en mouvement. Seule la longueur du train a changé.

Les passagers du train ne vont pas se sentir contractés. Pour illustrer cette idée, reprenons l'exemple de Ginette et Tony. Dans le référentiel de Ginette, le vaisseau de Tony se déplace et le vaisseau est moins long qu'au repos. Par contre, la Terre, Ginette et l'étoile sont au repos dans ce référentiel et ne sont donc pas contractées.



kspark.kaist.ac.kr/Twin%20Paradox/Relativity%20Facts.htm

Dans le référentiel de Tony, le vaisseau et Tony sont au repos et ne sont donc pas contractés. Pour Tony, c'est la Terre, Ginette et l'étoile qui se déplacent et qui sont contractées.

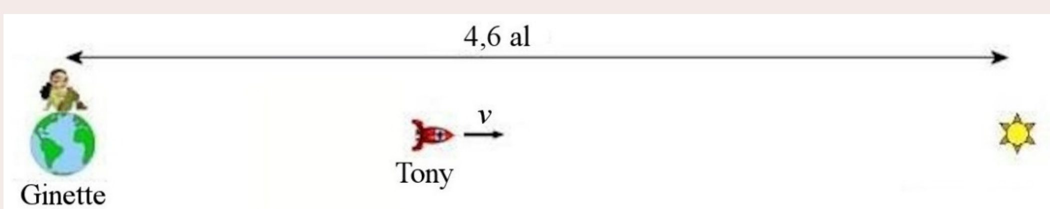
Ainsi, personne ne se voit contracté puisque chaque observateur est au repos dans son référentiel. Tous les observateurs observent que ce sont les autres observateurs qui sont contractés. C'est aussi ce qui se produit avec la dilatation du temps : tous les observateurs se voient eux-mêmes au repos et le temps s'écoule normalement pour eux. Tous les observateurs observent que le temps s'écoule plus lentement pour les autres observateurs.

Exemple 8.8.2

Tony veut faire un voyage de la Terre jusqu'à une étoile située à 4,6 al selon les observateurs sur Terre. Quel doit être la vitesse de Tony pour que le voyage dure 1 an selon Tony ?

On peut arriver à l'équation à résoudre en prenant le point de vue de Tony ou de Ginette (qui est sur Terre).

Selon le point de vue de Ginette, on a la situation suivante.



Le temps du voyage selon Ginette est

$$\Delta t = \frac{L_0}{v}$$

Ginette peut ensuite calculer le temps selon Tony avec

$$\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$
$$= \frac{L_0}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

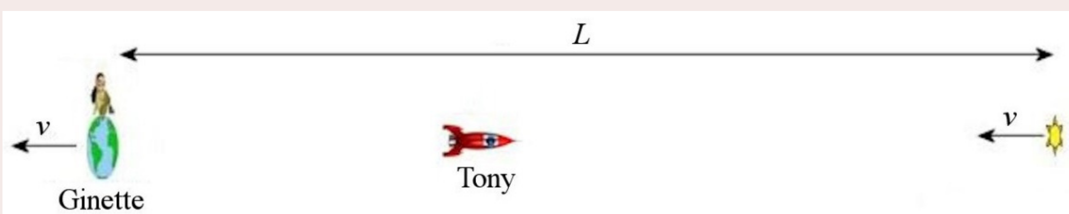
Si on veut que le voyage dure un an, on doit donc résoudre l'équation

$$1a = \frac{4,6a\cdot c}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Ce qui donne

$$\frac{1}{4,6} = \frac{c}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$
$$\left(\frac{1}{4,6}\right)^2 = \frac{c^2}{v^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$
$$\left(\frac{1}{4,6}\right)^2 = \frac{c^2}{v^2}-1$$
$$\frac{1}{4,6^2}+1 = \frac{c^2}{v^2}$$
$$\frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4,6^2}}} = 0,97718$$

La vitesse doit donc être de 97,718 % de la vitesse de la lumière. Remarquez qu'on obtient la même équation à résoudre en prenant le point de vue de Tony. On aurait alors la situation suivante.



Selon Tony, le temps qu'il faut pour que l'étoile arrive au vaisseau est de

$$\Delta t_0 = \frac{L}{v}$$

On trouve L avec la formule de contraction des longueurs. On a alors

$$\Delta t_0 = \frac{L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v}$$

Si on veut que le voyage dure 1 an, on doit donc résoudre

$$1a = \frac{4,6a \cdot c \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v}$$

C'est la même équation que celle obtenue en prenant le point de vue de Ginette.

Les effets à basse vitesse

Dans notre vie quotidienne, il est plutôt rare qu'on doive tenir compte de la dilatation du temps ou de la contraction des longueurs. Sachez cependant que pour de faibles vitesses, les approximations suivantes permettent de faire des calculs plus facilement.

Approximations du facteur γ si $v << c$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2} + \dots$$

Exemple 8.8.3

Pimprenelle reste à Québec pendant qu'Amarante va à Montréal (distance = 250 km) en train à grande vitesse se déplaçant à 250 km/h.

a) Quelle est la différence entre les temps que dure le voyage selon Pimprenelle et Amarante ?

La durée du voyage selon Pimprenelle est

$$\Delta t = \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}} = \frac{250km}{250\frac{km}{h}} = 1h = 3600s$$

Le temps mesuré par Amarante est

$$\begin{aligned}\Delta t_0 &= \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ &= 3600s \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\end{aligned}$$

Si on calcule cette valeur avec une calculatrice, on obtient aussi 3600 s, car la vitesse est trop petite et la réponse est à peine plus petite que 3600 s. Pour bien voir la différence de temps, on va utiliser une approximation.

$$
\begin{aligned}
\acute{e}cart &= \Delta t - \Delta t_0 \\
&= 3600s - 3600s \cdot \sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}} \\
&= 3600s - 3600s \cdot \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} + \ldots\right) \\
&= 3600s \cdot \frac{v^2}{2c^2} + \ldots \\
&= 3600s \cdot \frac{\left(69,44\,\tfrac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot \left(3 \times 10^8\,\tfrac{m}{s}\right)^2} + \ldots \\
&\approx 9,645 \times 10^{-11} s
\end{aligned}
$$

La montre d'Amarante est donc en retard de seulement 9,645 x 10^{-11} s sur la montre de Pimprenelle après le voyage à Montréal. On voit que l'effet n'est pas très important quand on est loin de la vitesse de la lumière. Une personne qui voyage en avion pendant 100 ans vivrait seulement 1,5 ms plus longtemps selon une personne restée sur Terre que s'il était resté au repos.

b) Quelle est la différence entre la distance entre Montréal et Québec selon Pimprenelle et la distance entre Montréal et Québec selon Amarante ?

La distance selon Pimprenelle est 250 km.

La distance selon Amarante est contractée. Elle est donc

$$L = 250km \cdot \sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}}$$

Si on calcule cette valeur avec une calculatrice, on obtient aussi 250 km, car la vitesse est trop petite et la réponse est à peine plus petite que 250 km. Pour bien voir la différence de distance, on va utiliser une approximation.

$$
\begin{aligned}
\Delta L &= L_0 - L \\
&= 250km - 250km \cdot \sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}} \\
&\approx 250km - 250km \cdot \left(1 - \tfrac{v^2}{2c^2} + \ldots\right) \\
&\approx 250km \cdot \frac{v^2}{2c^2} \\
&\approx 250km \cdot \frac{\left(69,44\,\tfrac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot \left(3 \times 10^8\,\tfrac{m}{s}\right)^2} \\
&\approx 6,69nm
\end{aligned}
$$

La contraction des longueurs fait que la distance entre Montréal et Québec est seulement 6,69 nm plus courte pour Amarante.

8.9 L'EFFET DOPPLER AVEC LA LUMIÈRE (PRISE 2)

La formule

L'effet Doppler vu à un chapitre précédent est modifié par la relativité parce que le rythme auquel le temps s'écoule, donc la période de l'onde, est modifié par la vitesse de la source.

1) Effet Doppler classique

La formule de l'effet Doppler était

$$f' = \frac{v - v_o}{v - v_s} f$$

Puisque tous les points de vue sont équivalents, on va toujours se placer dans le repère où l'observateur est immobile et la source se déplace. On aura donc $v_o = 0$. Puisque la vitesse de la lumière est toujours c, on aura $v = c$. Il ne reste donc que

$$f' = \frac{c}{c - v_s} f$$

On laissera tomber l'indice s à la vitesse puisqu'il n'y a plus de possibilité de confusion avec les autres vitesses. La fréquence et la période de l'onde sont donc

$$f' = \frac{c}{c - v} f \qquad \text{et} \qquad T' = \frac{c - v}{c} T$$

2) Dilatation du temps

Toutefois, si la source se déplace, la période est modifiée par rapport à ce qu'on avait quand la source est au repos. On a

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

où T_0 est la période quand la source est au repos.

Effet Doppler relativiste

Si on combine les deux effets, on a

$$T' = \frac{c - v}{c} T$$

$$T' = \frac{c-v}{c}\frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Ce qui donne

$$T' = T_0 \frac{c-v}{\sqrt{c^2-v^2}}$$
$$T' = T_0 \frac{c-v}{\sqrt{(c-v)(c+v)}}$$
$$T' = T_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

Les changements de période et de fréquence sont donc

Effet Doppler relativiste

$$T' = T_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$
$$f' = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

(v est la vitesse de déplacement de la source pour un observateur immobile.)

Nous avons toujours notre convention de signe pour la vitesse. Le sens positif va de la source vers l'observateur. Ainsi, la vitesse de la source est positive si elle se dirige vers l'observateur et négative si elle s'éloigne de l'observateur.

Rappelez-vous qu'il faut toujours prendre le point de vue de l'observateur (observateur au repos et source en mouvement) pour appliquer cette équation.

Exemple 8.9.1

Une source au repos émet de la lumière avec une longueur d'onde de 600 nm (orange). Quelle est la longueur d'onde perçue par un observateur qui voit cette source se diriger vers lui à 30 % de la vitesse de la lumière ?

La fréquence de cette onde quand la source est au repos est de

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{c}{\lambda_0} \\ &= \frac{3\times 10^8 \frac{m}{s}}{600\times 10^{-9} m} \\ &= 5\times 10^{14} Hz \end{aligned}$$

La fréquence perçue par l'observateur est donc

$$\begin{aligned} f' &= f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \\ &= 5\times10^{14}\,Hz\cdot\sqrt{\frac{c+0,3c}{c-0,3c}} \\ &= 5\times10^{14}\,Hz\cdot\sqrt{\frac{1,3}{0,7}} \\ &= 6,814\times10^{14}\,Hz \end{aligned}$$

La longueur d'onde est donc

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{c}{f'} \\ &= \frac{3\times10^{8}\,\frac{m}{s}}{6,814\times10^{14}\,Hz} \\ &= 440,3nm \end{aligned}$$

La source émettait une lumière plutôt orangée. Elle est perçue comme étant mauve par l'observateur qui voit la source se diriger vers lui à 0,3c.

Ce que voient les observateurs

La formule de l'effet Doppler nous permet de calculer ce qui est **vu** par un observateur.

Prenons un exemple pour illustrer.

On sait déjà que le temps s'écoule plus lentement pour Naomie selon Ophélie à cause de la dilatation du temps. Cela est le résultat des **observations** d'Ophélie. Ophélie peut calculer que quand il se passe une seconde dans le vaisseau, il s'écoule que 1,25 seconde sur Terre.

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{1s}{\sqrt{1-(0,6)^2}} \\ &= 1,25s \end{aligned}$$

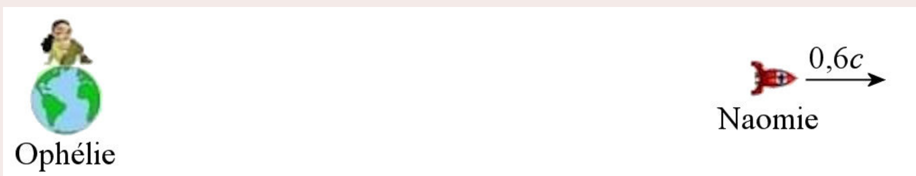
Toutefois, si le vaisseau de Naomie émet un flash de lumière chaque seconde, cela ne veut pas dire que Ophélie va voir un flash chaque 1,25 seconde parce qu'il faut alors aussi prendre en compte le temps que prend la lumière de chaque flash pour arriver.

Or, c'est exactement ce que fait la formule de l'effet Doppler. Elle tient compte de la dilatation du temps et du temps pris par l'onde pour arriver à l'observateur. Ainsi, le temps entre les flashs **vus** par Ophélie est

$$T' = T_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

Exemple 8.9.2

Dans le vaisseau de Naomie, il y a une horloge qui émet un éclair lumineux chaque fois qu'elle avance de 1 seconde. Quel est le temps entre les éclairs **vus** par Ophélie si Naomie s'éloigne de la Terre à 0,6*c* ?



Le temps entre les éclairs est

$$\begin{aligned} T' &= T_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \\ &= 1s\cdot\sqrt{\frac{c-(-0,6c)}{c+(-0,6c)}} \\ &= 1s\cdot\sqrt{\frac{1,6}{0,4}} \\ &= 2s \end{aligned}$$

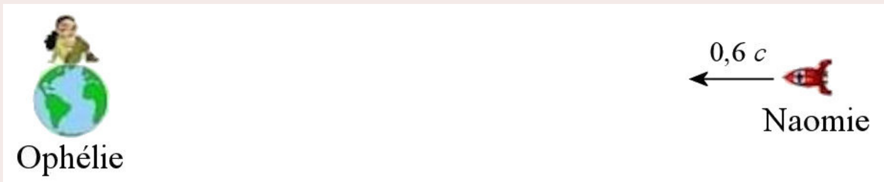
La vitesse est négative, car le sens positif va de la source vers l'observateur donc de Naomie vers Ophélie.

Ophélie va donc voir un éclair toutes les 2 secondes. Voyez la différence entre ce qui est observé et ce qui est vu. Ophélie **voit** les éclairs toutes les 2 secondes, mais elle **observe** que le temps entre les éclairs est de 1,25 s. Il faut plus de temps pour voir les éclairs, car à chaque éclair, le vaisseau est de plus en plus loin et il faudra de plus en plus de temps pour que la lumière arrive, ce qui fait augmenter le temps entre les éclairs. À 0,6*c*, le vaisseau avance, selon Ophélie, de $2,25 \times 10^8$ m entre chaque éclair si ceux-ci se font chaque 1,25 seconde. La lumière de l'éclair suivant doit donc parcourir cette distance de plus avant d'arriver à la Terre, ce qui prend 0,75 seconde. Le temps entre les éclairs tel que vu par Ophélie est donc de 2 secondes (1,25 s + 0,75 s).

On en conclut donc qu'Ophélie **voit** que tout ce qui se passe dans le vaisseau se fait 2 fois plus lentement que ce qui se passe sur Terre, comme un film qui passe au ralenti.

Exemple 8.9.3

Dans le vaisseau de Naomie, il y a une horloge qui émet un éclair lumineux chaque fois qu'elle avance de 1 seconde. Quel est le temps entre les éclairs **vus** par Ophélie si Naomie s'approche de la Terre à 0,6*c* ?



Le temps entre les éclairs est

$$\begin{aligned} T' &= T_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \\ &= 1s\cdot\sqrt{\frac{c-(0,6c)}{c+(0,6c)}} \\ &= 1s\cdot\sqrt{\frac{0,4}{1,6}} \\ &= 0,5s \end{aligned}$$

Elle va donc voir un éclair chaque 0,5 seconde. Ophélie **observe** toujours que les éclairs se font chaque 1,25 seconde comme prévu par la formule de dilatation du temps, mais elle les **voit** chaque 0,5 seconde. Cette fois-ci, le vaisseau s'approche de la Terre, selon Ophélie, de 2,25 x 10^8 m entre chaque éclair si ceux-ci se font chaque 1,25 seconde. La lumière de l'éclair doit donc parcourir cette distance de moins avant d'arriver à la Terre, ce qui aurait pris 0,75 seconde. Le temps entre les éclairs est donc de 0,5 seconde (1,25 s – 0,75 s) pour Ophélie.

On en conclut donc qu'Ophélie **voit** que tout ce qui se passe dans le vaisseau se fait 2 fois plus rapidement que ce qui se passe sur Terre, comme un film en accéléré, et ce, même si le temps s'écoule plus lentement dans le vaisseau !

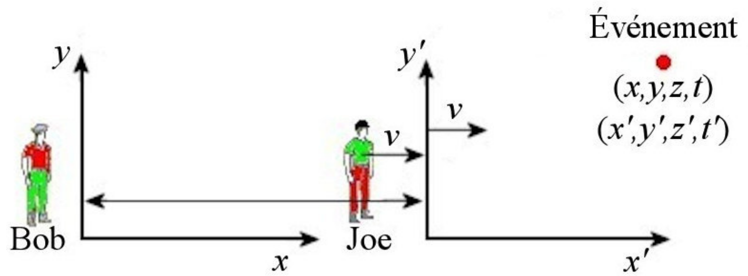
Voici un magnifique vidéo montrant ce qu'on voit si on va près de la vitesse de la lumière.
http://www.youtube.com/watch?v=JQnHTKZBTI4

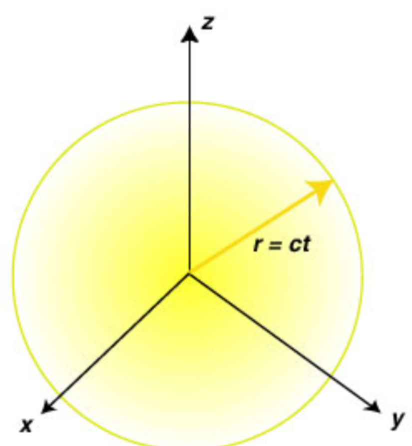
8.10 LES TRANSFORMATIONS DE LORENTZ

On va maintenant faire une approche un peu plus formelle de la relativité en obtenant les lois de transformations d'un observateur à l'autre. Cela nous permettra de refaire très rapidement, mais plus formellement, les formules obtenues précédemment et de pouvoir traiter de cas plus complexes.

Les formules

Quand deux observateurs observent un évènement, chacun note la position et le temps auquel s'est produit l'évènement avec son propre système de coordonnées.





www.zamandayolculuk.com/Cetinbal/HTMLdosya1/RelativityPrinciple.htm

Pour savoir comment passer de l'un à l'autre en respectant le deuxième postulat d'Einstein, on va imaginer qu'il y a eu un flash lumineux se propageant à vitesse c dans toutes les directions. La lumière va donc faire une sphère ayant un rayon qui augmente à la vitesse de la lumière. Comme l'équation d'une sphère est

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

et que le rayon de la sphère augmente à la vitesse de la lumière, l'équation de cette sphère de lumière est, selon Bob,

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$$

Joe voit aussi une sphère lumineuse de plus en plus grande et qui grandit aussi à vitesse c puisque la vitesse de la lumière est la même pour tous. L'équation de la sphère selon Joe est donc

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$$

En prenant les lois de transformation, on doit pouvoir passer de l'équation de la sphère selon Bob à l'équation de la sphère selon Joe. On va tout d'abord montrer que les transformations de Galilée ne permettent pas ce passage.

En partant de l'équation de la sphère selon Joe, on a

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$$
$$(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$$
$$x^2 - 2xvt + v^2t^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$$

De toute évidence, on n'a pas obtenu l'équation de la sphère selon Bob. Par contre, ce résultat peut nous mettre sur la piste des transformations correctes. On se retrouve avec un terme avec x et t (le deuxième terme) qu'on doit éliminer. On va tenter de la faire en posant

$$t' = t + fx$$

où f est une valeur qu'on déterminera pour que le deuxième terme s'annule. Avec ces nouvelles lois de transformation, on a

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$$
$$(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = (c(t + fx))^2$$
$$x^2 - 2xvt + v^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 + 2c^2xft + c^2f^2x^2$$

Le deuxième terme de gauche peut maintenant s'annuler avec le deuxième terme de droite si

$$f = -\frac{v}{c^2}$$

On a alors

$$x^2 - \cancel{2xvt} + v^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 - \cancel{2vxt} + \frac{v^2}{c^2}x^2$$

On n'y est pas encore tout à fait, mais on a

$$x^2 + v^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 + \frac{v^2}{c^2}x^2$$
$$x^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

On voit qu'on serait arrivé si x et t avaient été divisé par $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. On serait alors arrivé à

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

Ce qui est l'équation de la sphère selon Bob. Ainsi, si on résume, les lois de transformations pour x et t sont

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x - vt)$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

Les lois de transformations, appelées les *transformations de Lorentz*, sont donc

Transformations de Lorentz (1)

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad x = \gamma(x' + vt')$$

$$y' = y \qquad y = y'$$

$$z' = z \qquad z = z'$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

(v est la vitesse d'un observateur selon un autre observateur.)

Ces lois de transformations furent obtenues en 1898 par Lorentz et en 1899 par Larmor, mais ils donnèrent une tout autre interprétation aux transformations sur le temps. Poincaré fut près de faire une interprétation correcte en 1904, mais c'est Einstein qui interpréta correctement, en 1905, que les temps des évènements n'étaient pas le même pour les deux observateurs et qu'il n'y avait pas de temps absolu.

Remarquez que si $v \ll c$, on revient aux transformations de Galilée. Ainsi, les résultats obtenus avec les transformations de Galilée sont valides à condition que la vitesse entre les observateurs soit petite par rapport à la vitesse de la lumière.

Ce n'est pas tellement ces lois de transformations qui vont nous intéresser, car les 0 des positions et du temps sont un peu arbitraires. Ce serait mieux si on avait les lois de transformation pour la distance (Δx, Δy, Δz) et le temps (Δt) entre les évènements.

La distance en x et les temps entre 2 évènements sont, selon Bob,

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

La distance entre les évènements selon Joe est

$$\Delta x' = x_2' - x_1'$$

En appliquant les transformations de Lorentz, on a

$$\Delta x' = \gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1)$$

$$\Delta x' = \gamma\big((x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)\big)$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

On obtient une forme identique à ce qu'on avait pour les transformations de Lorentz, mais il y a maintenant des Δ devant les variables. En fait, c'est ce qui se passe dans tous les cas. Les transformations sont donc

Transformations de Lorentz (2)

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \qquad \Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$$
$$\Delta y' = \Delta y \qquad \Delta y = \Delta y'$$
$$\Delta z' = \Delta z \qquad \Delta z = \Delta z'$$
$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) \qquad \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)$$

(v est la vitesse d'un observateur selon un autre observateur.)

Cette forme est un peu plus utile, car elle ne dépend pas des origines des coordonnées et du temps qui sont arbitraires.

Avant d'utiliser ces transformations, rappelons la règle suivante :

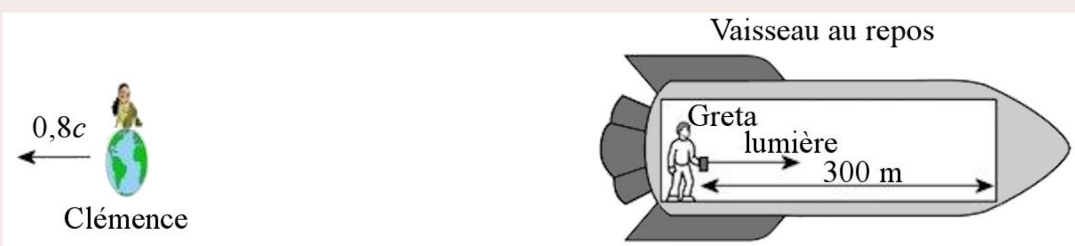
Quel observateur utilise les primes ?

L'observateur qui voit l'autre se diriger vers les x négatifs utilise les primes.

Voyons maintenant un exemple de l'application de ces formules.

Exemple 8.10.1

Greta est dans un vaisseau s'éloignant de la Terre à 0,8c. Elle envoie alors un faisceau de lumière de l'arrière vers l'avant du vaisseau. Selon Greta, la distance entre la source de lumière et la cible est de 300 m. Clémence, sur Terre, observe ce que fait Greta.



theoryoftime.com/wordpress/?p=236

a) Combien de temps faut-il pour que la lumière arrive à la cible selon Greta ?

Le temps est simplement le temps que prend la lumière pour parcourir 300 m.

$$\Delta t' = \frac{300m}{3\times 10^8 \frac{m}{s}}$$
$$= 10^{-6} s$$

C'est Greta qui note le temps avec les primes, car c'est elle qui voit l'autre observateur aller vers les x négatifs.

b) Combien de temps faut-il pour que la lumière arrive à la cible selon Clémence ?

La situation selon Clémence est

On peut calculer le temps avec les transformations de Lorentz.

Le temps selon Greta est $\Delta t' = 10^{-6}$ s et la distance entre les évènements (départ et arrivée de la lumière) est, selon Greta, $\Delta x' = 300$ m.

Le temps selon Clémence est donc

$$\begin{aligned}\Delta t &= \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,8c)^2}{c^2}}}\cdot\left(10^{-6}s + \frac{0,8c\cdot 300m}{c^2}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-0,8^2}}\cdot\left(10^{-6}s + \frac{0,8\cdot 300m}{c}\right)\\ &= 3\times 10^{-6}s\end{aligned}$$

Il faut donc 3 µs pour que la lumière arrive à sa cible selon Clémence alors qu'il fallait seulement 1 µs selon Greta.

Remarquez qu'on ne pouvait pas faire ce problème avec la formule de la dilatation du temps parce qu'aucun observateur ne mesure de temps propre (Δt_0), car aucun des observateurs n'est présent aux deux évènements. Encore mieux formulé : les deux évènements (départ et arrivée de la lumière) ne sont pas au même endroit pour aucun des deux observateurs, donc aucun ne mesure le temps propre.

Par contre, voici comment on pouvait faire ce problème sans les transformations de Lorentz. Pour Clémence, la distance entre le point de départ de la lumière et la cible est plus petite à cause de la contraction des longueurs. Elle est de

$$\begin{aligned}L &= 300m\cdot\sqrt{1-0,8^2}\\ &= 180m\end{aligned}$$

La lumière, qui avance à c, doit alors rattraper une cible à 180 m qui s'éloigne à 0,8c. Le temps pour rattraper est donc

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{180m}{c-0,8c} \\ &= 3\times 10^{-6}s\end{aligned}$$

La simultanéité

Les transformations de Lorentz vont nous confirmer que si deux évènements sont simultanés pour un observateur, alors ils ne le sont pas pour tous les autres observateurs. Si deux évènements sont simultanés, cela veut dire que Δt = 0. Le temps selon un autre observateur est donc

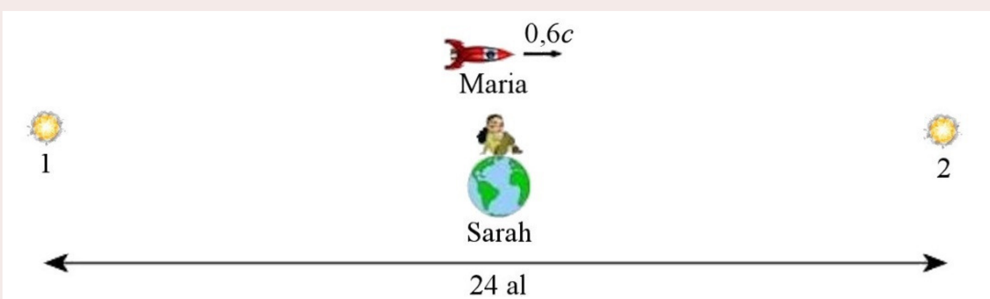
$$\Delta t' = \gamma\left(\cancel{\Delta t} - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)$$

$$\Delta t' = -\gamma\frac{v\Delta x}{c^2}$$

ce qui ne peut pas être égal à zéro, ce qui montre que les évènements ne peuvent être simultanés.

Exemple 8.10.2

Sarah observe que deux missiles distants de 24 al (selon Sarah) explosent simultanément. Quel est le temps entre les explosions selon Maria ?



Selon Sarah, le temps entre les évènements est Δt = 0 (puisque les évènements sont simultanés) et la distance entre les évènements est Δx = 24 al. Le temps entre les évènements selon Maria est donc

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \gamma\left(\cancel{\Delta t} - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) \\ &= -\gamma\frac{v\Delta x}{c^2}\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,6c)^2}{c^2}}} \cdot \frac{0,6c \cdot 24a \cdot c}{c^2}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-0,6^2}} \cdot 0,6 \cdot 24a$$
$$= -18ans$$

Il y a 18 ans d'écart entre les explosions selon Maria. Le signe de cette réponse nous indique lequel des évènements s'est produit en premier. Comme on a mis que $\Delta x = x_2 - x_1 = 24$ al est positif, alors l'évènement 2 est l'explosion de droite. Comme on obtient un $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ négatif, cela veut dire que $t'_2 < t'_1$ et que l'évènement 2 s'est produit avant l'évènement 1. L'explosion 2 a donc eu lieu 18 ans avant l'explosion 1 selon Maria. (C'est exactement la même situation qu'on avait considérée quand on avait parlé de la simultanéité pour la première fois. On avait alors dit que les explosions se produisaient en 2007 et 2025 selon Maria. L'écart est effectivement de 18 ans.)

Peut-on retrouver les années de ces explosions selon Maria, sachant que les deux explosions se sont produites en 2016 (selon Sarah), au moment où Maria passait à côté de la Terre ? Bien sûr, mais pour y arriver, il faut trouver la position et le temps de chaque évènement selon Sarah.

Cette année 2016 correspond au temps $t = 0$, puisque $t = 0$ correspond au moment où les deux observateurs sont à la même place. Ainsi, les deux explosions de 2016 se sont produites à $t = 0$ selon Sarah.

Comme Sarah est à $x = 0$ (l'observateur est toujours à l'origine de ses coordonnées), une des explosions s'est produite à $x = -12$ al et l'autre à $x = 12$ al.

Ainsi, le temps de l'explosion 1 à $x = -12$ al selon Maria est

$$t'_1 = \gamma\left(t_1 - \frac{vx_1}{c^2}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,6c)^2}{c^2}}} \cdot \left(0 - \frac{0,6c \cdot (-12a \cdot c)}{c^2}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-0,6^2}} \cdot \left(0 + 0,6 \cdot (-12a)\right)$$
$$= 9ans$$

Comme $t' = 0$ est 2016, $t' = 9$ ans est 2025.

Le temps de l'explosion 2 à $x = 12$ al selon Maria est

$$\begin{aligned} t_2' &= \gamma\left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,6c)^2}{c^2}}}\cdot\left(0 - \frac{0,6c\cdot 12a\cdot c}{c^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-0,6^2}}\cdot\left(0-0,6\cdot 12a\right) \\ &= -9ans \end{aligned}$$

Comme $t' = 0$ est 2016, $t' = -9$ ans est 2007.

(Formellement, l'observateur n'est pas obligé d'être à $x = 0$ de son système de référence. On peut mettre l'origine où on veut. Toutefois, si vous changez la position de l'origine, rappelez-vous que le $t = 0$ est toujours le moment où les origines des deux systèmes d'axes des observateurs sont à la même place.)

La dilatation du temps

On a dit que Δt_0 est le temps entre deux évènements se produisant au même endroit selon un observateur. Donc pour cet observateur, on a

$$\Delta t = \Delta t_0$$
$$\Delta x = 0$$

Pour un autre observateur, le temps est donc

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)$$
$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t_0 - \frac{v\cdot 0}{c^2}\right)$$
$$\Delta t' = \gamma\Delta t_0$$

qui est la formule de dilatation du temps.

La contraction des longueurs

Pour mesurer la longueur d'un objet, il y a deux évènements : la mesure de la position d'un bout de l'objet et la position de l'autre bout de l'objet. La soustraction des deux positions va nous donner la longueur de l'objet ($L = x_2 - x_1$). Quand l'objet est en mouvement, on doit absolument mesurer la position des deux bouts simultanément. Si on mesure la position du derrière de l'objet à un moment et qu'on mesure la position du devant de l'objet 1 seconde plus tard, la soustraction des deux positions ne donne pas la longueur de l'objet s'il se déplace puisque le devant de l'objet a changé de place pendant ce temps. On doit absolument mesurer la position des deux bouts en même temps. Ainsi, pour l'observateur qui voit l'objet se déplacer, on a

$$\begin{gathered} L = x_2 - x_1 = \Delta x \\ \Delta t = 0 \end{gathered}$$

Par contre, on peut mesurer la position des bouts à des temps différents si l'objet est au repos. On a donc

$$\begin{gathered} L_0 = x_2' - x_1' = \Delta x' \\ \Delta t' = \text{n'importe quoi} \end{gathered}$$

Ainsi, on obtient, avec les transformations de Lorentz,

$$\begin{gathered} \Delta x' = \gamma\left(\Delta x - v\Delta t\right) \\ L_0 = \gamma\left(L - v \cdot 0\right) \\ L = \frac{L_0}{\gamma} \end{gathered}$$

qui est la formule de la contraction des longueurs.

L'intervalle

L'intervalle entre deux évènements est défini par

Intervalle

$$I = c^2\left(\Delta t\right)^2 - \left(\Delta x\right)^2 - \left(\Delta y\right)^2 - \left(\Delta z\right)^2$$

Notez que *I* peut être positif ou négatif ou nul.

L'intervalle est intéressant parce que c'est un invariant relativiste. Cela signifie que tous les observateurs arrivent à la même valeur pour l'intervalle.

Voici la preuve que l'intervalle est le même pour tous. Si l'observateur avec les primes calcule l'intervalle entre deux évènements, on a

$$\begin{aligned} I' &= c^2\left(\Delta t'\right)^2 - \left(\Delta x'\right)^2 - \left(\Delta y'\right)^2 - \left(\Delta z'\right)^2 \\ &= c^2\gamma^2\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)^2 - \gamma^2\left(\Delta x - v\Delta t\right)^2 - \left(\Delta y\right)^2 - \left(\Delta z\right)^2 \\ &= \gamma^2\left(c^2\left(\Delta t\right)^2 - \cancel{2v\Delta x\Delta t} - \frac{v^2}{c^2}\left(\Delta x\right)^2\right) \\ &\qquad\qquad - \gamma^2\left(\left(\Delta x\right)^2 - \cancel{2v\Delta x\Delta t} + v^2\left(\Delta t\right)^2\right) - \left(\Delta y\right)^2 - \left(\Delta z\right)^2 \end{aligned}$$

$$= \gamma^2 \left(c^2 \left(\Delta t\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \left(\Delta x\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right) - \left(\Delta y\right)^2 - \left(\Delta z\right)^2$$
$$= c^2 \left(\Delta t\right)^2 - \left(\Delta x\right)^2 - \left(\Delta y\right)^2 - \left(\Delta z\right)^2$$
$$= I$$

L'observateur utilisant les primes arrive donc à la même valeur que l'observateur qui n'utilise pas les primes. On a donc

Invariance de l'intervalle

$$I' = I$$

Les différents observateurs sont en désaccord sur beaucoup de choses, mais ils s'entendent sur la valeur de l'intervalle.

Le temps propre

Comme mentionné précédemment, le temps propre Δt_0 entre 2 évènements est le temps entre les évènements pour l'observateur qui observe les 2 évènements au même endroit (donc qui pourrait être présent aux 2 évènements). Dans ce cas, l'intervalle est

$$\begin{aligned} I &= c^2 \left(\Delta t\right)^2 - \left(\Delta x\right)^2 - \left(\Delta y\right)^2 - \left(\Delta z\right)^2 \\ &= c^2 \left(\Delta t_0\right)^2 - \left(0\right)^2 - \left(0\right)^2 - \left(0\right)^2 \\ &= c^2 \left(\Delta t_0\right)^2 \end{aligned}$$

On arrive donc à la formule suivante.

Temps propre entre deux évènements

$$\Delta t_0 = \tfrac{1}{c}\sqrt{I}$$

Les différents observateurs peuvent donc facilement calculer le temps propre avec I.

Si I est négatif, il n'y a pas de temps propre. Cela se produit quand les deux évènements sont trop loin l'un de l'autre pour qu'un observateur puisse les observer au même endroit. Pour être présent aux deux évènements, un observateur devrait aller plus vite que la lumière et on verra plus loin que cela est impossible.

Si I est positif, il y a un temps propre et on dit que l'intervalle est de *type temps*. Dans ce cas, l'ordre des évènements ne peut jamais être inversé. Tous les observateurs verront les deux évènements dans le même ordre. Cette information peut être utile pour déterminer le signe du temps propre quand on fait la racine pour trouver Δt_0 (même signe que celui du Δt utilisé pour calculer I). Notez aussi que si I est positif, aucun observateur ne pourra observer que ces évènements sont simultanés.

La distance propre

La distance propre $\Delta\sigma$ entre 2 évènements est la distance entre les évènements pour l'observateur qui observe que les 2 évènements sont simultanés. L'intervalle est alors

$$\begin{aligned} I &= c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\ &= c^2(0)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\ &= -(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\ &= -(\Delta\sigma)^2 \end{aligned}$$

On arrive alors à la formule suivante.

Distance propre entre deux évènements

$$\Delta\sigma = \sqrt{-I}$$

Les différents observateurs peuvent donc facilement calculer la distance propre avec I.

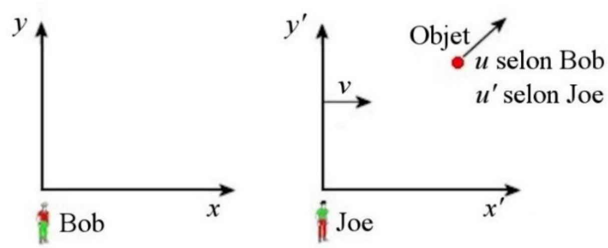
Si I est positif, il n'y a pas de distance propre. Cela se produit quand le temps entre les évènements est trop grand pour qu'un observateur puisse les observer simultanément.

Si I est négatif, il y a une distance propre et on dit que l'intervalle est de *type espace*. Dans ce cas, l'ordre des évènements peut être inversé. Certains observateurs verront l'évènement A avant l'évènement B et certains autres verront l'évènement B avant l'évènement A. Par contre, l'ordre des évènements dans l'espace ne peut pas changer. Si la valeur de x de l'évènement 1 est plus grande que celui de l'évènement 2 pour un observateur, il sera plus grand pour tous les observateurs. Cette information peut être utile pour déterminer le signe de la distance propre quand on fait la racine pour trouver $\Delta\sigma$ (même signe que celui du Δx utilisé pour calculer I si $\Delta y = 0$ et $\Delta z = 0$, ce qui est habituellement le cas ici). Notez finalement que si I est négatif, aucun observateur ne pourra observer les deux évènements à la même position.

8.11 LES TRANSFORMATIONS DES VITESSES

Nos deux observateurs vont maintenant mesurer la vitesse d'un objet qui se déplace. La vitesse de cet objet sera u selon un observateur et u', selon l'autre observateur.

Pour connaitre la vitesse d'un objet, on doit mesurer la position de l'objet à deux moments. Ce sont nos deux évènements. Avec la distance entre les évènements selon Bob (Δx) et le temps entre les évènements selon Bob (Δt), on obtient la vitesse en x de l'objet selon Bob.



$$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Avec la distance entre les évènements selon Joe ($\Delta x'$) et le temps entre les évènements selon Joe ($\Delta t'$), on obtient la vitesse en x de l'objet selon Joe.

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$$

On peut arriver à la loi de transformation de la vitesse en x de l'objet en utilisant les transformations de Lorentz.

$$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$u_x = \frac{\cancel{\gamma}\left(\Delta x' + v\Delta t'\right)}{\cancel{\gamma}\left(\Delta t' + v\Delta x' / c^2\right)}$$

En divisant en haut et en bas de la fraction par $\Delta t'$, on obtient

$$u_x = \frac{\left(\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + v\right)}{\left(1 + \frac{v\Delta x'}{c^2\Delta t'}\right)}$$

Puisque

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$$

on obtient

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

C'est notre équation pour calculer u_x à partir de u'_x. En procédant de la même façon avec les autres composantes de la vitesse, on obtient les lois de transformations des vitesses.

Transformations des vitesses

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \qquad u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \qquad u_y = \frac{u'_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

$$u'_z = \frac{u_z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \qquad u_z = \frac{u'_z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

(v est la vitesse d'un observateur selon un autre observateur.)

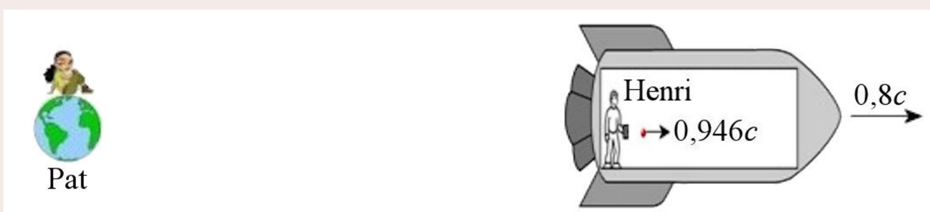
Exemple 8.11.1

Dans son vaisseau, Henri lance une balle. La vitesse de la balle selon Henri est de 0,6*c*. Quelle est la vitesse de la balle selon Pat, qui est sur Terre ?

Selon Henri, la vitesse est $u'_x = 0{,}6c$. La vitesse de la balle selon Pat est donc

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1+\frac{vu'_x}{c^2}} \\ &= \frac{0{,}6c + 0{,}8c}{1+\frac{0{,}8c\cdot 0{,}6c}{c^2}} \\ &= \frac{0{,}6c + 0{,}8c}{1+0{,}8\cdot 0{,}6} \\ &= 0{,}946c \end{aligned}$$

On a donc la situation suivante selon Pat.

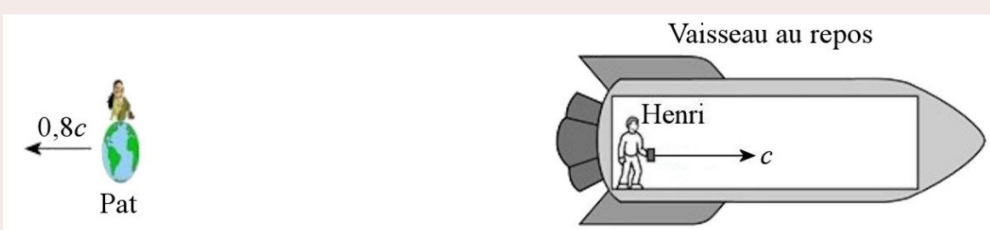


(Notez qu'avec la relativité de Galilée, la vitesse de la balle aurait été de 1,4*c* selon Pat.)

On va faire maintenant un petit test. Que se passe-t-il si Henri envoie un faisceau de lumière vers l'avant ?

Exemple 8.11.2

Dans son vaisseau, Henri envoie un faisceau de lumière vers l'avant du vaisseau. Quelle est la vitesse de la lumière selon Pat, qui est sur Terre ?



Selon Henri, la vitesse est $u'_x = c$. La vitesse de la lumière selon Pat est donc

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \\ &= \frac{c + 0,8c}{1 + \frac{0,8c \cdot c}{c^2}} \\ &= \frac{c + 0,8c}{1 + 0,8} \\ &= c \end{aligned}$$

On a donc la situation suivante selon Pat.

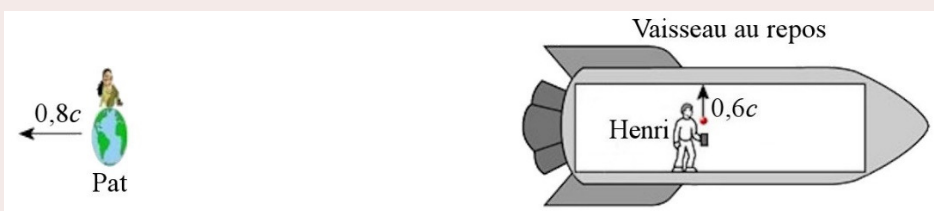
Ce qui est en accord avec le deuxième postulat d'Einstein.

(Notez qu'avec la relativité de Galilée, la vitesse de la lumière aurait été de 1,8c selon Pat.)

Henri va maintenant lancer sa balle vers le haut.

Exemple 8.11.3

Dans son vaisseau, Henri envoie une balle vers le haut. La vitesse de la balle selon Henri est de 0,6c. Quelle est la vitesse de la balle selon Pat, qui est sur Terre ?



Selon Henri, les composantes de la vitesse de la balle sont $u'_x = 0$ et $u'_y = 0,6c$. La composante en x de la vitesse de la balle selon Pat est donc

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \\ &= \frac{0,8c}{1 + \frac{0,8c \cdot 0}{c^2}} \\ &= \frac{0,8c}{1 + 0} \end{aligned}$$

$$= 0,8c$$

C'est un peu normal que la vitesse soit la même vitesse que le vaisseau d'Henri, car la balle doit suivre le vaisseau.

La composante en y de la vitesse selon Pat est

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{u'_y \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{vu'_x}{c^2}} \\ &= \frac{0,6c \cdot \sqrt{1-\frac{(0,8c)^2}{c^2}}}{1+\frac{0,8c \cdot 0}{c^2}} \\ &= \frac{0,6c \cdot \sqrt{1-0,8^2}}{1+0} \\ &= 0,36c \end{aligned}$$

La vitesse de la balle selon Pat est donc

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \\ &= \sqrt{(0,8c)^2 + (0,36c)^2} \\ &= 0,877c \end{aligned}$$

et sa direction est

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan \frac{u_y}{u_x} \\ &= \arctan \frac{0,36c}{0,8c} \\ &= 24,2° \end{aligned}$$

On a donc la situation suivante selon Pat

Exemple 8.11.4

Sur Terre, Florence voit les vaisseaux de Sam et Alex se diriger l'un vers l'autre avec une vitesse de 0,7c. Quelle est la vitesse du vaisseau de Sam selon Alex ?

Même s'il y a trois observateurs dans ce problème, seuls Florence et Alex sont les observateurs qui nous intéressent parce qu'on va passer du point de vue de Florence à celui d'Alex. Comme la vitesse entre Florence et Alex est de 0,7c, on aura que v = 0,7c (v est toujours la vitesse entre des observateurs quand on passe du point de vue d'un observateur au point de vue de l'autre. Cette vitesse n'est jamais négative.)

Chacun de ces observateurs mesure la vitesse du même objet (le vaisseau de Sam ici). La vitesse de cet objet est u_x selon Florence et u'_x selon Alex (u_x et u'_x font toujours référence à la vitesse du même objet, mais selon des observateurs différents). Notez que les valeurs de u_x et u'_x sont négatives si l'objet va vers les x négatifs selon l'observateur. C'est le cas du vaisseau de Sam ici. Il est possible que u_x et u'_x ne soient pas du même signe.

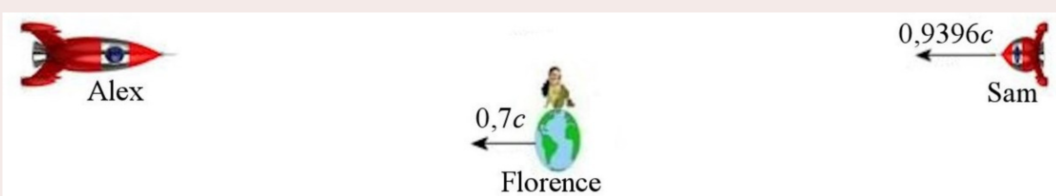
On a donc

$$u_x = -0{,}7c$$
$$u'_x = \text{ce qu'on cherche}$$
$$v = 0{,}7c$$

On trouve ce qu'on cherche avec les transformations de vitesse

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ &= \frac{-0{,}7c - 0{,}7c}{1 - \frac{(0{,}7c)\cdot(-0{,}7c)}{c^2}} \\ &= \frac{-0{,}7c - 0{,}7c}{1 + 0{,}7 \cdot 0{,}7} \\ &= -0{,}9396c \end{aligned}$$

On a donc la situation suivante selon Alex.



Si on avait pris le point de vue de Sam, on verrait que le vaisseau d'Alex se dirigerait vers lui également avec une vitesse de 0,939 6c.

Notez que les vitesses obtenues ne dépasseront jamais la vitesse de la lumière. C'est normal puisqu'on va montrer un peu plus loin que la vitesse d'un objet ne peut jamais dépasser la vitesse de la lumière.

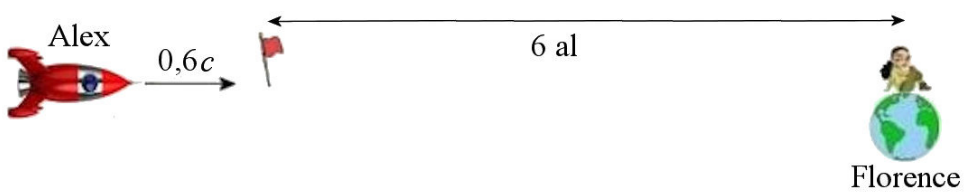
8.12 QUELQUES FAUX PARADOXES

Avec la relativité, il est assez facile de trouver des situations qui semblent paradoxales à première vue. Cela signifie qu'on arrive à des résultats différents en prenant le point de vue d'observateurs différents alors qu'il serait impossible d'avoir des résultats différents. Très tôt dans l'histoire de la relativité, certains ont mis en évidence de telles situations. Le plus célèbre est surement le paradoxe des jumeaux de Paul Langevin de 1911 (Langevin est aussi célèbre pour ses aventures extraconjugales avec Marie Curie…). Ce paradoxe est un peu trop complexe pour être abordé ici puisqu'il y a un observateur qui change de vitesse. Toutefois, on peut aborder quelques situations simples qui semblent mener tout droit à un paradoxe.

Florence et Alex

Le premier cas concerne la dilatation du temps.

Florence, qui est sur Terre, a placé un drapeau à 6 al de la Terre. Quand Alex passe à côté du drapeau, Alex et Florence démarrent toutes les deux un chronomètre.



Quand Alex va passer à côté de la Terre, Alex et Florence vont se montrer leur chronomètre. Alex et Florence pourront alors comparer les valeurs indiquées par les chronomètres pour constater lequel est en avance et lequel est en retard.

Selon Florence

Voici ce qui va se passer selon Florence. Entre le moment où Alex démarre son chronomètre et le moment où elle arrive à la Terre, il va s'écouler 10 ans selon Florence (6 al à 0,6*c*). Toutefois, Florence va dire que le chronomètre d'Alex avance au ralenti, car il se déplace. Selon la formule de dilatation du temps, le chronomètre n'avance que de 8 ans pendant qu'il se passe 10 ans sur Terre. Ainsi, selon Florence, le chronomètre d'Alex indiquera 8 ans au moment de la rencontre, alors que le chronomètre de Florence, qui lui fonctionne au bon rythme, indiquera 10 ans.

Selon Alex

Un paradoxe semble apparaitre si on prend le point de vue d'Alex. Selon Alex, on a alors la situation suivante.

Selon Alex, la distance entre le drapeau et la Terre est maintenant de 4,8 al selon la formule de contraction des longueurs. Alex démarre son chronomètre quand le drapeau passe à côté de son vaisseau et elle va l'arrêter quand la Terre va arriver. Comme la Terre se déplace à 0,6*c* et qu'elle est initialement à une distance de 4,8 al, elle arrivera dans 8 ans. Ainsi, le chronomètre d'Alex indiquera 8 ans lors de la rencontre, comme Florence avait prévu.

Toutefois, le chronomètre de Florence avance au ralenti (puisqu'il est en mouvement) selon Alex. Comme le chronomètre de Florence va au ralenti, le chronomètre de Florence devrait être en retard sur celui d'Alex quand elles vont se rencontrer. En fait, selon la formule de dilatation du temps, le chronomètre de Florence va avancer de

$$8ans = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-0,6^2}}$$

$$\Delta t_0 = 6,4ans$$

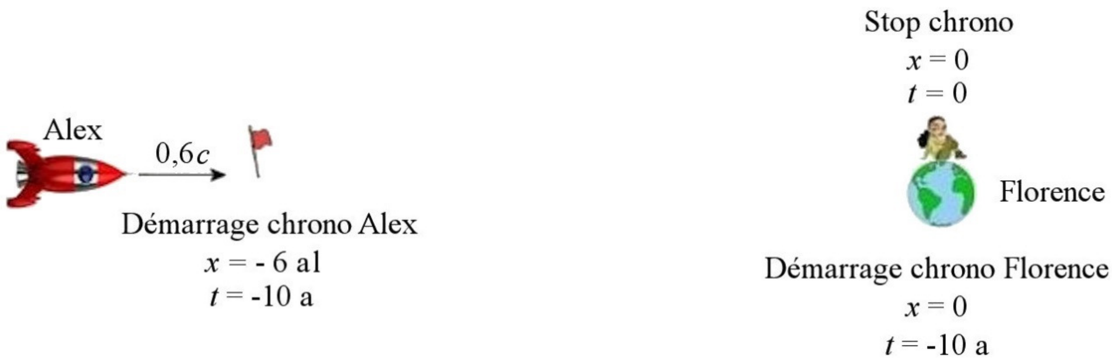
Ainsi, le chronomètre de Florence devrait indiquer une valeur de 6,4 ans lors de la rencontre selon Alex.

Le paradoxe apparent

Il semble y avoir un paradoxe, car ils ne peuvent pas avoir raison tous les deux. Que vont-elles voir sur le chronomètre de Florence quand elles vont se rencontrer ? Vont-elles voir 10 ans comme le prévoit Florence ou vont-elles voir 4,8 ans comme le prévoit Alex ? Elles ne peuvent pas avoir raison toutes les deux. Si quelqu'un prend une photo du chronomètre de Florence quand elles vont se rencontrer, on verra sur la photo ce qu'affiche le chronomètre de Florence. On ne peut pas avoir un résultat différent de ce qu'on voit sur la photo.

La solution

En réalité, il n'y a pas de paradoxe quand on fait correctement le problème. Le raisonnement de Florence est tout à fait correct : le chronomètre de Florence indiquera 10 ans lors de la rencontre. C'est le passage au point de vue d'Alex qui n'a pas été bien fait. Pour le faire correctement, indiquons les positions et le temps des évènements selon Florence.



On doit mettre le t = 0 au moment où les observateurs se rencontrent (c'est ce qu'on a supposé quand on a fait les transformations de Lorentz). Ainsi, le temps de démarrage des chronomètres est à t = –10 ans puisqu'il se fait 10 ans avant la rencontre (qui est le t = 0) selon Florence. Quant au x = 0, il est à l'endroit où est situé Florence (qui est à l'origine de son système d'axe). Nous allons alors utiliser les transformations de Lorentz pour passer au point de vue d'Alex.

Selon Alex, la rencontre (stop chrono) se fait aux coordonnées

$$x'_R = \gamma\left(x_R - vt_R\right) = \frac{5}{4}\cdot\left(0-0\right) = 0 \qquad t'_R = \gamma\left(t_R - \frac{vx_R}{c^2}\right) = \frac{5}{4}\cdot\left(0-\frac{0,6c\cdot 0}{c^2}\right) = 0$$

(Ces valeurs sont normales puisque le moment de la rencontre est, par définition, le t = 0 et le t' = 0. De plus, la rencontre se fait à l'endroit où est situé Alex à ce moment, qui est l'origine des axes d'Alex.)

Selon Alex, le démarrage du chronomètre d'Alex se fait aux coordonnées

$$x'_A = \gamma\left(x_A - vt_A\right) = \frac{5}{4}\cdot\left(-6a\cdot c - 0,6c\cdot\left(-10a\right)\right) = 0al \qquad t'_A = \gamma\left(t_A - \frac{vx_A}{c^2}\right) = \frac{5}{4}\cdot\left(-10a - \frac{0,6c\cdot\left(-6a\cdot c\right)}{c^2}\right) = -8a$$

Cela veut dire que le démarrage du chronomètre d'Alex se fait 8 ans avant la rencontre (qui est à t = 0) selon Alex. Le chronomètre d'Alex devrait donc indiquer 8 ans selon Alex lors de la rencontre, comme prévu par Florence et par Alex.

Selon Alex, le démarrage du chronomètre de Florence se fait aux coordonnées suivantes.

$$x'_F = \gamma\left(x_F - vt_F\right) \qquad t'_F = \gamma\left(t_F - \frac{vx_F}{c^2}\right)$$
$$= \frac{5}{4}\cdot\left(0 - 0,6c\cdot\left(-10a\right)\right) \qquad = \frac{5}{4}\cdot\left(-10a - \frac{0,6c\cdot 0}{c^2}\right)$$
$$= 7,5al \qquad = -12,5a$$

Oh surprise ! Le chronomètre de Florence va donc fonctionner durant 12,5 ans puisqu'il va s'arrêter à $t'=0$. Mais ce chronomètre se déplace à 0,6c et il avancera donc au ralenti. La formule de dilatation du temps nous dit qu'il aura avancé de

$$12,5ans = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-0,6^2}}$$
$$\Delta t_0 = 10ans$$

Le chronomètre de Florence devrait donc indiquer 10 ans selon Alex lors de la rencontre. Les prévisions d'Alex sont donc conformes à celles de Florence.

L'erreur de raisonnement qui a mené au paradoxe consistait à penser que le démarrage des chronomètres est aussi simultané selon Alex. Si les démarrages sont simultanés selon Florence, alors ils ne peuvent pas l'être selon Alex. C'est ce que nous ont indiqué les transformations de Lorentz : Alex démarre son chronomètre à $t' = -8$ ans et Florence démarre son chronomètre à $t' = -12,5$ ans. Florence a donc démarré son chronomètre 4,5 ans avant Alex selon Alex. C'est vrai que le chronomètre de Florence va au ralenti selon Alex, mais il va quand même indiquer une valeur plus grande que celui d'Alex parce qu'il a démarré 4,5 ans plus tôt que celui d'Alex.

Il n'y a donc pas de paradoxe.

Mentionnons finalement que les transformations nous indiquent aussi que Florence était à 7,5 années-lumière d'Alex quand elle a démarré son chronomètre (on a obtenu $x' = 7,5$ al pour le démarrage du chronomètre de Florence et Alex est toujours à $x' = 0$). Comme Florence se déplace à 0,6c selon Alex, elle arrivera 12,5 ans après le démarrage du chronomètre de Florence, comme prévu.

Un autre paradoxe apparent : et si le chronomètre d'Alex émettait des flashs de lumière ?

On peut arriver à un autre paradoxe apparent avec cette situation en supposant maintenant que le chronomètre d'Alex émet un flash de lumière à chaque année à partir du moment où il démarre. Comme il s'écoule 8 ans dans le vaisseau selon nos calculs, le chronomètre devrait émettre 8 flashs en tout. Florence devrait donc voir 8 flashs.

Prenons maintenant la formule de l'effet Doppler pour mesurer le temps entre les flashs tel que vu par Florence.

$$\begin{aligned} T' &= T_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \\ &= 1a\cdot\sqrt{\frac{c-0,6c}{c+0,6c}} \\ &= 1a\cdot\sqrt{\frac{0,4}{1,6}} \\ &= 0,5a \end{aligned}$$

Florence voit donc un flash tous les 6 mois. Comme il faut 10 ans avant qu'Alex arrive selon Florence, on pourrait conclure que Florence verra 20 flashs de lumière. Pourtant, on était arrivé à la conclusion que le chronomètre n'allait émettre que 8 flashs de lumière. Comment Florence peut-elle voir 20 flashs si le chronomètre n'a émis que 8 flashs ? Encore une fois, il semble y avoir un paradoxe.

On va utiliser des dates pour mieux résoudre ce paradoxe. Supposons que, selon Florence, le vaisseau d'Alex passe à côté du drapeau en 2020 et qu'Alex passe à côté de la Terre en 2030. Cela donne un voyage qui dure 10 ans selon Florence, ce qui est en accord avec ce qui avait été dit. Cependant, Florence ne <u>voit</u> pas immédiatement le premier flash émis par le chronomètre d'Alex. Comme le drapeau est à 6 al de distance, Florence va voir ce flash 6 ans après qu'Alex soit véritablement passé à côté du drapeau. Elle va donc voir le premier flash en 2026. Comme Alex passe à côté de la Terre en 2030, Florence verra des flashs pendant seulement 4 ans (de 2026 à 2030). Durant ces 4 ans, elle voit un flash tous les 6 mois, ce qui donne 8 flashs au total. C'est bien le nombre de flashs émis. Il n'y a pas de paradoxe.

<u>*Un autre paradoxe apparent : Alex semble aller plus vite que la lumière*</u>

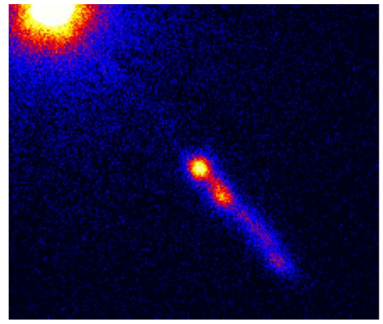
Dans cette situation, Florence <u>verra</u> Alex aller plus vite que la lumière. Elle voit Alex passer près du drapeau en 2026 (6 ans après qu'Alex soit véritablement passé près du drapeau) et elle voit Alex passer près de la Terre en 2030. Florence a donc <u>vu</u> Alex parcourir 6 al (distance entre le drapeau et la Terre) en 4 ans (temps entre 2026 et 2030). Avec cette distance et ce temps, on arrive à une vitesse de 1,5*c*.

Or, on va voir dans la section suivante qu'un objet ne peut pas aller plus vite que la lumière. Encore une fois, on a un paradoxe apparent. Comment Alex peut-il se déplacer à 1,5*c* si rien ne peut dépasser la vitesse de la lumière ?

Même si Florence <u>voit</u> Alex aller plus vite que la lumière, cela ne veut pas nécessairement dire qu'Alex va plus vite que la lumière. En fait, Florence sait qu'elle a vu le début du voyage avec 6 ans de retard et que le voyage du vaisseau a véritablement commencé en 2020. Elle <u>observe</u> donc qu'Alex a parcouru 6 al en 10 ans et que sa véritable vitesse est 6 al/10 a = 0,6*c*.

Cette vitesse apparente plus grande que la vitesse de la lumière peut se produire uniquement si l'objet se dirige vers l'observateur.

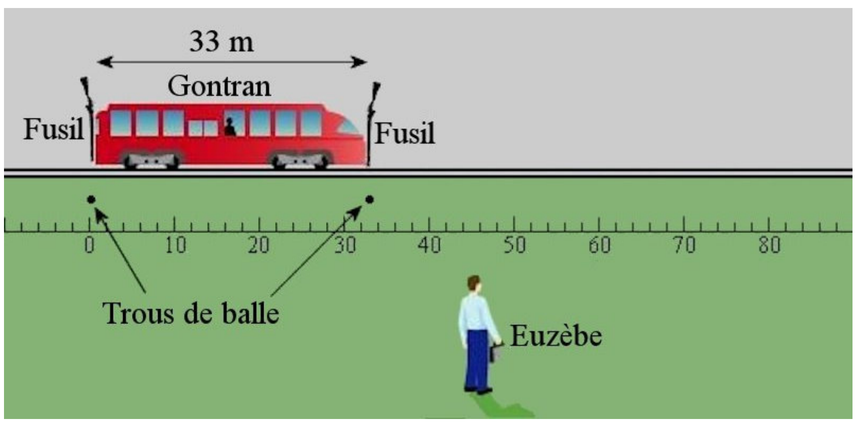
Par exemple, le jet de gaz faits par le quasar 3C 273 semble avoir une telle vitesse apparemment plus grande que la vitesse de la lumière. Selon ce qu'on voit, ces jets semblent se déplacer vers nous à une vitesse de près de 10*c* (on a même des mesures jusqu'à 15*c*). Toutefois, on observe que la véritable vitesse est plus petite que *c* (elle est près de 0,99*c*).



en.wikipedia.org/wiki/3C_273

Les fusils dans le train

Voici maintenant une situation qui semble paradoxale, mais avec la contraction des longueurs cette fois. Gontran est dans un train de 33 m de long (longueur au repos) et Euzèbe est sur le sol et regarde passer ce train. Gontran a placé un fusil à chaque extrémité de son train. Quand il va appuyer sur un bouton, les deux fusils tirent, en même temps, une balle dans le sol. Euzèbe a dessiné une règle sur le sol pour mesurer la position des trous de balle. Voici la situation quand le train est au repos.

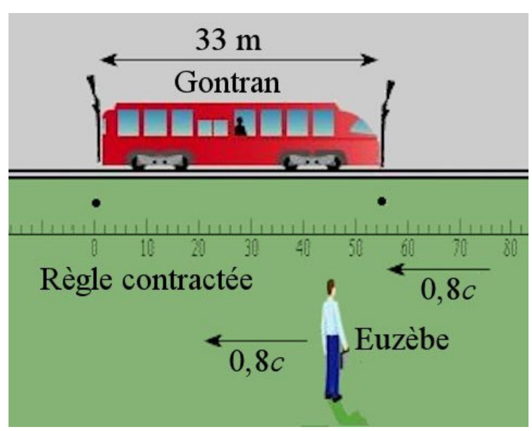


prancer.physics.louisville.edu/astrowiki/index.php/Special_Relativity

Calculons maintenant la position des trous de balle sur la règle d'Euzèbe si le train va à 0,8*c*. Gontran a la consigne de faire feu quand le fusil situé en arrière du train est au-dessus du 0 de la règle dessinée par Euzèbe.

Selon Gontran

Selon Gontran, Euzèbe et le sol se déplacent.

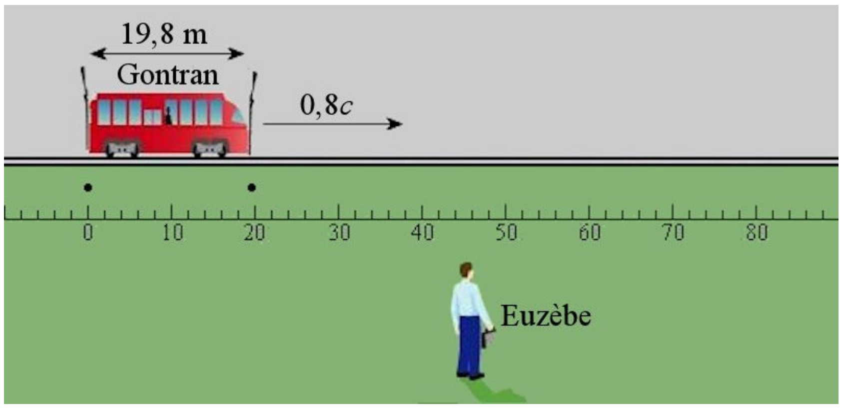


La distance entre les fusils est de 33 m selon Gontran. Toutefois, le sol, qui se déplace à 0,8*c* selon Gontran, est contracté. La règle, qui était dessinée sur le sol, est donc contractée de sorte que le fusil situé en avant du train n'est pas au-dessus de la marque des 33 m quand il tire.

Selon la formule de contraction des longueurs, le fusil est au-dessus de la marque des 55 m sur cette règle contractée quand il tire. Il va donc faire un trou dans le sol à la marque de 55 m sur la règle d'Euzèbe.

Selon Euzèbe

Prenons maintenant le point de vue d'Euzèbe. Selon Euzèbe, c'est le train qui se déplace.



Selon Euzèbe, c'est le train qui est contracté. La distance entre les fusils n'est donc que de 19,8 m selon la formule de contraction des longueurs. Quand les fusils tirent, le fusil situé en avant du train est au-dessus de la marque des 19,8 m. Ce fusil va donc faire un trou dans le sol à la marque de 19,8 m sur la règle d'Euzèbe.

Le paradoxe apparent

Il y a un paradoxe : les deux observateurs ne prévoient pas la même position sur la règle d'Euzèbe pour le trou fait par la balle tirée par le fusil en avant du train. Le trou doit être à la marque des 55 m selon Gontran et à la marque des 19,8 m selon Euzèbe. Encore une fois, une photo du trou et des marques de la règle dessinée par Euzèbe sur le sol ne peut pas changer selon les observateurs.

La solution

Il y a évidemment quelque chose qui a été mal fait. Pour le découvrir, utilisons les transformations de Lorentz. Il y a deux évènements ici : les deux fusils qui tirent. Selon Gontran, les fusils tirent simultanément et sont distants de 33 m. On a donc

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = 33m$$
$$\Delta t' = 0$$

En donnant une valeur positive à x'_2 - x'_1, on a automatiquement dit que le déclenchement du fusil du devant du train est l'évènement 2 et que le déclenchement du fusil du derrière du train est l'évènement 1.

Selon les transformations de Lorentz, la distance et le temps entre les évènements selon Euzebe sont

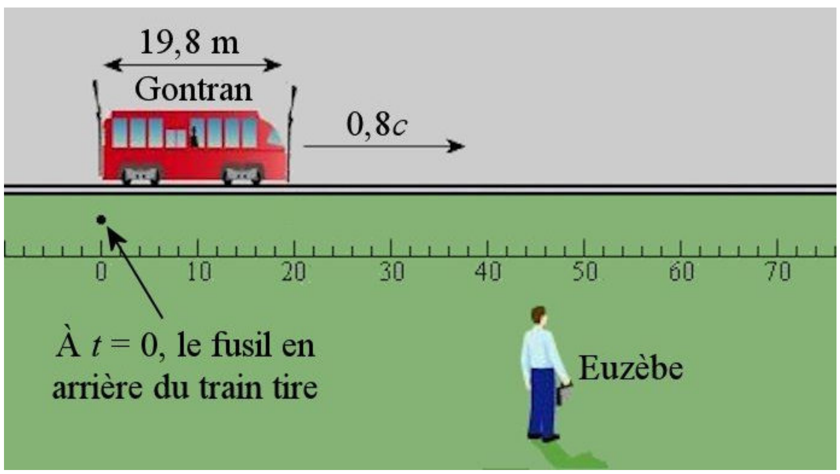
$$\Delta x = \gamma\left(\Delta x' + v\Delta t'\right) \qquad \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)$$

$$= \frac{5}{3}\cdot\left(33m + 0,8c\cdot 0\right) \qquad = \frac{5}{3}\cdot\left(0 + \frac{0,8c\cdot 33m}{c^2}\right)$$

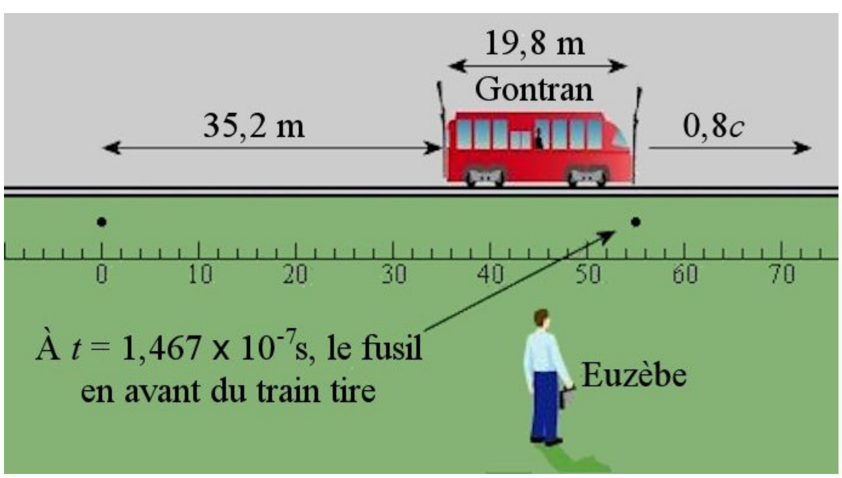
$$= 55m \qquad = 1,467\times 10^{-7}\,s$$

Ainsi, la distance entre les évènements, donc entre les trous de balle, est aussi de 55 m selon Euzèbe. Il y aura un trou à x = 0 et un trou à x = 55 m, comme le prévoyait Gontran.

Les transformations nous permettent de voir également où était l'erreur. Selon Euzèbe, les fusils ne tirent plus en même temps ! Le temps t_2 - t_1 = 1,467 x 10^{-7} s signifie que le fusil 2 (donc celui en avant du train) a tiré 1,467 x 10^{-7} s après le fusil en arrière du train. Pendant ce temps, le train, qui se déplace à 0,8c, a avancé de 35,2 m. On trouve donc la solution de ce qui se passe selon Euzèbe. Le fusil de derrière tire et fait une marque au sol.



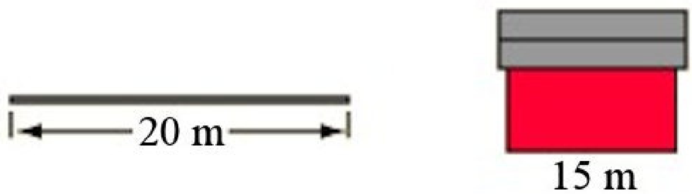
1,467 x 10^{-7} s plus tard, le fusil du devant du train tire et fait une marque sur le sol. Pendant ce temps, le train a avancé de 35,2 m.



La position du trou sur la règle est donc de 35,2 m + 19,8 m = 55 m selon Euzèbe, comme l'avait prédit Gontran. Il n'y a donc pas de paradoxe puisque les prédictions des deux observateurs sont identiques.

Le paradoxe de la grange

Voici une autre situation qui semble paradoxale quand on ne fait pas la solution correcte. Dans cet exemple, il y a une grange ayant 15 m de long et une perche ayant 20 m de long.



hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/relativ/polebarn.html

La perche est trop longue pour entrer dans cette grange, à moins de la faire aller très vite. Ronnie prend donc cette perche et court à 0,8*c*. Avec la contraction des longueurs, la perche n'a plus que 12 m de long.

Barney, qui est à côté de la porte de la grange, ouvre la porte pour faire entrer la perche et peut ensuite la refermer puisque la perche entre au complet dans la grange.

Ça semble toutefois paradoxal si on prend le point de vue de Ronnie. Pour lui, la perche est arrêtée et c'est la grange qui se dirige vers lui à 0,8*c*.

Pour Ronnie, la perche a 20 m de long, alors que la grange, à cause de la contraction des longueurs, n'a plus que 9 m de long. La perche n'entre plus dans la grange et il devient impossible pour Barney de fermer la porte !

Est-ce que la porte va fermer oui ou non ? Si elle ferme selon un observateur, elle doit fermer pour tous les observateurs. La relativité ne fait que changer le temps auquel se produit un évènement, elle n'élimine pas ou ne fait pas apparaitre des évènements en changeant de référentiels.

Pour résoudre ce mystère, on va supposer premièrement que le mur de l'autre côté de la grange défonce. Dans ce cas, il est certain que Barney pourra fermer la porte, car la perche ressort de l'autre côté de la grange. Remarquez toutefois que la porte ferme avant que le mur défonce selon Barney, alors que le mur défonce avant que la porte se ferme selon Ronnie. L'ordre des deux évènements est inversé selon l'observateur. Cela est tout à fait possible en relativité puisque le temps auquel se produit un évènement change en passant d'un observateur à un autre. Il est possible que ce changement inverse l'ordre des évènements. Rassurez-vous, cette inversion est impossible si un évènement est la cause de l'autre !

Supposons maintenant que le mur ne défonce pas. Dans ce cas, la solution est plus subtile. On verra un peu plus loin que rien ne peut aller plus vite que la lumière selon les équations de la relativité. Cela fait que quand le devant de la perche heurte le mur et s'arrête, le derrière de la perche ne s'arrête pas immédiatement ! Pour que le derrière de la perche s'arrête, il faut que l'information disant au derrière de la perche de s'arrêter arrive à l'arrière. Cette information ne pouvant pas aller plus vite que la lumière, le derrière de la perche va donc continuer à avancer pendant un certain temps avant de s'arrêter. Ce mouvement de l'arrière de la perche qui se fait pendant que l'avant est arrêté va rendre la perche encore plus petite que la longueur contractée.

C'est ce qui se passe dans le point de vue de Barney. La perche entre et il ferme la porte. Ensuite, le devant de la perche heurte le mur alors que le derrière de la perche continue son chemin, jusqu'à ce que la longueur de la perche soit de 6,67 m. À ce moment, l'information arrive à l'arrière de la perche et elle est alors entièrement au repos. Mais cette perche au repos a 20 m de long. Elle va donc grandir, à la vitesse de la lumière, jusqu'à avoir une longueur de 20 m, ce qui défoncera la porte.

Dans le point de vue de Ronnie, c'est la grange qui frappe le côté droit perche au repos en premier. Mais le côté gauche de la perche ne sait pas immédiatement qu'il y a eu ce contact et il reste immobile. Pendant que le côté droit de la perche se déplace vers la gauche à 0,8*c*, le côté gauche reste immobile, ce qui rend la perche plus courte. Ce rapetissement de la tige se poursuit jusqu'à ce que l'information de la collision avec la grange arrive au côté gauche de la perche. Quand l'information arrive, la perche n'a plus qu'une longueur de 4 m et elle est plus petite que la grange de 9 m. Barney a donc pu fermer la porte. Comme la perche a une longueur de 12 m quand elle se déplace à 0,8*c*, elle va rallonger, à la vitesse de la lumière, jusqu'à atteindre 12 m de long. Elle aura donc défoncé la porte, car elle est alors plus longue que la grange !

Il n'y a donc pas de paradoxe puisque la porte se ferme selon les deux observateurs.

Reposez votre cerveau quelques instants pendant que de nouvelles connexions entre les neurones se forment…

8.13 QUANTITÉ DE MOUVEMENT ET ÉNERGIE

Les lois de Newton étaient en accord avec la relativité de Galilée. En passant d'un référentiel à un autre avec les transformations de Galilée, on obtient les bonnes valeurs de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique selon l'autre observateur. Avec ces transformations, on trouve que la quantité de mouvement et l'énergie cinétique sont conservées pour tous les observateurs dans une collision élastique.

Avec les modifications apportées à la relativité par Einstein, les résultats obtenus avec $p = mu$ et $E_k = ½mu^2$ ne sont plus corrects (on utilise u parce que c'est ce qu'on utilise pour la vitesse des objets dans ce chapitre). Avec ces formules, on se rend compte que la quantité de mouvement et l'énergie cinétique ne sont plus conservées pour tous les observateurs dans une collision élastique quand on utilise les transformations de Lorentz pour passer d'un repère à l'autre. On doit trouver les nouvelles formules de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique pour sauver les principes de conservation de p et de E_k.

La quantité de mouvement

Pour trouver la nouvelle formule de la quantité de mouvement, on considère une collision où la quantité de mouvement est de toute évidence conservée pour un observateur. Ensuite, on examine cette collision en se plaçant dans le référentiel d'un autre observateur et on détermine comment il faut modifier la formule de la quantité de mouvement pour qu'il y ait aussi conservation de la quantité de mouvement pour cet observateur.

Voici cette preuve.
http://physique.merici.ca/ondes/preuveprel.pdf

On obtient alors la formule suivante pour la quantité de mouvement d'un objet de masse m se déplaçant à la vitesse u.

Quantité de mouvement

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \gamma mu$$

(Le γ se calcule avec u qui est la vitesse de l'objet.)

L'énergie cinétique

On peut trouver l'énergie cinétique en partant de l'idée que le travail est égal à la variation d'énergie cinétique. En partant d'une vitesse nulle, la variation d'énergie cinétique est l'énergie cinétique finale. En accélérant dans la direction de l'axe des x, on a alors

$$E_k = W$$

$$
\begin{aligned}
&= \int F dx \\
&= \int \frac{dp}{dt} dx \\
&= \int \frac{dx}{dt} dp \\
&= \int u dp
\end{aligned}
$$

Avec une intégration par partie, on arrive à

$$E_k = pu - \int p du$$

Si on accélère l'objet à partir d'une vitesse nulle jusqu'à une certaine vitesse finale u, on a

$$
\begin{aligned}
E_k &= [pu]_0^u - \int_0^u p du \\
&= \left[\frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} u \right]_0^u - \int_0^u \frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} du \\
&= \left[\frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} u \right]_0^u + m \left[\frac{(c^2 - u^2)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \right]_0^u \\
&= \frac{mu^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + m \frac{(c^2 - u^2)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - mc^2 \\
&= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - mc^2
\end{aligned}
$$

On a donc

Énergie cinétique

$$E_k = (\gamma - 1) mc^2$$

(Le γ se calcule avec u qui est la vitesse de l'objet.)

Ce résultat est bien différent de $\frac{1}{2}mu^2$ qu'on avait dans la physique de Newton. Toutefois, à basse vitesse, on a

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right) mc^2 \approx \left(1 + \frac{u^2}{2c^2} + \ldots - 1 \right) mc^2 = \frac{1}{2} mu^2 + \ldots$$

Le lien est subtil, mais on obtient bien le même résultat à basse vitesse que dans la physique de Newton.

L'énergie et la masse

La relativité nous donne plus qu'une nouvelle formule de l'énergie cinétique. Elle nous donne aussi un lien entre la masse et l'énergie s'applique à toutes les formes d'énergie.

Énergie et masse

$$E_{masse} = mc^2$$

(Voyez comment on arrive à cette équation dans le document suivant :
https://physique.merici.ca/ondes/preuveErel.pdf)

L'équation indique donc que la masse correspond à une certaine quantité d'énergie et que l'énergie correspond à une certaine quantité de masse et ce, peu importe le type d'énergie. Cette énergie qui correspond à une certaine masse s'appelle l'*énergie de masse.*

Cette formule a été obtenue pour la première fois (de façon implicite) par Poincaré en 1900, mais c'est Einstein qui en fait un principe général en 1905. (Toutefois, on s'est rendu compte plus tard que les preuves de $E = mc^2$ données par Einstein étaient incomplètes. La première preuve correcte fut faite par Max von Laue en 1911 et une preuve encore plus générale fut faite par Felix Klein en 1918. C'est quand même ironique de constater que l'équation qu'on associe le plus souvent à Einstein ne fut pas obtenue en premier par Einstein et ne fut pas prouvée correctement par Einstein…)

Que signifie $E_{masse} = mc^2$?

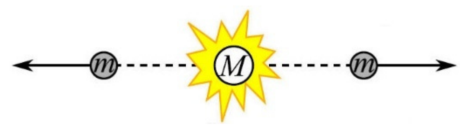
Contrairement à ce qu'on dit souvent, l'équation ne signifie pas qu'on peut transformer de la masse en énergie ou de l'énergie en masse. Ce n'est pas du tout ce que signifie cette équation. L'équation dit que la masse et l'énergie sont équivalentes. Voyons ce que cela signifie.

Dans un système fermé (aucune énergie ajoutée ou enlevée au système)**,** l'énergie est conservée. Puisque l'équation $E = mc^2$ montre que la masse et l'énergie sont équivalentes, la masse doit aussi être conservée. L'énergie et la masse avant une transformation sont donc toujours égales à l'énergie et la masse après une transformation si le système est fermé. Il faut cependant s'assurer de bien compter la masse totale en additionnant les masses des objets et la masse de toutes les forces d'énergie.

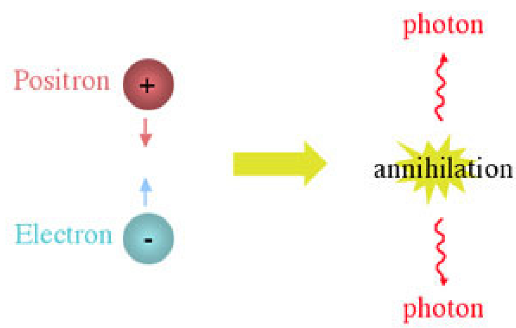
Supposons que deux balles de 2 kg (masse des objets quand ils ne se déplacent pas) arrivent avec des vitesses identiques pour faire une collision parfaitement inélastique. Après la collision, les deux balles forment un objet de 4 kg au repos et l'énergie cinétique s'est convertie en chaleur. Si on mesurait la masse de cet objet de 4 kg vraiment très précisément, on découvrirait alors que sa masse est plus grande que 4 kg parce que la chaleur, qui est une forme d'énergie, a une masse. Il semblerait donc que la masse ait augmenté dans cette situation. En réalité, elle est restée la même. Avant la collision, la masse totale est de

2 kg + 2 kg + la masse de l'énergie cinétique des balles. Après la collision, la masse est de 4 kg + la masse de l'énergie thermique. Puisque l'énergie thermique est égale à l'énergie cinétique, les masses sont identiques avant et après la collision. On verrait seulement la différence de masse avant et après la collision si on mesurait la masse des objets de 2 kg qui vont se frapper avant de leur donner de l'énergie cinétique.

Parfois, il arrive qu'une particule se désintègre en 2 particules plus légères (comme les particules appelées *pions* qui peuvent se désintégrer en 2 photons par exemple). Quand cela se produit, on pourrait facilement penser qu'une partie de la masse s'est transformée en énergie cinétique. C'est vrai que la masse au repos des particules après la désintégration est plus petite que la masse de la particule initiale, mais cela ne signifie pas que la masse totale a changé. Quand on ajoute la masse de l'énergie cinétique, on se rend compte que la masse reste la même. Supposons qu'une particule de masse M se désintègre en 2 particules de masse m. Avant la désintégration, la masse totale est égale à la masse de la particule de masse M. Après la désintégration, la masse totale est égale à la somme de la masse des 2 particules de masse m et de la masse de l'énergie cinétique de ces particules. En incluant la masse de l'énergie cinétique après la désintégration, cette somme est exactement égale à M, ce qui signifie que la masse totale du système n'a pas changé.



On mentionne souvent l'annihilation de matière et de l'antimatière comme un cas de transformation de masse en énergie. Quand une particule de matière (un électron par exemple) rencontre une particule d'antimatière du même type (un antiélectron, aussi appelé positron ou positon, dans le cas de l'électron), les deux particules disparaissent complètement (on dit qu'*elles s'annihilent*) en créant des photons.



astronomy.swin.edu.au/cosmos/P/Positron

Toutefois, de façon correcte, la masse ne s'est pas transformée en énergie dans ce cas. Les photons émis ont de l'énergie et donc de la masse. La masse totale de ces photons est égale à la masse des deux particules présente avant l'annihilation. L'énergie n'a pas changé et la masse n'a pas changé lors de l'annihilation.

Si le système n'est pas fermé, la masse va augmenter si on ajoute de l'énergie ou la masse va diminuer si on enlève de l'énergie au système. Le changement de masse se calcule avec le changement d'énergie avec $E = mc^2$.

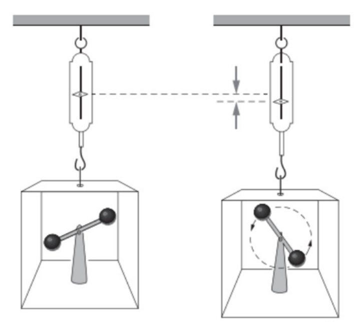
Si on soulève une brique, on donne de l'énergie au système brique-Terre puisque l'énergie gravitationnelle augmente. Cela signifie donc que la masse du système Terre-brique augmenter un peu. Pour la même raison, la masse du système Terre-Lune augmenterait si on donnait de l'énergie au système pour éloigner la Lune de la Terre. La masse augmenterait encore plus si on donnait assez d'énergie à la Lune pour qu'elle quitte la Terre. Ainsi, la Terre et la Lune ensemble ont une masse inférieure à ce qu'on obtiendrait si la Terre et la Lune étaient séparées. La différence de masse est liée à la différence d'énergie par $E = mc^2$.

De la même façon, la masse de l'atome d'hydrogène augmente si on donne de l'énergie à un électron dans les orbitales. Si on donne assez d'énergie pour arracher l'électron, la masse va augmenter encore plus. Cela signifie que la masse d'un proton et d'un électron séparés est plus grande que la masse de l'atome d'hydrogène.

Dans la plupart des cas, le pourcentage de variation de masse est tellement petit qu'il est impossible de le mesurer. On n'est jamais parvenu à mesurer le changement de masse quand on soulève une brique ni quand on enlève un électron d'un atome.

Le seul cas où le changement de masse est assez important pour être mesurable que l'on verra ici, ce sont les noyaux atomiques. Si vous arrachez un proton à un noyau atomique, vous devez fournir de l'énergie, ce qui fera augmenter la masse. Si on arrache, l'un après l'autre, tous les protons et neutrons d'un noyau, la masse augmente encore plus. Cela signifie que la masse du noyau atomique est plus petite que la masse des protons et des neutrons quand ils sont séparés. Dans ce cas, il y a une variation de l'ordre de 1 % et cette variation a été mesurée. Nous examinerons cette variation de masse au chapitre traitant de la physique nucléaire.

Imaginons maintenant que dans une boite, il y a un objet qui peut tourner. Si on met l'objet en rotation, la masse totale de la boite va augmenter parce que l'objet a maintenant de l'énergie cinétique et que, comme l'énergie cinétique a une masse, la masse augmente. La différence de masse est égale à la masse de l'énergie cinétique de l'objet en rotation. Il y a toutefois une petite subtilité. La masse de la boite augmente pourvu que l'énergie qui a permis de mettre les masses en rotation provienne de l'extérieur de la boite (c'est alors un système ouvert). Ce serait le cas si le moteur qui a mis les masses en rotation est branché dans une prise de courant à l'extérieur de la boite.



physics.stackexchange.com/questions/411022/an-experiment-about-relativistic-effect-on-weight

Toutefois, il n'y aurait pas de différence de masse si le moteur était alimenté par une batterie qui est à l'intérieur de la boite (c'est alors un système fermé). Dans ce cas, on gagne de la masse puisque l'énergie cinétique des masses a augmenté, mais on perd de la masse parce que la batterie a perdu de l'énergie. Comme l'énergie gagnée en énergie cinétique est alors égale à l'énergie perdue par la batterie, il n'y a pas de variation d'énergie dans la boite et donc pas de variation de masse.

Calcul de l'énergie à partir de la différence de masse

Même si la masse reste identique dans un système fermé, on peut parfois calculer l'énergie libérée ou l'énergie absorbée lors d'une transformation à partir du changement de masse.

On peut le faire en considérant uniquement les masses des objets sans compter la masse de leur énergie cinétique. Voici un exemple de cette façon de procéder.

Lors de l'explosion d'une bombe atomique, l'énergie et la masse sont conservées. Une partie de l'énergie interne des noyaux atomiques s'est transformée en énergie cinétique des atomes après l'explosion. La masse de l'énergie cinétique des fragments est exactement égale à la masse de l'énergie libérée par les atomes. Toutefois, si on retrouvait, longtemps après l'explosion, tous les atomes provenant de l'explosion de la bombe, on constaterait que la masse est plus petite que celle de la bombe avant l'explosion. C'est normal que la masse soit plus petite parce que les fragments de l'explosion auront perdu leur énergie cinétique. La masse de cette énergie cinétique n'étant plus présente, la masse totale baisse d'une valeur correspondant à la masse de cette énergie. Comme l'énergie cinétique était égale à l'énergie libérée, la baisse de masse est aussi égale à la masse de l'énergie libérée par l'explosion. La différence de masse n'est souvent pas très grande. En effet, l'énergie équivalente à un gramme de matière

$$\begin{aligned} E_{masse} &= mc^2 \\ &= 0,001kg \cdot \left(3\times 10^8 \tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= 9\times 10^{13} J \end{aligned}$$

correspond environ à l'énergie libérée lors de l'explosion de la bombe atomique d'Hiroshima ! Ainsi, tous les fragments de cette bombe après l'explosion avaient, après avoir perdu leur énergie cinétique, une masse environ 1 g plus petite que la masse de la bombe avant l'explosion.

L'énergie relativiste

L'énergie relativiste E d'un objet est définie comme étant la somme de l'énergie de masse de l'objet quand il est au repos et de l'énergie cinétique de l'objet.

Énergie relativiste = Énergie de masse + Énergie cinétique

On a donc

$$E = mc^2 + E_k = mc^2 + (\gamma - 1) mc^2$$

(Dans ces notes, les masses m ou M sont toujours la masse des objets quand ils sont au repos.) En simplifiant, on obtient alors l'équation suivante.

Énergie relativiste

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} mc^2 = \gamma mc^2$$

(Le γ se calcule avec u qui est la vitesse de l'objet.)

Il y a une variante à cette équation. Il s'agit de la formule qui donne la masse totale d'un objet en mouvement. Un objet qui se déplace a de l'énergie cinétique et cette énergie possède une masse. La masse totale de l'objet en mouvement est donc plus grande que celle de l'objet au repos. La masse totale de l'objet est la somme de sa masse au repos et de la masse de son énergie cinétique.

$$\begin{aligned} m_{tot} &= m + m_{\text{Énergie cinétique}} \\ &= m + \frac{E_k}{c^2} \\ &= m + \frac{(\gamma - 1) mc^2}{c^2} \\ &= m + (\gamma - 1) m \\ &= \gamma m \end{aligned}$$

Cette équation confirme que la masse de l'objet en mouvement est plus grande que celle de l'objet au repos (puisque γ est toujours plus grand que 1). La masse n'est pas plus grande parce qu'il y a plus de matière, mais parce que la masse de l'énergie cinétique s'ajoute à la masse de l'objet au repos. Cette équation de la masse totale en fonction de la vitesse est en fait l'équation de l'énergie relativiste $E = \gamma mc^2$ divisée par c^2.

L'équation de la masse totale d'un objet en mouvement n'est pas très utile. Ce qui nous intéresse vraiment quand on objet est en mouvement, c'est sa quantité de mouvement ou son énergie.

L'électronvolt

Une petite note pour terminer cette section. Quand on calcule l'énergie d'une particule subatomique (comme un électron ou un proton), les valeurs obtenues sont généralement très petites si on les calcule en joules. Les physiciens utilisent généralement les électronvolts pour mesurer l'énergie de ces petites particules. Il y a une définition précise de l'électronvolt (qu'on verra dans le cours électricité et magnétisme), mais on peut se contenter ici de la simple définition suivante.

L'électronvolt (*eV*)

$$1eV = 1{,}602 \times 10^{-19} J$$

Exemple 8.13.1

Quelle est l'énergie de masse d'un électron, dont la masse est de 9,11 x 10^{-31} kg ?

L'énergie de masse est

$$\begin{aligned} E_{masse} &= mc^2 \\ &= 9{,}11\times10^{-31}kg\cdot\left(3\times10^8\,\tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= 8{,}18\times10^{-14}J \\ &= 511keV \end{aligned}$$

Exemple 8.13.2

Quelle est l'énergie cinétique d'un électron allant à 0,8*c* ?

L'énergie cinétique est

$$\begin{aligned} E_k &= (\gamma-1)mc^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0{,}8c)^2}{c^2}}}-1\right)mc^2 \\ &= \left(\frac{5}{3}-1\right)mc^2 \\ &= \frac{2}{3}mc^2 \end{aligned}$$

Comme on a calculé à l'exemple précédent que mc^2 = 511 keV pour un électron, on arrive à

$$\begin{aligned} E_k &= \left(\frac{2}{3}\right)\cdot 511keV \\ &= 340keV \end{aligned}$$

Notez qu'avec $\frac{1}{2}mu^2$, on aurait obtenu 164 keV.

Exemple 8.13.3

Combien d'énergie doit-on fournir à un vaisseau de 100 tonnes initialement au repos pour qu'il se déplace à 0,8*c* ?

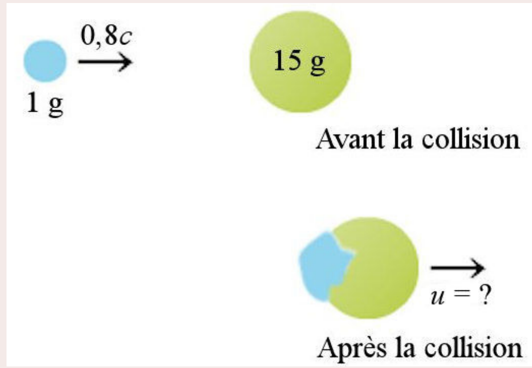
L'énergie est égale à la variation d'énergie relativiste (ou d'énergie cinétique).

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_f - E_i \\ &= \gamma_f mc^2 - \gamma_i mc^2 \\ &= (\gamma_f - \gamma_i)mc^2 \\ &= \left(\frac{5}{3}-1\right)\cdot 100\,000kg\cdot\left(3\times10^8\,\tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= 6\times10^{21}J \end{aligned}$$

Comme la production mondiale d'énergie est d'environ 6 x 10^{20} J chaque année (chiffre de 2021), l'énergie qu'on doit fournir au vaisseau correspond à 10 ans de production d'énergie de toute la production mondiale ! Ce n'est pas demain qu'on va réussir cet exploit ! Ça a l'air si facile dans les films de science-fiction…

Exemple 8.13.4

Un objet de 1 gramme se déplaçant à 0,8*c* fait une collision parfaitement inélastique en une dimension avec un objet de 15 g au repos.



physics.tutorvista.com/momentum/inelastic-collision.html

a) Quelle est la vitesse de l'objet de 16 g après la collision ?

Comme dans toute collision, la quantité de mouvement est conservée. Avant la collision, la quantité de mouvement est

$$\begin{aligned} p_{avant} &= \gamma m u \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(0,8)^2}} \cdot 0,001kg \cdot 0,8c \\ &= 400\,000 \tfrac{kgm}{s} \end{aligned}$$

Après la collision, la quantité de mouvement est

$$\begin{aligned} p_{après} &= \gamma m u \\ &= \gamma \cdot 0,016kg \cdot u \end{aligned}$$

Puisque la quantité de mouvement est conservée, on a

$$p_{avant} = p_{après}$$
$$400\,000 \tfrac{kgm}{s} = \gamma \cdot 0,016kg \cdot u$$
$$2,5 \times 10^7 \tfrac{m}{s} = \gamma u$$

Il ne reste qu'à isoler *u* dans cette équation.

$$2,5 \times 10^7 \tfrac{m}{s} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} u$$
$$2,5 \times 10^7 \tfrac{m}{s} \cdot \sqrt{1-\left(\tfrac{u}{c}\right)^2} = u$$
$$\left(2,5 \times 10^7 \tfrac{m}{s}\right)^2 \cdot \left(1-\left(\tfrac{u}{c}\right)^2\right) = u^2$$

$$\left(2,5\times10^{7}\,\tfrac{m}{s}\right)^{2}-\frac{\left(2,5\times10^{7}\,\frac{m}{s}\right)^{2}}{c^{2}}u^{2}=u^{2}$$

$$\left(2,5\times10^{7}\,\tfrac{m}{s}\right)^{2}=u^{2}+\frac{\left(2,5\times10^{7}\,\frac{m}{s}\right)^{2}}{c^{2}}u^{2}$$

$$\left(2,5\times10^{7}\,\tfrac{m}{s}\right)^{2}=\left(1+\frac{\left(2,5\times10^{7}\,\frac{m}{s}\right)^{2}}{c^{2}}\right)u^{2}$$

$$\left(2,5\times10^{7}\,\tfrac{m}{s}\right)^{2}=\tfrac{145}{144}u^{2}$$

$$u=\sqrt{\tfrac{144}{145}}\cdot2,5\times10^{7}\,\tfrac{m}{s}$$

$$u=2,4914\times10^{7}\,\tfrac{m}{s}$$

$$u=0,08305c$$

(Avec les lois de Newton, on aurait eu $u = 0,05c$.)

b) Combien d'énergie cinétique s'est perdue dans cette collision ?

Avant la collision, l'énergie cinétique est

$$\begin{aligned}E_{k\ avant}&=(\gamma-1)mc^{2}\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{1-(0,8)^{2}}}-1\right)\cdot0,001kg\cdot\left(3\times10^{8}\,\tfrac{m}{s}\right)^{2}\\&=6\times10^{13}\,J\end{aligned}$$

Après la collision, l'énergie cinétique est

$$\begin{aligned}E_{k\ après}&=(\gamma-1)mc^{2}\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{1-(0,08305)^{2}}}-1\right)\cdot0,016kg\cdot\left(3\times10^{8}\,\tfrac{m}{s}\right)^{2}\\&=4,9913\times10^{12}\,J\end{aligned}$$

Le changement d'énergie cinétique est donc

$$\begin{aligned}\Delta E_{k}&=4,9913\times10^{12}\,J-6\times10^{13}\,J\\&=-5,5\times10^{13}\,J\end{aligned}$$

L'énergie cinétique a donc baissé de 5,5 x 10^{13} J dans cette collision. (Cette énergie serait normalement sous forme de chaleur après une collision inélastique, mais il est impossible ici qu'un objet de 16 g puisse absorber une telle quantité de chaleur sans carrément exploser puisque cette énergie est pratiquement égale à l'énergie libérée par la bombe atomique d'Hiroshima.)

Une relation entre E et p

Il y a un lien intéressant entre E et p. Calculons ce que vaut $E^2 - (pc)^2$.

$$\begin{aligned} E^2 - (pc)^2 &= \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 u^2 c^2 \\ &= \gamma^2 \left(c^2 - u^2\right) m^2 c^2 \\ &= \gamma^2 \left(1 - \tfrac{u^2}{c^2}\right) m^2 c^4 \\ &= \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \left(1 - \tfrac{u^2}{c^2}\right) m^2 c^4 \\ &= m^2 c^4 \end{aligned}$$

On a donc

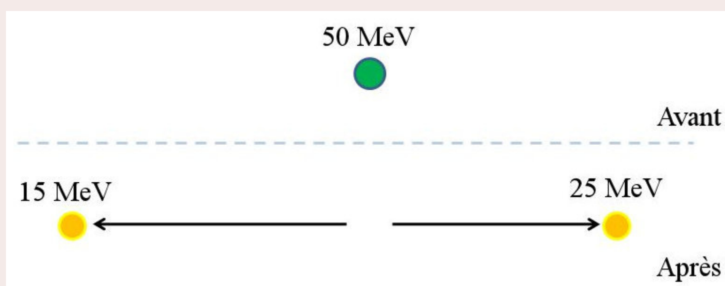
Lien entre l'énergie relativiste et la quantité de mouvement

$$E^2 - (pc)^2 = \left(mc^2\right)^2$$

Notez que le terme de droite est un invariant relativiste. Tous les observateurs obtiennent la même valeur quand ils calculent $E^2 - (pc)^2$.

Exemple 8.13.5

Une particule au repos dont l'énergie de masse est 50 MeV se désintègre en deux particules qui partent dans des directions opposées. L'énergie de masse d'une de ces particules est de 15 MeV et l'énergie de masse de l'autre particule est de 25 MeV. Quelles sont les vitesses des deux particules ?



Comme dans tout processus, l'énergie relativiste est conservée. Puisque l'énergie de masse est de 50 MeV avant la désintégration et de 40 MeV après la désintégration, l'énergie cinétique des deux particules après la désintégration doit être de 10 MeV.

Puisque la quantité de mouvement est nulle avant la désintégration, elle doit aussi être nulle après la désintégration. On a donc les équations suivantes.

$$E_{k1} + E_{k2} = 10MeV$$
$$p_1 + p_2 = 0$$

En utilisant les formules de p et E_k, ces équations deviennent

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u_1}{c}\right)^2}}-1\right)\cdot 15MeV+\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u_2}{c}\right)^2}}-1\right)\cdot 25MeV=10MeV$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u_1}{c}\right)^2}}\right)\cdot\frac{15MeV}{c^2}u_1+\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u_2}{c}\right)^2}}\right)\cdot\frac{25MeV}{c^2}u_2=0$$

On a alors deux équations avec deux inconnus, qu'on pourrait résoudre.

Mais comme c'est très difficile de résoudre ce système, on va utiliser une autre approche en utilisant l'équation suivante.

$$E^2-(pc)^2=\left(mc^2\right)^2$$

Ainsi, puisque la quantité de mouvement est conservée, on a

$$p_1=-p_2$$
$$p_1^2=p_2^2$$
$$p_1^2c^2=p_2^2c^2$$
$$E_1^2-m_1^2c^4=E_2^2-m_2^2c^4$$

Puisque

$$E_1+E_2=50MeV$$

on a

$$E_1^2-m_1^2c^4=\left(50MeV-E_1\right)^2-m_2^2c^4$$
$$E_1^2-m_1^2c^4=\left(50MeV\right)^2-100MeV\cdot E_1+E_1^2-m_2^2c^4$$
$$-m_1^2c^4=\left(50MeV\right)^2-100MeV\cdot E_1-m_2^2c^4$$

En isolant l'énergie de la particule 1, on arrive à

$$E_1=\frac{\left(50MeV\right)^2-m_2^2c^4+m_1^2c^4}{100MeV}$$

Avec les valeurs des masses, on arrive à

$$\begin{aligned}E_1&=\frac{\left(50MeV\right)^2-\left(25MeV\right)^2+\left(15MeV\right)^2}{100MeV}\\&=21MeV\end{aligned}$$

De là, on trouve assez facilement que

$$\begin{aligned} E_2 &= 50MeV - E_1 \\ &= 29MeV \end{aligned}$$

Comme l'énergie relativiste est la somme de l'énergie de masse et de l'énergie cinétique, on trouve facilement que l'énergie cinétique de la particule 1 est de 6 MeV et que celle de la particule 2 est de 4 MeV. La somme de ces énergies cinétiques est bel et bien 10 MeV comme prévu.

On peut ensuite trouver la valeur de γ pour chaque particule avec la formule de l'énergie relativiste.

$$\begin{aligned} E_1 &= \gamma_1 m_1 c^2 \\ 21MeV &= \gamma_1 \cdot 15MeV \\ \gamma_1 &= 1,4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} E_2 &= \gamma_2 m_2 c^2 \\ 29MeV &= \gamma_1 \cdot 25MeV \\ \gamma_1 &= 1,16 \end{aligned}$$

Avec γ, on trouve les vitesses.

$$1,4 = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u_1}{c}\right)^2}} \qquad 1,16 = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u_2}{c}\right)^2}}$$

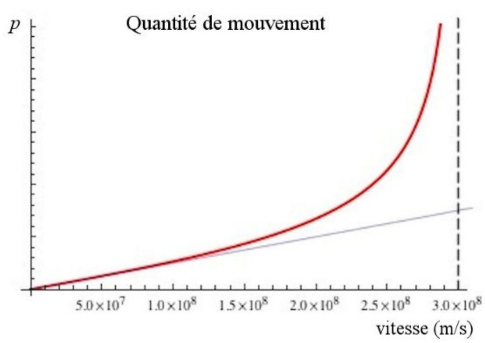
$$u_1 = 0,69985c \qquad u_2 = 0,50679c$$

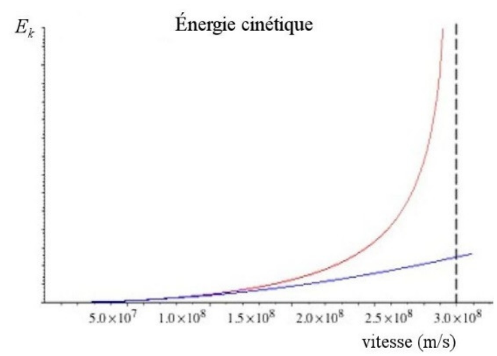
Si E est conservée, alors p doit aussi l'être

Petite note intéressante. Si l'énergie relativiste est conservée dans une collision, alors on peut prouver, en utilisant le principe de relativité, que la quantité de mouvement doit automatiquement être conservée aussi. Vous pouvez voir la preuve ici : http://physique.merici.ca/ondes/preuveEetp2.pdf

La vitesse limite

Regardons les graphiques de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique des objets en fonction de la vitesse. Sur chaque graphique, on retrouve le graphique des valeurs selon la physique de Newton (en bleu) et les valeurs selon la physique d'Einstein (en rouge).





On remarque trois choses.

1) Les valeurs données par les formules relativistes sont toujours plus grandes que celles données par les formules non relativistes. On pouvait voir un exemple de cela à l'exemple 8.13.1 (340 keV vs 164 keV).

2) Les valeurs sont pratiquement identiques pour des vitesses petites (disons inférieur à 20 % de la vitesse de la lumière). Les équations non relativistes sont donc de très bonnes approximations à basses vitesses.

3) Les valeurs de p et E_k sont infinies à $u = c$.

Ce dernier point montre qu'il est impossible qu'un objet puisse atteindre la vitesse de la lumière, car il faudra une énergie infinie pour que l'objet atteigne cette vitesse. La vitesse des objets ne peut donc dépasser celle de la lumière.

Vitesse limite

Aucun objet massif ne peut atteindre la vitesse de la lumière.

Les médias ne semblent pas toujours au courant de ce fait.

www.epicfail.com/2012/10/16/news-fail-5/

On peut cependant atteindre cette vitesse si la masse est nulle. Dans ce cas, l'énergie relativiste, qui est

$$E = \gamma mc^2$$

peut ne pas être infini même si γ est infini, car $m = 0$. Mais alors, l'équation donne $E = 0$ si γ n'est pas infini. Si l'énergie est nulle, cela veut dire que cet objet n'existe pas. Un objet de masse nulle ne peut donc exister que si sa vitesse est égale à celle de la lumière.

La seule chose qui a une masse nulle dans les théories actuelles est le photon, c'est-à-dire une particule de lumière (qu'on va rencontrer dans un chapitre suivant). Pour les photons, on a donc

Vitesse des photons

Les photons vont toujours à la vitesse de la lumière, car leur masse est nulle.

De plus, pour les photons, on a (on va utiliser E_γ et p_γ pour l'énergie et la quantité de mouvement d'un photon)

$$E_\gamma^2 - \left(p_\gamma c\right)^2 = \left(mc^2\right)^2$$

$$E_\gamma^2 - \left(p_\gamma c\right)^2 = 0$$

Puisque m est 0. On a donc

Lien entre la quantité de mouvement et l'énergie des photons

$$E_\gamma = p_\gamma c$$

Plus vite que *c*

Le fait que les objets ne peuvent dépasser la vitesse de la lumière ne signifie pas que rien ne peut aller plus vite que la vitesse de la lumière. Certaines « choses » peuvent aller plus vite que la lumière, mais elles ne sont pas faites de matière.

Par exemple, le spot lumineux fait par un pointeur laser sur un écran peut aller plus vite que la lumière. En tournant le pointeur de 5°, le spot lumineux se déplace sur l'écran. Plus l'écran est loin, plus le déplacement du pointeur est important. Si l'écran était à 1 milliard de km et qu'on tournait le pointeur de 5° en 1 seconde, le spot lumineux se déplacerait de 87 000 000 km en 1 seconde sur l'écran. Cette vitesse est plus grande que celle de la lumière. Toutefois, aucune particule n'a fait ce déplacement puisque le spot est constamment fait de nouveaux photons.

RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS

Facteur γ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

La dilatation du temps

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Contraction des longueurs

$$L = L_0\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}} = \frac{L_0}{\gamma}$$

Approximations du facteur γ si $v << c$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}}} \approx 1+\frac{v^2}{2c^2}+\dots$$

$$\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}} \approx 1-\frac{v^2}{2c^2}+\dots$$

Effet Doppler relativiste

$$T' = T_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

$$f' = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

(v est la vitesse de déplacement de la source pour un observateur immobile.) Nous avons toujours notre convention de signe pour la vitesse. Le sens positif va de la source vers l'observateur. La vitesse de la source est donc positive si elle se dirige vers l'observateur et négative si elle s'éloigne de l'observateur.

Transformations de Lorentz (1)

$$x' = \gamma(x-vt) \qquad x = \gamma(x'+vt')$$

$$y' = y \qquad y = y'$$

$$z' = z \qquad z = z'$$

$$t' = \gamma\left(t-\frac{vx}{c^2}\right) \qquad t = \gamma\left(t'+\frac{vx'}{c^2}\right)$$

(v est la vitesse d'un observateur selon un autre observateur.)

Transformations de Lorentz (2)

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x-v\Delta t) \qquad \Delta x = \gamma(\Delta x'+v\Delta t')$$

$$\Delta y' = \Delta y \qquad \Delta y = \Delta y'$$

$$\Delta z' = \Delta z \qquad \Delta z = \Delta z'$$

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t-\frac{v\Delta x}{c^2}\right) \qquad \Delta t = \gamma\left(\Delta t'+\frac{v\Delta x'}{c^2}\right)$$

(v est la vitesse d'un observateur selon un autre observateur.)

Intervalle

$$I = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$
$$I' = I$$

Temps propre entre deux évènements

$$\Delta t_0 = \tfrac{1}{c}\sqrt{I}$$

Distance propre entre deux évènements

$$\Delta \sigma = \sqrt{-I}$$

Transformations des vitesses

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} \qquad u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} \qquad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}$$

$$u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} \qquad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}$$

(v est la vitesse d'un observateur selon un autre observateur.)

Quantité de mouvement

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Énergie cinétique

$$E_k = (\gamma - 1) mc^2$$

(Le γ se calcule avec u qui est la vitesse de l'objet.)

Énergie et masse

$$E_{masse} = mc^2$$

Énergie relativiste

Énergie relativiste = Énergie interne + Énergie cinétique

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} mc^2 = \gamma mc^2$$

Lien entre l'énergie relativiste et la quantité de mouvement

$$E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2$$

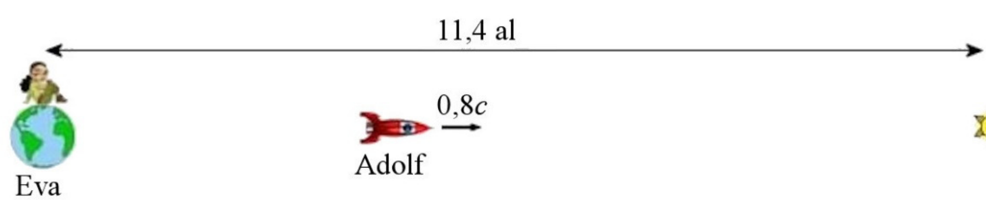
Lien entre la quantité de mouvement et l'énergie des photons

$$E_\gamma = p_\gamma c$$

EXERCICES

8.7 La dilatation du temps

1. Adolf part à 80 % de la vitesse de la lumière pour aller à l'étoile Procyon, située à 11,4 al de la Terre.



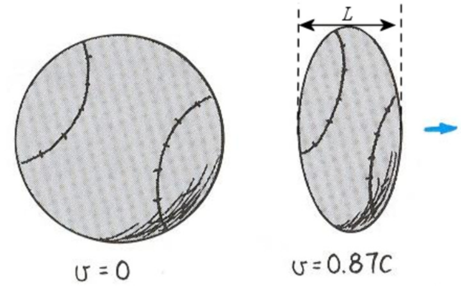
a) Quelle est la durée du voyage selon Éva, qui est restée sur Terre ?
b) Quelle est la durée du voyage selon Adolf ?

2. Une horloge reste sur Terre pendant qu'une autre horloge se déplace par rapport à la Terre avec une vitesse de 0,6*c*. Initialement, les deux horloges étaient synchronisées. L'horloge va à une distance de 90 millions de km (selon les observateurs sur Terre) et revient sur Terre à la même vitesse. Quel sera le retard de l'horloge en mouvement par rapport à l'horloge restée sur Terre une fois qu'elle est revenue sur Terre ?

3. Deux jumeaux, Octave et Auguste, quittent la Terre en même temps le jour de leur 20^e^ anniversaire pour aller sur une autre planète située à 12 al. Octave fait le voyage à 0,8*c* et Auguste fait le voyage à 0,6*c*. Quel sera l'âge des deux jumeaux quand Auguste va arriver sur la planète ?

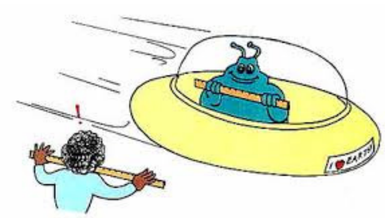
8.8 La contraction des longueurs

4. Une balle de baseball a un diamètre de 7,2 cm au repos. Quelle sera la largeur de la balle (L sur la figure) si elle se déplace à 87 % de la vitesse de la lumière ?



www.mattshields.com/?cat=14&paged=2

5. Un extraterrestre passe devant Tom. Tom et l'extraterrestre tiennent tous les deux une règle de 1 m (au repos) tel qu'illustré sur la figure. Selon Tom, la règle que tient l'extraterrestre n'a qu'une longueur de 80 cm.



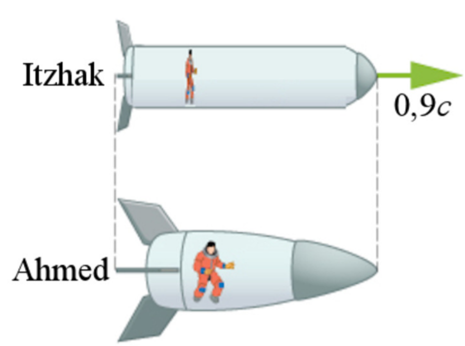
www.quarkology.com/12-physics/92-space/92E-relativity.html

a) Quelle est la vitesse de l'extraterrestre selon Tom ?
b) Quelle est la longueur de la règle de Tom selon l'extraterrestre ?

6. La distance entre la Terre et une étoile est de 500 al selon un observateur sur Terre. À quelle vitesse doit aller un vaisseau pour que la distance entre la Terre et l'étoile soit de 20 al selon les observateurs dans le vaisseau ?

7. Raoul veut se rendre à l'étoile Bételgeuse, située à 643 al de la Terre (selon un observateur sur Terre). À quelle vitesse doit-il aller pour que le voyage dure seulement 20 ans selon Raoul ?

8. Ahmed regarde le vaisseau d'Itzhak passer à 0,9c. Ahmed remarque alors que, selon lui, les deux vaisseaux ont la même longueur. Quel est le rapport des longueurs des vaisseaux selon Itzhak ?

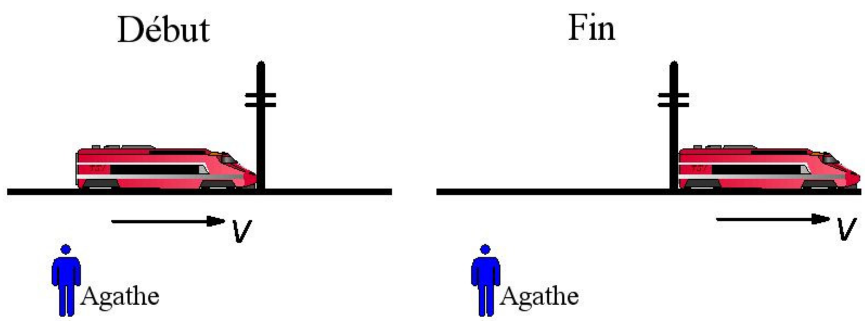


s3-us-west-2.amazonaws.com/oa2/docfiles/54662e916f7065735bdd0100/54662e916f7065735bdd0100.html

9. Un muon ne vit que durant 2,2 μs quand il est au repos. On lance les muons nouvellement créés à un bout d'un tunnel et on les capte à l'autre bout du tunnel. Le tunnel a 1 km de long.

a) À quelle vitesse doit aller un muon pour qu'il puisse parcourir 1 km durant sa vie ?
b) À cette vitesse, quelle est la longueur du tunnel selon les muons ?

10. Agathe mesure le temps qu'il faut pour qu'un train allant à 80 % de la vitesse de la lumière passe devant un poteau. Elle démarre son chronomètre quand le devant du train est vis-à-vis d'un poteau et elle l'arrête quand le derrière du train est vis-à-vis du poteau.



renshaw.teleinc.com/papers/simiee2/simiee2.stm

Dans le train, Juste mesure également le temps qu'il faut pour que le train passe devant le poteau en procédant de la même façon qu'Agathe. Le train a une longueur de 2 000 m quand il est au repos.

a) Quelle est la longueur du train selon Agathe ?
b) Combien de temps faut-il pour que le train passe devant le poteau selon Agathe ?
c) Combien de temps faut-il pour que le train passe devant le poteau selon Juste ?

8.9 L'effet Doppler avec la lumière (prise 2)

11. Une source sur Terre émet un signal avec une fréquence de 98,1 MHz. Quelle est la fréquence perçue par Terence s'il est dans un vaisseau spatial allant à 95 % de la vitesse de la lumière…

a) s'il se dirige vers la Terre ?
b) s'il s'éloigne de la Terre ?

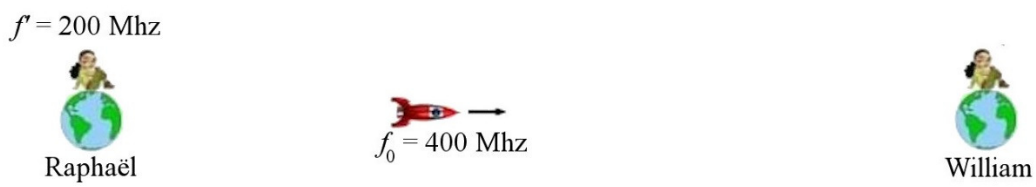
12. Une étoile émet une onde lumineuse ayant une longueur d'onde de 550 nm (vert). Quelle est la longueur d'onde de l'onde reçue par un observateur qui voit l'étoile s'éloigner de lui à 30 % de la vitesse de la lumière ?

13. À quelle vitesse un observateur doit-il se diriger vers un chandail rouge (longueur d'onde de la lumière de 650 nm) pour que le chandail lui paraisse bleu (longueur d'onde de 470 nm) ?

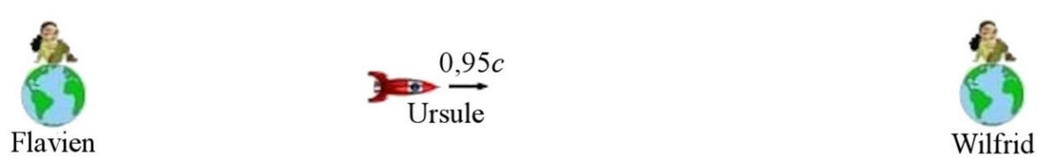
www.pinterest.com/pin/30610472438270660/

14. Une source sur Terre émet une onde électromagnétique ayant une fréquence de 100 GHz vers un vaisseau se dirigeant vers la Terre à 60 % de la vitesse de la lumière. L'onde se réfléchit sur le vaisseau et revient vers la Terre. Quelle est alors la fréquence de l'onde réfléchie captée par les observateurs sur Terre ?

15. Dans la situation suivante, quelle est la fréquence captée par William si Raphaël capte une fréquence de 200 MHz et que le vaisseau émet une fréquence de 400 MHz ?

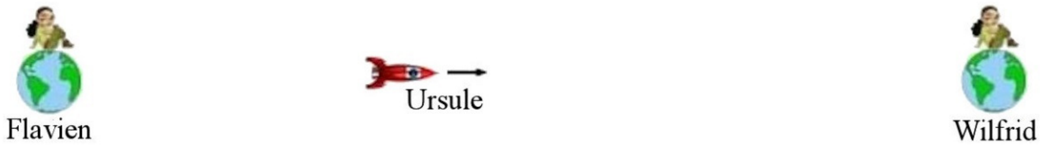


16. Dans la situation suivante, le vaisseau d'Ursule émet un flash de lumière toutes les 10 secondes (temps selon Ursule).



a) Quel est le temps entre les flashs selon ce qu'observe Wilfrid ?
b) Quel est le temps entre les flashs selon ce que voit Wilfrid ?
c) Quel est le temps entre les flashs selon ce qu'observe Flavien ?
d) Quel est le temps entre les flashs selon ce que voit Flavien ?

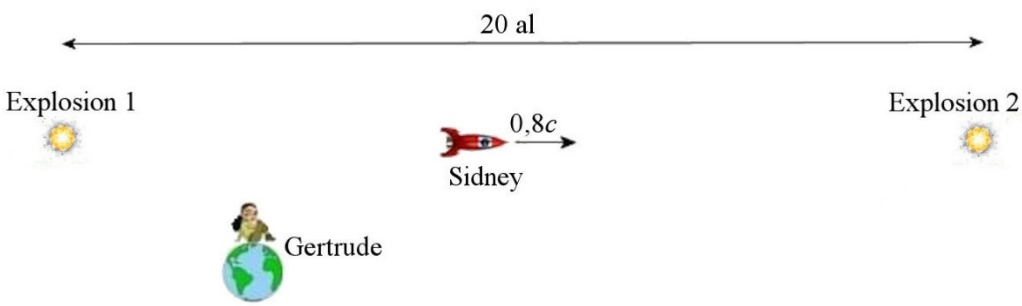
17. Dans la situation suivante, le vaisseau d'Ursule émet des flashs de lumière à intervalle régulier. Wilfrid voit des flashs toutes les 4 secondes et Flavien voit des flashs toutes les 9 secondes.



a) Quel est le temps entre les flashs selon Ursule ?
b) Quelle est la vitesse du vaisseau d'Ursule selon Flavien et Wilfrid ?

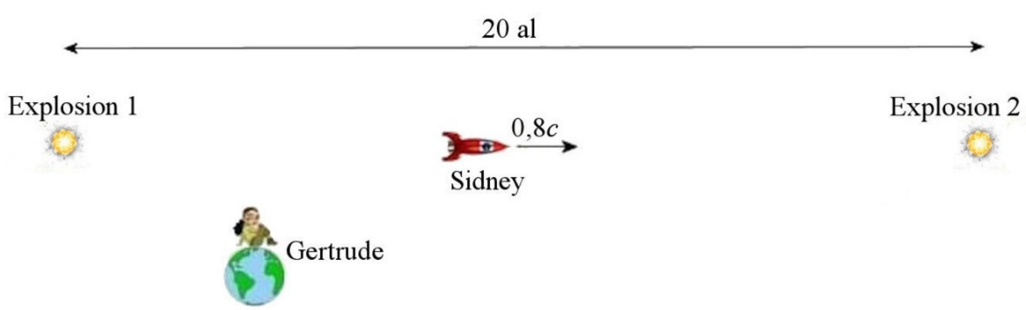
8.10 Les transformations de Lorentz

18. Selon Gertrude, les deux explosions sont simultanées et distantes de 20 al.



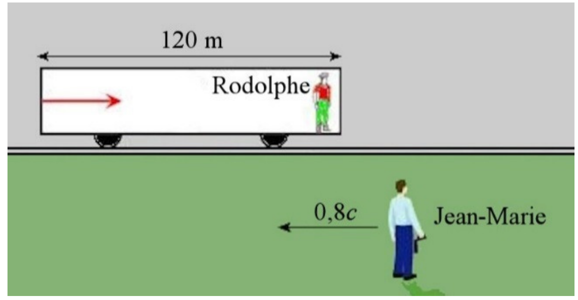
a) Quel est le temps entre les explosions selon Sidney ? (Déterminez aussi quelle explosion s'est produite en premier selon Sidney.)
b) Quelle est la distance entre les endroits où il y a eu les explosions selon Sidney ?

19. Selon Gertrude, l'explosion 2 s'est produite 2 ans avant l'explosion 1 et la distance entre les deux endroits où il y a eu les explosions est de 20 al.



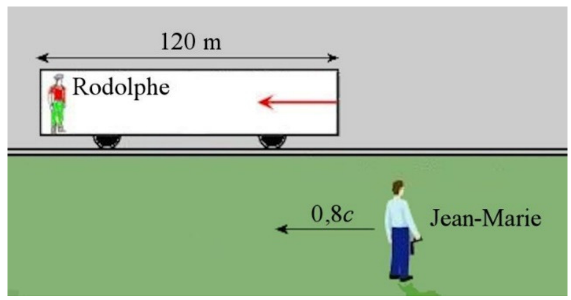
a) Quel est le temps entre les explosions selon Sidney ? (Déterminez aussi quelle explosion s'est produite en premier selon Sidney.)
b) Quelle est la distance entre les endroits où il y a eu les explosions selon Sidney ?

20. Un rayon lumineux part de l'arrière d'un train pour se diriger vers le devant du train. Ce train avance à une vitesse de 0,8c par rapport au sol. Sur le bord de la voie ferrée, Jean-Marie regarde le train passer. La figure suivante vous illustre la situation selon le point de vue de Rodolphe, qui est dans le train. Combien de temps s'écoule-t-il entre le départ de la lumière à l'arrière du train et l'arrivée du rayon à l'avant du train selon Jean-Marie ?

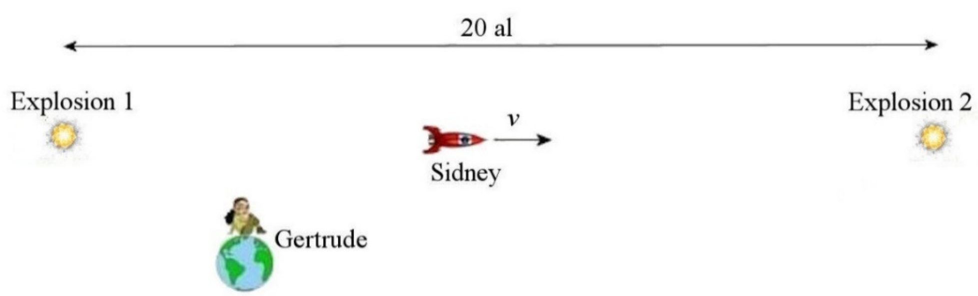


hmmthatsfunny.wordpress.com

21. Un rayon lumineux part de l'avant d'un train pour se diriger vers l'arrière du train. Ce train avance à une vitesse de 0,8c par rapport au sol. Sur le bord de la voie ferrée, Jean-Marie regarde le train passer. La figure suivante vous illustre la situation selon le point de vue de Rodolphe, qui est dans le train. Combien de temps s'écoule-t-il entre le départ de la lumière à l'avant du train et l'arrivée du rayon à l'arrière du train selon Jean-Marie ?

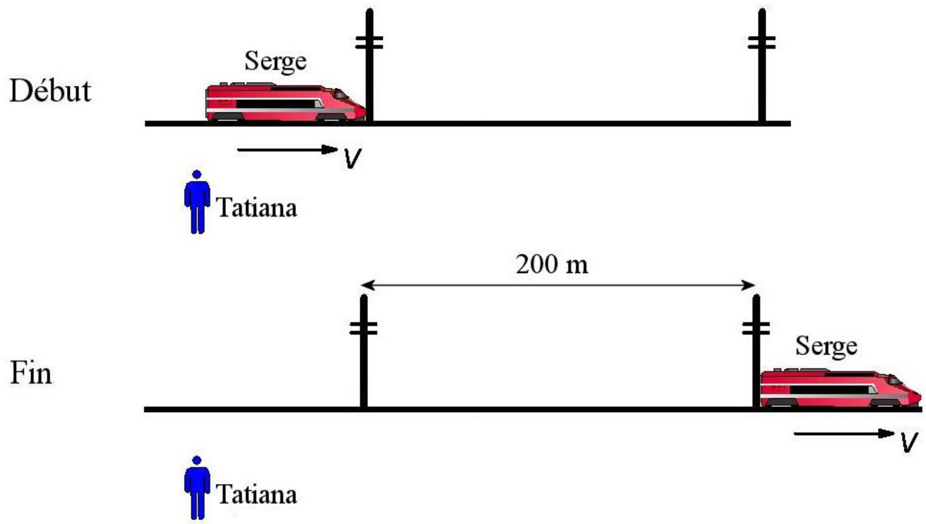


22. Dans la situation montrée sur la figure, Gertrude mesure que l'explosion 2 s'est produite 4 ans avant l'explosion 1.



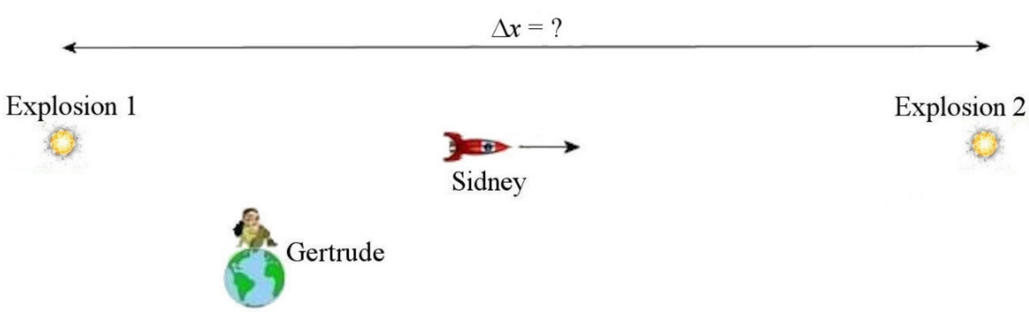
a) Quelle doit être la vitesse de Sidney pour que les explosions soient simultanées pour lui ? (Même si on a dessiné le vaisseau allant vers la droite, il est possible qu'il doive aller vers la gauche pour qu'il observe que les explosions soient simultanées.)
b) Quelle est la distance entre les évènements selon Sydney ? (Cette distance est la distance propre puisque c'est la distance entre les évènements pour un observateur qui observe que les évènements sont simultanés.)

23.Serge et Tatiana mesurent tous les deux le temps que ça prend pour qu'un train allant à 60 % de la vitesse de la lumière passe d'un poteau à un autre. La distance entre les poteaux est de 200 m selon Tatiana. Le train a une longueur de 70 m selon Tatiana. Ils démarrent leur chronomètre quand le devant du train est vis-à-vis du premier poteau et ils l'arrêtent quand le derrière du train est vis-à-vis du deuxième poteau.



a) Quel est le temps mesuré par Tatiana ?
b) Quel est le temps mesuré par Serge ?
c) Quelle est la distance entre les poteaux selon Serge ?

24.Dans la situation montrée sur la figure, Sidney observe que l'explosion 2 s'est produite 8 ans avant l'explosion 1 et que la distance entre les endroits où se sont produites les explosions est de 5 al. (Les directions des vitesses sont correctement illustrées sur la figure.)

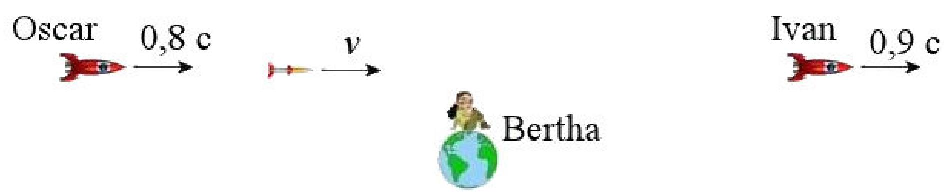


a) Quelle est la distance entre les endroits où se sont produites les explosions selon Gertrude si l'explosion 2 s'est produite 7 ans avant l'explosion 1 selon Gertrude ?
b) Quelle est la vitesse de Sydney selon Gertrude ?
c) Quel est le temps propre entre ces deux évènements ?

8.11 Les transformations des vitesses

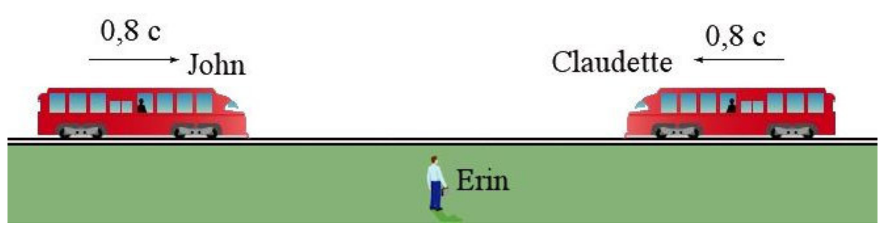
25. Aline observe les deux vaisseaux de Kim et Mike se diriger l'un vers l'autre avec une vitesse de 0,95c. Quelle est la vitesse du vaisseau de Mike selon Kim ?

26. Selon Bertha, Oscar va à 0,8c et il poursuit Ivan qui va à 0,9c. Oscar lance un missile vers Ivan. Selon Oscar, la vitesse du missile est de 0,25c.



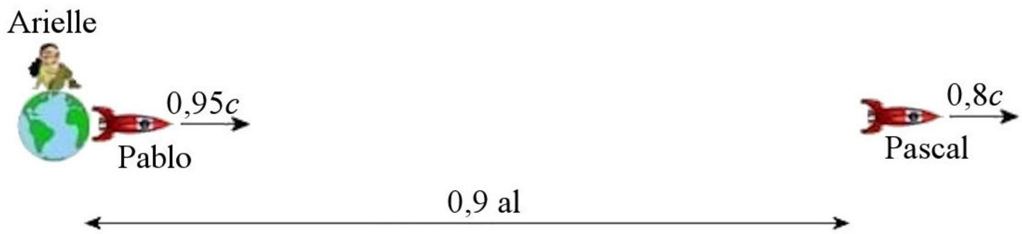
a) Quelle est la vitesse du missile selon Bertha ?
b) Le missile va-t-il rattraper Ivan ?

27. Deux trains ayant des longueurs de 246 m selon Erin se dirigent l'un vers l'autre tel qu'illustré sur la figure. Quelle est la longueur du train de John selon Claudette ?



28. Deux vaisseaux se dirigent l'un vers l'autre tel qu'illustré sur la figure. Le vaisseau d'Annabelle émet un signal à 100 MHz (selon Annabelle). Quelle est la fréquence captée par Esteban ?

29. Pascal a quitté la Terre à 80 % de la vitesse de la lumière. Quand il est à une distance de 0,9 al de la Terre (distance selon Arielle, une observatrice sur Terre), Pablo part à sa poursuite à 95 % de la vitesse de la lumière.



a) Quelle est la vitesse de Pablo selon Pascal ?
b) Qui mesure le temps propre entre le moment où Pablo quitte la Terre et le moment où Pablo rattrape Pascal ?

Combien de temps faudra-t-il pour que Pablo rattrape Pascal…

c) selon Arielle ?
d) selon Pablo ?
e) selon Pascal ?

30. Paul se dirige vers une planète à 40 % de la vitesse de la lumière selon Lou, une habitante de cette planète. Comme Paul n'est pas le bienvenu, Lou lance un missile à 80 % de la vitesse de la lumière pour détruire le vaisseau de Paul. Quand le missile part de la planète, Paul est à 12 al de la planète selon Lou.

a) Combien s'écoule-t-il de temps entre le départ du missile et l'explosion du vaisseau de Paul selon Lou ?
b) Quelle est la distance entre la planète et le vaisseau de Paul selon Lou quand le missile explose ?
c) Quelle est la vitesse du missile selon Paul ?
d) Combien s'écoule-t-il de temps entre le départ du missile et l'explosion du vaisseau de Paul selon Paul ?
e) Quelle est la distance entre la planète et le vaisseau de Paul selon Paul quand le missile explose ?

8.13 Quantité de mouvement et énergie

31. Une balle de baseball a une masse de 145 g.

a) Quelle serait la vitesse d'une balle de baseball si son énergie cinétique est égale à l'énergie libérée lors de l'explosion de la bombe d'Hiroshima ($6{,}3 \times 10^{13}$ J) ?
b) Combien de fois doit-on donner l'énergie de la bombe atomique d'Hiroshima pour que la balle de baseball atteigne 95 % de la vitesse de la lumière ?

32. Un proton ($m = 1{,}673 \times 10^{-27}$ kg) se déplace à 95 % de la vitesse de la lumière.

a) Quelle est la quantité de mouvement de ce proton ?
b) Quelle est l'énergie cinétique de ce proton (en MeV) ?
c) Quelle est l'énergie relativiste de ce proton (en MeV) ?
d) Quelle est la masse totale (incluant la masse de l'énergie cinétique) du proton à cette vitesse ?

33. Combien d'énergie (en keV) faut-il fournir à un électron ($m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg) pour faire passer sa vitesse de…

a) $0{,}7c$ à $0{,}8c$?
b) $0{,}8c$ à $0{,}9c$?

34. Le Soleil émet $3{,}83 \times 10^{26}$ joules chaque seconde. Si le Soleil perd cette énergie chaque seconde, de combien diminue la masse du Soleil chaque seconde ?

35. Un proton ($m = 1{,}673 \times 10^{-27}$ kg) a une énergie relativiste de 50 GeV. Quelle est sa quantité de mouvement ?

36. Un électron ($m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg) passe dans un tunnel dont la longueur est de 10 km selon les observateurs à la surface de la Terre. L'énergie cinétique de l'électron est de 1 TeV (qui vaut 10^{12} eV), toujours selon les observateurs sur Terre.

a) Quelle est la longueur du tunnel dans le référentiel de l'électron ?
b) Combien de temps faut-il pour que l'électron passe d'un bout à l'autre du tunnel selon les observateurs à la surface de la Terre ?
c) Combien de temps faut-il pour que l'électron passe d'un bout à l'autre du tunnel dans le référentiel de l'électron ?

37. Une boule de quilles de 5 kg allant à 50 % de la vitesse de la lumière entre en collision inélastique avec le paquebot *Queen Mary 2*, dont la masse est de 75 000 tonnes.

a) Quelle est la vitesse du paquebot après la collision ? (La vitesse du paquebot est assez petite pour utiliser la formule non relativiste pour calculer la quantité de mouvement finale.)
b) Quelle est l'énergie libérée lors de la collision (qui correspond à l'énergie cinétique perdue) ?
c) Cette énergie libérée correspond à combien de fois l'énergie libérée lors de l'explosion de la bombe atomique d'Hiroshima ($6{,}3 \times 10^{13}$ J) ?

38. Un neutron ($m = 1{,}675 \times 10^{-27}$ kg) allant à 80 % de la vitesse de la lumière entre en collision inélastique avec un noyau atomique d'hélium 3 ($m = 6{,}646 \times 10^{-27}$ kg) au repos pour former un nouveau noyau dont la masse est $8{,}323 \times 10^{-27}$ kg.

a) Quelle est la vitesse du noyau après la collision ? (En supposant qu'il n'est pas détruit par la collision.)
b) Quelle est l'énergie libérée lors de la collision (qui correspond à l'énergie cinétique perdue) en MeV ?

39. Un pion π^+ au repos dont l'énergie de masse est 139,6 MeV se désintègre en deux particules qui partent dans des directions opposées. Une de ces particules est un muon μ^+ dont l'énergie de masse est 105,7 MeV alors que l'autre particule est un neutrino dont l'énergie de masse est très petite (dans ce problème, on va faire comme si elle était nulle).

a) Quelle est l'énergie cinétique de chaque particule après la désintégration ?
b) Quelles sont les vitesses des deux particules après la désintégration ?

40. L'énergie cinétique, dans la mécanique de Newton, est donnée par

$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

Montrez que l'énergie cinétique, dans la mécanique d'Einstein, peut s'écrire sous la forme suivante.

$$E_k = \frac{p^2}{(\gamma+1)m}$$

Défis

(Questions plus difficiles que les questions qu'il y aura à l'examen.)

41. Démontrez les deux formules suivantes.

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\left(1-\frac{vu}{c^2}\right)$$

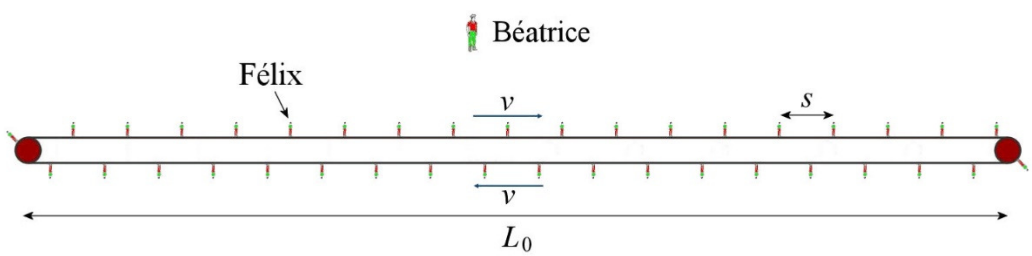
$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\left(1+\frac{vu'}{c^2}\right)$$

42. En utilisant le résultat de l'exercice précédent, montrez que, pour un objet se déplaçant dans la direction des x, la quantité de mouvement en x et l'énergie relativiste se transforment selon les formules suivantes.

$$p'_x=\gamma\left(p_x-\frac{vE}{c^2}\right)$$

$$E'=\gamma\left(E-vp_x\right)$$

43. Béatrice regarde un énorme tapis roulant se déplaçant à vitesse v. Selon Béatrice, la distance entre les extrémités du tapis est L_0. Sur ce tapis, il y a N personnes régulièrement espacées d'une distance s (selon Béatrice). Parmi ces personnes, il y a Félix.



a) Selon Félix, combien y a-t-il de personnes qui sont du même côté du tapis qu'elle ? (Donner un résultat qui dépend uniquement de N et de v.)
b) Selon Félix, combien y a-t-il de personnes qui sont de l'autre côté du tapis ? (Donner un résultat qui dépend uniquement de N et de v.) (Indice : utiliser le résultat du premier défi de ce chapitre.)
c) Selon Félix, combien y a-t-il de personnes sur le tapis ?

RÉPONSES

8.7 La dilatation du temps

1. a) 14,25 ans b) 8,55 ans
2. 3 min 20 s
3. Octave a 34 ans et Auguste a 36 ans.

8.8 La contraction des longueurs

4. 3,55 cm
5. a) 0,6c b) 80 cm
6. 0,999 2c
7. 0,999 52c
8. 5,263
9. a) 0,834 6c b) 550,8 m
10. a) 1200 m b) 5 x 10^{-6} s c) 8,333 x 10^{-6} s

8.9 L'effet Doppler avec la lumière

11. a) 612,6 MHz b) 15,71 MHz
12. 749,5 nm
13. 0,313 3c
14. 400 GHz
15. 800 MHz
16. a) 32,03 s b) 1,601 s c) 32,03 s d) 62,45 s
17. a) 6 s b) 5c/13 = 0,384 6c

8.10 Les transformations de Lorentz

18. a) L'explosion 2 s'est produite 26,67 ans avant l'explosion 1 selon Sydney.
    b) 33,33 al
19. a) L'explosion 2 s'est produite 30 ans avant l'explosion 1 selon Sydney.
    b) 36 al
20. 1,2 µs
21. 0,133 3 µs
22. a) 0,2c vers la gauche b) 19,596 al
23. a) 1,5 µs b) 1,375 µs c) 160 m
24. a) 3,162 al b) $v = 0,8397c$ et $v = 0,2414c$ c) -6,245 a

8.11 Les transformations des vitesses

25. -0,998 7c
26. a) 0,875c b) Le missile ne rattrape pas Ivan
27. 90 m
28. 871,8 MHz
29. a) 0,625c b) Pablo c) 6 ans d) 1,873 5 an e) 2,4 ans
30. a) 10 ans b) 8 al c) -0,909 1c d) 14,402 ans e) 7,332 al

8.13 Quantité de mouvement et énergie

31. a) 0,097 9c b) 456
32. a) 1,527 x 10^{-18} kgm/s b) 2070 MeV c) 3010 MeV d) 5,358 x 10^{-27} kg
33. a) 136,3 keV b) 321,1 keV
34. 4,26 millions de tonnes
35. 2,67 x 10^{-17} kgm/s
36. a) 5,118 mm b) 3,333 x 10^{-5} s c) 1,706 x 10^{-11} s
37. a) 11,55 m/s b) 6,962 x 10^{16} J c) 1105
38. a) 0,259 2c b) 462 MeV
39. a) 4,1 MeV pour le muon et 29,8 MeV pour le neutrino.
    b) 0,271 2c pour le muon et c pour le neutrino.

Défis

42. a) $\frac{N}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$ b) $\frac{N}{2}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)$ c) N