Solutionnaire du chapitre 2

1. a) La période est

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{400Hz} = 0,0025s$$

b) On a

$$v = \lambda f$$
$$350\tfrac{m}{s} = \lambda \cdot 400Hz$$
$$\lambda = 0,875m$$

2. On va trouver la longueur d'onde avec

$$v = \lambda f$$

Pour la trouver, il nous faut la vitesse et la fréquence.

La vitesse de l'onde est

$$\begin{aligned} v &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &= \frac{30m}{4s} \\ &= 7,5\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

La période de l'onde est

$$T = \frac{4s}{20 \text{ oscillations}} = 0,2s$$

La fréquence est donc

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,2s} = 5Hz$$

La longueur d'onde est donc

$$\begin{aligned} v &= \lambda f \\ 7,5 \tfrac{m}{s} &= \lambda \cdot 5Hz \\ \lambda &= 1,5m \end{aligned}$$

3.

a) Selon le dessin, la longueur d'onde est de 20 cm. On trouve alors la fréquence avec

$$\begin{aligned} v &= \lambda f \\ 40 \tfrac{m}{s} &= 0,2m \cdot f \\ f &= 200Hz \end{aligned}$$

b) Comme la corde fait une oscillation harmonique, sa vitesse maximale est

$$v_{\max} = \omega A$$

Avec le dessin de l'onde, on remarque que l'amplitude est de 6 cm. On a donc

$$\begin{aligned} v_{\max} &= (2\pi f) A \\ &= (2\pi \cdot 200Hz) \cdot 0,06m \\ &= 75,4 \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

4. a) Comme nous avons un + devant ωt, l'onde va vers les x négatifs.

b) Selon l'équation, nous avons k = 10 rad/m. On a donc

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ 10m^{-1} &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ \lambda &= 0,6283m \end{aligned}$$

c) La vitesse est

$$\begin{aligned} v &= \frac{\omega}{k} \\ &= \frac{200s^{-1}}{10m^{-1}} \\ &= 20\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

d) La vitesse de la corde est

$$\begin{aligned} v_y &= A\omega\cos\left(kx+\omega t+\phi\right) \\ &= 0,2m\cdot 200\tfrac{rad}{s}\cdot\cos\left(10\tfrac{rad}{m}\cdot x+200\tfrac{rad}{s}\cdot t+\frac{\pi}{4}rad\right) \\ &= 40\tfrac{m}{s}\cdot\cos\left(10\tfrac{rad}{m}\cdot x+200\tfrac{rad}{s}\cdot t+\frac{\pi}{4}rad\right) \end{aligned}$$

On aurait pu aussi dériver la formule de la position pour obtenir la vitesse

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(0,2m\cdot\sin\left(10\tfrac{rad}{m}\cdot x+200\tfrac{rad}{s}\cdot t+\frac{\pi}{4}rad\right)\right) \\ &= 0,2m\cdot 200\tfrac{rad}{s}\cdot\cos\left(10\tfrac{rad}{m}\cdot x+200\tfrac{rad}{s}\cdot t+\frac{\pi}{4}rad\right) \\ &= 40\tfrac{m}{s}\cdot\cos\left(10\tfrac{rad}{m}\cdot x+200\tfrac{rad}{s}\cdot t+\frac{\pi}{4}rad\right) \end{aligned}$$

À x = 1 m et t = 1 s, la vitesse est donc

$$\begin{aligned} v_y &= 40\tfrac{m}{s}\cdot\cos\left(10\tfrac{rad}{m}\cdot 1m+200\tfrac{rad}{s}\cdot 1s+\frac{\pi}{4}rad\right) \\ &= 40\tfrac{m}{s}\cdot\cos\left(210rad+\frac{\pi}{4}rad\right) \\ &= -38,23\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

5. On a deux équations :

$$\begin{aligned} v_{\max} &= A\omega \\ 2\tfrac{m}{s} &= A\omega \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_{\max} &= A\omega^2 \\ 200\tfrac{m}{s^2} &= A\omega^2 \end{aligned}$$

En divisant la deuxième équation par la première, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{200\tfrac{m}{s^2}}{2\tfrac{m}{s}} &= \frac{A\omega^2}{A\omega} \\ 100s^{-1} &= \omega \end{aligned}$$

De là, on trouve que

$$\begin{aligned} 2\tfrac{m}{s} &= A\omega \\ 2\tfrac{m}{s} &= A \cdot 100s^{-1} \\ A &= 0,02m \end{aligned}$$

6. a) La vitesse maximale est

$$\begin{aligned} v_{\max} &= A\omega \\ &= 0,1m \cdot 50s^{-1} \\ &= 5\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

b) L'accélération maximale est

$$\begin{aligned} a_{\max} &= A\omega^2 \\ &= 0,1m \cdot \left(50s^{-1}\right)^2 \\ &= 250\tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

c) Quand la crête est au point x = 1 m, alors le déplacement à ce point est égal à l'amplitude. On a donc

$$0,1m = 0,1m \cdot \sin\left(5\tfrac{rad}{m} \cdot 1m - 50\tfrac{rad}{s} \cdot t\right)$$

Il ne reste qu'à isoler t dans cette équation

$$0{,}1m = 0{,}1m \cdot \sin\left(5\tfrac{rad}{m} \cdot 1m - 50\tfrac{rad}{s} \cdot t\right)$$
$$1 = \sin\left(5\tfrac{rad}{m} \cdot 1m - 50\tfrac{rad}{s} \cdot t\right)$$
$$\tfrac{\pi}{2} = 5 - 50s^{-1} \cdot t$$

(Normalement, il y aurait une deuxième solution pour l'arcsin, qui est π moins la réponse obtenue, mais cette 2e solution est identique à la première.) Continuons

$$\tfrac{\pi}{2} = 5 - 50s^{-1} \cdot t$$
$$t = 0{,}06858s$$

À cette réponse, on peut ajouter ou soustraire la période pour trouver tous les moments auxquels la crête passe. Ici, la période est

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{50s^{-1}} \\ &= 0{,}12566s \end{aligned}$$

Il est clair qu'on aura des valeurs négatives si on soustrait la période à notre solution. Comme on veut les trois premières valeurs positives, on ne peut pas soustraire la période. Il reste donc à ajouter la période pour trouver les 2 autres moments. Les 3 instants sont donc

$$\begin{aligned} t_1 &= 0{,}06858s \\ t_2 &= 0{,}06858s + 0{,}12566s = 0{,}19425s \\ t_3 &= 0{,}06858s + 0{,}12566s + 0{,}12566s = 0{,}31991s \end{aligned}$$

7. Pour écrire l'équation de l'onde, on doit trouver ω, k, A et ϕ.

ω est

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}1s} = 20\pi \tfrac{rad}{s}$$

k est

$$v = \frac{\omega}{k}$$
$$50\tfrac{m}{s} = \frac{20\pi s^{-1}}{k}$$
$$k = \frac{2\pi}{5}\tfrac{rad}{m}$$

L'amplitude est

$$\begin{aligned} A^2 &= y^2 + \left(\frac{v_y}{\omega}\right)^2 \\ &= (0,02m)^2 + \left(\frac{-1\tfrac{m}{s}}{20\pi s^{-1}}\right)^2 \\ &= 6,533\times10^{-4} m^2 \\ A &= 0,02556m \end{aligned}$$

La constante de phase est

$$\tan(kx-\omega t+\phi) = \frac{\omega y}{-v_y}$$
$$\tan(0+0+\phi) = \frac{20\pi s^{-1}\cdot 0,02m}{1\tfrac{m}{s}}$$
$$\phi = 0,8986$$

L'équation est donc

$$y = 0,02556m\cdot\sin\left(\tfrac{2\pi}{5}\tfrac{rad}{m}\cdot x - 20\pi\tfrac{rad}{s}\cdot t + 0,8986rad\right)$$

8. a) On va trouver la période à partir de ω.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La valeur de ω se trouve avec

$$a = -\omega^2 x$$
$$-100\tfrac{m}{s^2} = -\omega^2 \cdot 0,01m$$
$$\omega^2 = 10000\tfrac{rad^2}{s^2}$$
$$\omega = 100\tfrac{rad}{s}$$

La période est donc

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{100s^{-1}} \\ &= 0,06283s \end{aligned}$$

b) L'amplitude est

$$\begin{aligned} A^2 &= y^2 + \left(\frac{v_y}{\omega}\right)^2 \\ &= \left(0,01m\right)^2 + \left(\frac{1,2\frac{m}{s}}{100s^{-1}}\right)^2 \\ &= 0,000244m^2 \\ A &= 0,01562m \end{aligned}$$

9. Comme toutes les ondes vont à la même vitesse sur une corde, la vitesse est aussi de 30 m/s.

10. On va trouver la masse à partir de la masse linéique et cette masse linéique se trouve à partir de la formule de la vitesse

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

Si l'onde va d'un bout à l'autre en 0,05 s, sa vitesse est

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2m}{0,05s} = 40\tfrac{m}{s}$$

On a alors

$$v=\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

$$40\tfrac{m}{s}=\sqrt{\frac{200N}{\mu}}$$

$$\mu=0,125\tfrac{kg}{m}$$

La masse est donc de

$$\mu=\frac{masse}{longueur}$$

$$0,125\tfrac{kg}{m}=\frac{masse}{2m}$$

$$masse=0,25kg$$

11. On va trouver la vitesse avec

$$v=\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

On connait déjà la tension, mais il nous manque la masse linéique.

La masse linéique de la corde est de

$$\begin{aligned}\mu&=\frac{m}{L}\\&=\frac{0,05kg}{2m}\\&=0,025\tfrac{kg}{m}\end{aligned}$$

On a alors

$$v=\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

$$50\tfrac{m}{s}=\sqrt{\frac{F_T}{0,025\tfrac{kg}{m}}}$$

$$F_T=62,5N$$

12. On va trouver la vitesse avec

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

On connait la tension, mais pas la masse linéique.

On trouve cette masse linéique avec la vitesse quand la tension est de 50 N.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \\ 40\tfrac{m}{s} &= \sqrt{\frac{50N}{\mu}} \\ \mu &= 0,03125\tfrac{kg}{m} \end{aligned}$$

Si la tension est de 80 N, on aura alors

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \\ &= \sqrt{\frac{80N}{0,03125\tfrac{kg}{m}}} \\ &= 50,6\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

13. a) On va trouver la masse linéique à partir de la formule de la vitesse

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

La vitesse de l'onde est

$$\begin{aligned} v &= \frac{\omega}{k} \\ &= \frac{200s^{-1}}{10m^{-1}} \\ &= 20\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

On a donc

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

$$20\tfrac{m}{s} = \sqrt{\frac{50N}{\mu}}$$

$$\mu = 0,125\tfrac{kg}{m}$$

b) La vitesse maximale de la corde est

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \omega A \\ &= 200s^{-1} \cdot 0,2m \\ &= 40\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

14. Pour trouver la vitesse avec

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

il nous faut la masse linéique de la corde. Cette masse linéique est

$$\mu = \frac{m}{L}$$

Il faut donc trouver la masse d'une corde de nylon ayant une longueur L et un rayon de 2 mm. On trouve la masse avec la masse volumique

$$m = \rho \cdot volume$$

Puisque la corde est un long cylindre de longueur L, son volume est $\pi r^2 L$. On a donc

$$m = \rho \cdot \pi r^2 L$$

La masse linéique est donc de

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{m}{L}\\ &= \frac{\rho\pi r^2 L}{L}\\ &= \rho\pi r^2\\ &= 1150\tfrac{kg}{m^3}\cdot\pi\cdot\left(0{,}002m\right)^2\\ &= 0{,}01445\tfrac{kg}{m}\end{aligned}$$

La vitesse est donc

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}\\ &= \sqrt{\frac{300N}{0{,}01445\frac{kg}{m}}}\\ &= 144{,}1\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

15. La distance entre les nœuds est égale à la moitié de la longueur d'onde. On doit donc trouver la longueur d'onde. Elle se trouve avec

$$v = \lambda f$$

On trouve la vitesse avec

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}\\ &= \sqrt{\frac{500N}{0{,}05\frac{kg}{m}}}\\ &= 100\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

On trouve la fréquence avec la formule de la vitesse maximale.

$$v_{\max} = A\omega$$
$$1\tfrac{m}{s} = 0,02m \cdot \omega$$
$$\omega = 50\tfrac{rad}{s}$$
$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$
$$f = \frac{50}{2\pi}Hz$$

La longueur d'onde est donc

$$v = \lambda f$$
$$100\tfrac{m}{s} = \lambda \cdot \frac{50}{2\pi}Hz$$
$$\lambda = 4\pi m$$

La distance entre les nœuds est donc de

$$\frac{\lambda}{2} = 2\pi m = 6,283m$$

16. a) Pour calculer l'énergie avec la formule

$$E = \frac{1}{2}\mu D\omega^2 A^2$$

il nous manque la fréquence.

La fréquence de l'onde est

$$v = \lambda f$$
$$50\tfrac{m}{s} = 0,4m \cdot f$$
$$f = 125Hz$$

L'énergie est donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\mu D\omega^2 A^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 0,025\tfrac{kg}{m}\cdot 10m \cdot (2\pi \cdot 125Hz)^2 \cdot (0,002m)^2 \\ &= 0,3084J \end{aligned}$$

b) La puissance est

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 0,025\tfrac{kg}{m}\cdot 50\tfrac{m}{s}\cdot\left(2\pi\cdot 125Hz\right)^2\cdot\left(0,002m\right)^2 \\ &= 1,542W \end{aligned}$$

17. On peut trouver l'amplitude avec

$$P = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2$$

mais on doit d'abord connaitre la vitesse et la masse linéique.

La vitesse de l'onde est

$$\begin{aligned} v &= \lambda f \\ &= 0,125m\cdot 200Hz \\ &= 25\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

La masse linéique de la corde est

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \\ 25\tfrac{m}{s} &= \sqrt{\frac{80N}{\mu}} \\ \mu &= 0,128\tfrac{kg}{m} \end{aligned}$$

On trouve alors l'amplitude avec la formule de la puissance.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2 \\ 20W &= \frac{1}{2}\cdot 0,128\tfrac{kg}{m}\cdot 25\tfrac{m}{s}\cdot\left(2\pi\cdot 200Hz\right)^2\cdot A^2 \\ A &= 0,002813m \end{aligned}$$

18. On peut trouver la puissance avec

$$P = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2$$

mais on doit d'abord connaitre la vitesse.

La vitesse de l'onde est

$$\begin{aligned} v &= \frac{\omega}{k} \\ &= \frac{50\pi s^{-1}}{10\pi m^{-1}} \\ &= 5\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

La puissance est donc

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 0,05\tfrac{kg}{m}\cdot 5\tfrac{m}{s}\cdot\left(50\pi s^{-1}\right)^2\cdot\left(0,02m\right)^2 \\ &= 1,234W \end{aligned}$$

19. On a deux équations. Ce sont

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{F_T\mu} \\ 4\tfrac{kg}{s} &= \sqrt{F_T\mu} \\ 16\tfrac{kg^2}{s^2} &= F_T\mu \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \\ 80\tfrac{m}{s^2} &= \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \\ 6400\tfrac{m^2}{s^2} &= \frac{F_T}{\mu} \end{aligned}$$

En multipliant ces 2 équations, on a

$$16\tfrac{kg^2}{s^2}\cdot 6400\tfrac{m^2}{s^2} = F_T\mu\cdot\frac{F_T}{\mu}$$
$$102\,400\tfrac{kg^2m^2}{s^4} = F_T^2$$
$$F_T = 320N$$

De là, on trouve

$$16\tfrac{kg^2}{s^2} = F_T\mu$$
$$16\tfrac{kg^2}{s^2} = 320N\cdot\mu$$
$$\mu = 0,05\tfrac{kg}{m}$$

20. Pour la première onde, on a

$$P_1 = \frac{1}{2}Z_1\omega^2A_1^2$$

Quand on change la corde, on change l'impédance puisqu'on change la masse linéique de la corde. Cette masse linéique est

$$\mu = \frac{m}{L}$$

On trouve la masse avec la masse volumique

$$m = \rho\cdot volume$$

Puisque la corde est un long cylindre de longueur L, son volume est $\pi r^2 L$. On a donc

$$m = \rho\cdot\pi r^2 L$$

La masse linéique est donc

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{m}{L}\\ &= \frac{\rho\cdot\pi r^2 L}{L}\\ &= \rho\cdot\pi r^2\end{aligned}$$

Si on double le rayon, on a

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\rho \cdot \pi r_2^2}{\rho \cdot \pi r_1^2}$$
$$= \frac{r_2^2}{r_1^2}$$
$$= \frac{(2r_1)^2}{r_1^2}$$
$$= 4$$

On a donc

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\sqrt{F_T \mu_2}}{\sqrt{F_T \mu_1}}$$
$$= \sqrt{\frac{F_T \mu_2}{F_T \mu_1}}$$
$$= \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$$
$$= \sqrt{4}$$
$$= 2$$

Ainsi, on arrive à

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{1}{2} Z_2 \omega^2 A_2^2}{\frac{1}{2} Z_1 \omega^2 A_1^2}$$
$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{Z_2 A_2^2}{Z_1 A_1^2}$$

Puisque les puissances sont les même et que le rapport des impédances est 2, on a

$$1 = 2 \frac{A_2^2}{A_1^2}$$
$$1 = 2 \frac{A_2^2}{(0,02m)^2}$$
$$A_2 = 1,414cm$$

21. La vitesse de l'onde dépend de la tension. Trouvons la tension en fonction de la position sur la corde. Pour qu'il y ait équilibre des forces, cette tension doit être égale au poids de la corde sous le point considéré. On va utiliser un axe des y dirigé vers le bas avec un $y = 0$ situé au haut de la corde. À la position y, la longueur de la corde sous cette position est

$$l = L - y$$

où L est la longueur totale de la corde. La masse de cette partie de corde est

$$m = \mu\left(L - y\right)$$

Cela veut dire que la tension de la corde à la position y est

$$F_T = \mu g\left(L - y\right)$$

La vitesse de l'onde à la position y est alors

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{g\left(L - y\right)}$$

Pour parcourir une petite distance dy, le temps est donc

$$dt = \frac{dy}{v} = \frac{dy}{\sqrt{g\left(L - y\right)}}$$

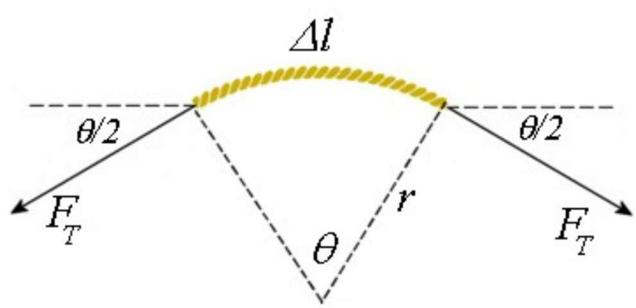
Si on additionne maintenant tous les temps, on arrive à

$$\begin{aligned} t &= \int_0^L \frac{dy}{\sqrt{g\left(L - y\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^L \frac{dy}{\sqrt{\left(L - y\right)}} \end{aligned}$$

En posant $u = L - y$, on arrive à

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{1}{\sqrt{g}} \int_L^0 \frac{-du}{\sqrt{u}} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{g}} \int_L^0 u^{-1/2} du \\
&= \frac{-1}{\sqrt{g}} \left[\frac{u^{1/2}}{1/2} \right]_L^0 \\
&= \frac{-2}{\sqrt{g}} \left[0^{1/2} - L^{1/2} \right] \\
&= 2\sqrt{\frac{L}{g}} \\
&= 2 \cdot \sqrt{\frac{2m}{9,8\frac{m}{s^2}}} \\
&= 0,9035s
\end{aligned}
$$

22. La vitesse de l'onde dépend de la tension. Il faut donc trouver la tension dans cet anneau. Prenons un petit morceau de la corde et examinons les forces sur ce morceau. (L'angle θ est petit sur la figure.)



Puisque ce morceau fait un mouvement circulaire, la somme des forces en y sur ce morceau est (en utilisant un axe des y vers le haut)

$$\sum F_y = ma_y$$

$$\rightarrow F_T \sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) + F_T \sin\left(180° + \frac{\theta}{2}\right) = -m\omega^2 r$$

Puisque sin -x = -sin x et sin (180°+x) = -sin x, on a

$$-F_T \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - F_T \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = -m\omega^2 r$$
$$2F_T \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = m\omega^2 r$$

Puisque l'angle est petit, on a sin $x = x$. (Cela signifie qu'on travaille maintenant avec des angles en radians.)

$$2F_T \frac{\theta}{2} = m\omega^2 r$$
$$F_T\theta = m\omega^2 r$$

La masse du petit morceau dépend de l'angle. Puisque la densité est μ, la masse du petit morceau est

$$\begin{aligned} m &= \mu\Delta l \\ &= \mu r\theta \end{aligned}$$

L'équation des forces devient alors

$$F_T\theta = m\omega^2 r$$
$$F_T\theta = \mu r\theta\omega^2 r$$
$$F_T = \mu r^2\omega^2$$

Ainsi, la vitesse de l'onde est

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu r^2\omega^2}{\mu}} \\ &= r\omega \end{aligned}$$

Avec les valeurs, on arrive à

$$\begin{aligned} v &= 0,25m \cdot 2s^{-1} \\ &= 0,5\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Notez que cette vitesse ($r\omega$) est aussi la vitesse de la corde. Ainsi, l'onde, si elle va dans la direction opposée à la corde, reste toujours à la même place !