Solutionnaire du chapitre 1

1. a) L'amplitude est de 20 cm.
b) La période est

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{5s^{-1}} \\ &= 1,257s \end{aligned}$$

c) La constante de phase est π/4.
d) La vitesse maximale est

$$\begin{aligned} v_{\max} &= A\omega \\ &= 0,2m \cdot 5s^{-1} \\ &= 1\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

e) La solution est

$$x = 0,2m \cdot \cos\left(5\tfrac{rad}{s} \cdot t - \tfrac{\pi}{4} rad\right)$$

(La constante de phase avec le cosinus est π/2 plus basse que celle avec le sinus.)

2. a) L'amplitude est 5 cm.
b) La période est 2,5 s.
c) Ce graphique est celui d'un sinus décalé vers la gauche de 0,4 s (approximativement). La constante de phase est donc

$$\begin{aligned} \phi &= \omega \Delta t \\ &= \frac{2\pi}{T}\Delta t \\ &= \frac{2\pi}{2,5s} \cdot 0,4s \\ &= 1,0053 rad \end{aligned}$$

Comme c'est approximatif, on pourrait dire que le déphasage est d'environ 1 rad.

3. a) La position à t = 1 s est

$$\begin{aligned} x &= 0,25m \cdot \sin\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{3\pi}{4} rad\right) \\ &= 0,25m \cdot \sin\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot 1s + \tfrac{3\pi}{4} rad\right) \\ &= -0,05212m \end{aligned}$$

b) La vitesse est

$$\begin{aligned} v &= A\omega\cos\left(\omega t + \phi\right) \\ &= 0,25m \cdot 10s^{-1} \cdot \cos\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{3\pi}{4} rad\right) \\ &= 2,5\tfrac{m}{s} \cdot \cos\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{3\pi}{4} rad\right) \end{aligned}$$

La vitesse à t = 1 s est donc

$$\begin{aligned} v &= 2,5\tfrac{m}{s} \cdot \cos\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot 1s + \tfrac{3\pi}{4} rad\right) \\ &= 2,445\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

c) L'accélération est

$$\begin{aligned} a &= -A\omega^2 \sin\left(\omega t + \phi\right) \\ &= -2,5\tfrac{m}{s} \cdot 10s^{-1} \cdot \sin\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{3\pi}{4} rad\right) \\ &= -25\tfrac{m}{s^2} \cdot \sin\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{3\pi}{4} rad\right) \end{aligned}$$

L'accélération à t = 1 s est donc

$$\begin{aligned} a &= -25\tfrac{m}{s^2} \cdot \sin\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot 1s + \tfrac{3\pi}{4} rad\right) \\ &= 5,216\tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

4. La vitesse maximale est

$$v_{\max} = A\omega$$

On peut trouver ω avec la fréquence d'oscillation.

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi f \\ &= 2\pi \cdot 5Hz \\ &= 10\pi \tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

On trouve ensuite l'amplitude avec l'accélération maximale.

$$\begin{aligned}a_{\max} &= A\omega^2 \\ 12\tfrac{m}{s^2} &= A \cdot \left(10\pi s^{-1}\right)^2 \\ A &= 0,01216m\end{aligned}$$

La vitesse maximale est donc

$$\begin{aligned}v_{\max} &= A\omega \\ &= 0,01216m \cdot 10\pi s^{-1} \\ &= 0,382\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

5. a) On a

$$\begin{aligned}v_{\max} &= A\omega \\ a_{\max} &= A\omega^2\end{aligned}$$

ce qui nous donne les deux équations suivantes.

$$\begin{aligned}32\tfrac{m}{s} &= A\omega \\ 128\tfrac{m}{s^2} &= A\omega^2\end{aligned}$$

On doit donc résoudre ce système d'équations.

On pourrait isoler une variable dans une équation et remplacer dans l'autre, mais on peut plus facilement résoudre en divisant les équations.

$$\begin{aligned}\frac{A\omega^2}{A\omega} &= \frac{128\tfrac{m}{s^2}}{32\tfrac{m}{s}} \\ \omega &= 4\tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

La période est donc

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{4s^{-1}} \\ &= 1,571s \end{aligned}$$

b) L'amplitude est

$$\begin{aligned} 32\tfrac{m}{s} &= A\omega \\ 32\tfrac{m}{s} &= A \cdot 4s^{-1} \\ A &= 8m \end{aligned}$$

6. Dans la formule

$$x = A\sin\left(\omega t + \phi\right)$$

il nous manque A, ω et ϕ.

Trouvons premièrement la valeur de ω.

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} \\ &= \frac{2\pi}{8s} \\ &= \tfrac{\pi}{4}\tfrac{rad}{s} \end{aligned}$$

Trouvons ensuite l'amplitude.

$$\begin{aligned} A^2 &= x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \\ &= \left(0,1m\right)^2 + \left(\frac{0,24\tfrac{m}{s}}{\tfrac{\pi}{4}s^{-1}}\right)^2 \\ &= 0,10338m^2 \\ A &= 0,3215m \end{aligned}$$

Finalement, trouvons la constante de phase.

$$\tan(\omega t+\phi)=\frac{x\omega}{v}$$
$$\tan(0+\phi)=\frac{0,1m\cdot\frac{\pi}{4}s^{-1}}{0,24\frac{m}{s}}$$
$$\tan(\phi)=\frac{5\pi}{48}$$
$$\phi=0,3163rad$$

L'équation du mouvement est donc

$$x=0,3215m\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\frac{rad}{s}\cdot t+0,3163rad\right)$$

7. Dans la formule

$$x=A\sin(\omega t+\phi)$$

il nous manque A, ω et ϕ.

Trouvons premièrement la valeur de ω.

$$\begin{aligned}\omega&=\frac{2\pi}{T}\\&=\frac{2\pi}{8s}\\&=\frac{\pi}{4}\frac{rad}{s}\end{aligned}$$

Trouvons ensuite l'amplitude.

$$\begin{aligned}A^2&=x^2+\left(\frac{v}{\omega}\right)^2\\&=(-0,2m)^2+\left(\frac{0\frac{m}{s}}{\frac{\pi}{4}s^{-1}}\right)^2\\&=0,04m^2\\A&=0,2m\end{aligned}$$

Finalement, trouvons la constante de phase

$$\tan(\omega t+\phi)=\frac{x\omega}{v}$$
$$\tan(0+\phi)=\frac{-0,2m\cdot\frac{\pi}{4}s^{-1}}{0\frac{m}{s}}$$
$$\tan(\phi)=-\infty$$
$$\phi=-\tfrac{\pi}{2}rad$$

L'équation du mouvement est donc

$$x=0,2m\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\tfrac{rad}{s}\cdot t-\tfrac{\pi}{2}rad\right)$$

8. a) On va trouver la période avec

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

On trouve ω avec

$$a=-\omega^2x$$
$$-24\tfrac{m}{s^2}=-\omega^2\cdot 0,06m$$
$$\omega^2=400\tfrac{rad^2}{s^2}$$
$$\omega=20\tfrac{rad}{s}$$

La période est donc

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$
$$=\frac{2\pi}{20s^{-1}}$$
$$=0,31416s$$

b) L'amplitude est

$$\begin{aligned}A^2 &= x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \\ &= (0,06m)^2 + \left(\frac{-1\frac{m}{s}}{20s^{-1}}\right)^2 \\ &= 0,0061m^2 \\ A &= 0,0781m\end{aligned}$$

9. a) On trouve la vitesse avec

$$A^2 = x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2$$

$$(0,25m)^2 = (0,15m)^2 + \left(\frac{v}{10s^{-1}}\right)^2$$

$$v = 2\tfrac{m}{s}$$

b) On trouve l'accélération avec

$$\begin{aligned}a &= -\omega^2 x \\ &= -\left(10s^{-1}\right)^2 \cdot 0,15m \\ &= -15\tfrac{m}{s^2}\end{aligned}$$

10. a) Quand l'objet est à x = 12 cm, on a

$$0,12m = 0,2m \cdot \sin\left(5\tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{\pi}{4} rad\right)$$

$$0,6 = \sin\left(5\tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{\pi}{4} rad\right)$$

$$\begin{aligned}0,6435 &= 5s^{-1} \cdot t + \tfrac{\pi}{4} & \quad et \quad & 2,4981 = 5s^{-1} \cdot t + \tfrac{\pi}{4} \\ -0,1419 &= 5s^{-1} \cdot t & \quad et \quad & 1,713 = 5s^{-1} \cdot t \\ t &= -0,02838s & \quad et \quad & t = 0,3425s\end{aligned}$$

On peut ensuite ajouter (ou enlever) la période à chacune de ces réponses pour obtenir tous les moments où l'objet est à x = 12 cm. La période est

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{5s^{-1}} \\ &= 1,2566s \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{array}{ccc} t = -0,02838s & & t = 0,3425s \\ & \downarrow +1,2566s & \\ t = 1,228s & & t = 1,5991s \\ & \downarrow +1,2566s & \\ t = 2,485s & & t = 2,856s \\ & \downarrow +1,2566s & \\ t = 3,742s & & t = 4,112s \end{array}$$

Le premier instant est donc t = 0,3425 s.

b) La formule de la vitesse est

$$\begin{aligned} v &= A\omega \cos(\omega t + \phi) \\ &= 0,2m \cdot 5s^{-1} \cdot \cos\left(5\tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{\pi}{4} rad\right) \\ &= 1\tfrac{m}{s} \cdot \cos\left(5\tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{\pi}{4} rad\right) \end{aligned}$$

Quand la vitesse est de -0,6 m/s, on a

$$-0,6\tfrac{m}{s} = 1\tfrac{m}{s} \cdot \cos\left(5\tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{\pi}{4} rad\right)$$

$$-0,6 = \cos\left(5\tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{\pi}{4} rad\right)$$

$$\begin{array}{rcl} 2,2143 = 5s^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{4} & et & -2,2143 = 5s^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{4} \\ 1,4289 = 5s^{-1} \cdot t & et & -2,9997 = 5s^{-1} \cdot t \\ t = 0,2858s & et & t = -0,5999s \end{array}$$

On peut ensuite ajouter (ou enlever) la période à chacune de ces réponses pour obtenir tous les moments où l'objet a une vitesse de v = -0,6 m/s. On a alors

$$\begin{array}{ccc} t = 0,2858s & & t = -0,5999s \\ & \downarrow +1,2566s & \\ t = 1,542s & & t = 0,6567s \\ & \downarrow +1,2566s & \\ t = 2,799s & & t = 1,913s \\ & \downarrow +1,2566s & \\ t = 4,056s & & t = 3,170s \end{array}$$

Le premier instant est donc t = 0,2858 s.

11. Quand l'objet est à x = 8 cm, on a

$$0,08m = 0,16m \cdot \sin\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{\pi}{2}rad\right)$$
$$\frac{1}{2} = \sin\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{\pi}{2}rad\right)$$
$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\pi}{6} = 10s^{-1} \cdot t + \tfrac{\pi}{2} & et & \dfrac{5\pi}{6} = 10s^{-1} \cdot t + \tfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\pi}{3} = 10s^{-1} \cdot t & et & \dfrac{\pi}{3} = 10s^{-1} \cdot t \\ t = -\dfrac{\pi}{30}s & et & t = \dfrac{\pi}{30}s \end{array}$$

Il n'y a qu'une seule de ces deux réponses qui est bonne parce qu'on dit que la vitesse doit être positive. La formule de la vitesse en fonction du temps est

$$\begin{aligned} v &= A\omega\cos(\omega t + \phi) \\ &= 0,16m \cdot 10s^{-1} \cdot \cos\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{\pi}{2}rad\right) \\ &= 1,6\tfrac{m}{s} \cdot \cos\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

À t = -π/30 s, la vitesse est

$$\begin{aligned} v &= 1,6\tfrac{m}{s} \cdot \cos\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot \left(-\tfrac{\pi}{30}s\right) + \tfrac{\pi}{2}rad\right) \\ &= 1,6\tfrac{m}{s} \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{6}rad\right) \\ &= 1,3856\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

alors qu'à t = π/30 s, la vitesse est

$$\begin{aligned} v &= 1,6\tfrac{m}{s}\cdot\cos\left(10\tfrac{rad}{s}\cdot\tfrac{\pi}{30}s+\tfrac{\pi}{2}rad\right) \\ &= 1,6\tfrac{m}{s}\cdot\cos\left(\tfrac{5\pi}{6}rad\right) \\ &= -1,3856\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Comme on voulait que la vitesse soit positive, c'est t = -π/30 s = -0,1047 s qui est la bonne réponse.

On peut ensuite ajouter (ou enlever) la période à cette réponse pour obtenir tous les moments où l'objet est à x = 8 cm et que la vitesse est positive. La période est

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{10s^{-1}} \\ &= 0,6283s \end{aligned}$$

Les temps sont donc

-0,1047 s, 0,5236 s, 1,1519 s, 1,7802 s,…

Le premier instant positif est donc 0,5236 s.

12. Dans la formule

$$x = A\sin\left(\omega t+\phi\right)$$

il nous manque A, ω et ϕ.

On trouve ω avec la période

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} \\ &= \frac{2\pi}{0,5s} \\ &= 4\pi\tfrac{rad}{s} \end{aligned}$$

On peut trouver l'amplitude avec l'accélération maximale.

$$a_{max} = \omega^2 A$$
$$32 \tfrac{m}{s^2} = \left(4\pi s^{-1}\right)^2 A$$
$$A = 0,2026m$$

Finalement, trouvons la constante de phase. Comme la vitesse est nulle quand l'accélération est maximale, on a

$$\tan\left(\omega t + \phi\right) = \frac{x\omega}{v}$$
$$\tan\left(0 + \phi\right) = \frac{x\omega}{0 \tfrac{m}{s}}$$
$$\tan\left(\phi\right) = \infty$$
$$\phi = \tfrac{\pi}{2} rad$$

(La valeur de x est positive à ce moment puisque l'accélération est négative. x et a sont toujours de signes opposés puisque $a = -\omega^2 x$.)

L'équation du mouvement est donc

$$x = 0,2026m \cdot \sin\left(4\pi \tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{\pi}{2} rad\right)$$

13. Comme le mouvement est symétrique par rapport à x = 0, le temps pour aller de x = -10 cm à x = 0 est le même que le temps pour aller de x = 0 à x = 10 cm. On va donc trouver le temps pour aller de x = 0 à x = 10 cm et on multipliera par 2 à la fin.

Il reste à trouver quand l'objet est à x = 0 et quand il est à x = 10 cm.

Comme on ne mentionne pas quand est le t = 0 dans le problème, on peut le choisir. On va donc choisir que t = 0 quand l'objet est à x = 0 et qu'il a une vitesse positive (pour qu'il soit en train de se diriger vers x = 10 cm). Voilà, on a trouvé que l'objet est à x = 0 à t = 0.

Il ne reste qu'à trouver quand l'objet est à x = 10 cm. Pour cela, il nous faut l'équation du mouvement

$$x = A\sin\left(\omega t + \phi\right)$$

On sait déjà que A = 20 cm, mais il nous manque ω et ϕ.

Avec une période de 6 s, ω est

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2\pi}{T}\\ &= \frac{2\pi}{6s}\\ &= \frac{\pi}{3}\frac{rad}{s}\end{aligned}$$

Comme l'objet est à x = 0 et qu'il a une vitesse positive à t = 0, la constante de phase est

$$\begin{aligned}\tan(\omega t+\phi) &= \frac{x\omega}{v}\\ \tan(0+\phi) &= \frac{0m\cdot\frac{\pi}{3}s^{-1}}{v}\\ \tan(\phi) &= 0\\ \phi &= 0rad\end{aligned}$$

L'équation du mouvement est donc

$$x = 0,2m\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\tfrac{rad}{s}\cdot t\right)$$

Trouvons maintenant quand l'objet arrivera à x = 10 cm. On a alors

$$\begin{aligned}0,1m &= 0,2m\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\tfrac{rad}{s}\cdot t\right)\\ \frac{1}{2} &= \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\tfrac{rad}{s}\cdot t\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}s^{-1}\cdot t \qquad et \qquad \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{3}s^{-1}\cdot t$$

$$t = \frac{1}{2}s \qquad et \qquad t = \frac{5}{2}s$$

Il faut donc 1/2 s pour que l'objet passe de x = 0 cm à x = 10 cm. (L'autre réponse correspond à l'objet qui part de x = 0 cm, va à x = 20 cm et revient ensuite à x = 10 cm.)

Il faut donc 1/2 s pour passer de x = – 10 cm à x = 0 cm, puis un autre 1/2 s pour passer de x = 0 cm à x = 10 cm. Le temps total est donc de 1 s.

14. a) On va trouver l'amplitude avec

$$A^2 = x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2$$

Toutefois, il faut connaitre ω. La valeur de ω est

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{k}{m}}\\ &= \sqrt{\frac{81\frac{N}{m}}{0,25kg}}\\ &= 18\tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

L'amplitude du mouvement est donc

$$\begin{aligned}A^2 &= x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2\\ &= \left(0,1m\right)^2 + \left(\frac{-2\frac{m}{s}}{18s^{-1}}\right)^2\\ &= 0,022346m^2\\ A &= 0,1495m\end{aligned}$$

b) La constante de phase est

$$\begin{aligned}\tan\left(\omega t + \phi\right) &= \frac{x\omega}{v}\\ \tan\left(18\tfrac{rad}{s}\cdot 1s + \phi\right) &= \frac{0,1m\cdot 18s^{-1}}{-2\frac{m}{s}}\\ \tan\left(18rad + \phi\right) &= -0,9\\ 18rad + \phi &= 2,4088rad\end{aligned}$$

Notez que la calculatrice donne -0,7328 rad, mais on doit ajouter π puisque la valeur de v est négative (ou pour une question de quadrant, selon votre façon de considérer cette question).

On a donc

$$\begin{aligned}18rad + \phi &= 2,4088rad\\ \phi &= -15,591rad\end{aligned}$$

On pourrait ajouter ou enlever des 2π à cette valeur si on voulait.

c) L'équation du mouvement est donc

$$x = 0{,}1495m \cdot \sin\left(18\tfrac{rad}{s} \cdot t - 15{,}591rad\right)$$

15. On a

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$10Hz = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Quand on change la masse, on a

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$6Hz = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+0{,}1kg}}$$

On a donc 2 équations et 2 inconnues.

a) On trouve facilement *m* en faisant le rapport des équations.

$$\frac{10Hz}{6Hz} = \frac{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+0{,}1kg}}}$$
$$\frac{5}{3} = \sqrt{\frac{m+0{,}1kg}{m}}$$
$$\frac{25}{9} = \frac{m+0{,}1kg}{m}$$
$$\tfrac{25}{9}m = m + 0{,}1kg$$
$$\tfrac{16}{9}m = 0{,}1kg$$
$$m = 0{,}05625kg$$

b) La constante du ressort est donc

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$10Hz = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{0,05625kg}}$$
$$k = 222,1\tfrac{N}{m}$$

16. On trouve la période avec

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

On a la masse, mais il nous manque la constante du ressort. On peut trouver cette constante avec

$$mg = ky_0$$
$$0,2kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} = k \cdot 0,1m$$
$$k = 19,6\tfrac{N}{m}$$

La période d'oscillation est donc

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \\ &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0,2kg}{19,6\tfrac{N}{m}}} \\ &= 0,6347s \end{aligned}$$

17. a)

En passant d'un côté à l'autre du mouvement, on parcourt deux fois l'amplitude (de x = -A à x = 0, puis de x = 0 à x = A). L'amplitude est donc de 6 cm.

b) Ce mouvement est la moitié d'un cycle. 0,8 s est donc la moitié de la période et la période est donc de 1,6 s.

c) La vitesse maximale est donner par

$$v_{\max} = A\omega$$

On trouve ω avec la période

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2\pi}{T} \\ &= \frac{2\pi}{1,6s} \\ &= 3,927\tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

La vitesse maximale est donc de

$$\begin{aligned}v_{max} &= A\omega \\ &= 0,06m \cdot 3,927s^{-1} \\ &= 0,2356\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

d) L'accélération maximale est

$$\begin{aligned}a_{max} &= A\omega^2 \\ &= 0,06m \cdot \left(3,927s^{-1}\right)^2 \\ &= 0,9253\tfrac{m}{s^2}\end{aligned}$$

18. On trouve la masse avec

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

On a déjà *k*, mais il nous manque ω. On trouve ω avec la vitesse maximale.

$$\begin{aligned}v_{max} &= A\omega \\ 4\tfrac{m}{s} &= 0,2m \cdot \omega \\ \omega &= 20\tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

On a donc

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$20s^{-1} = \sqrt{\frac{250\frac{N}{m}}{m}}$$
$$400s^{-2} = \frac{250\frac{N}{m}}{m}$$
$$m = 0,625kg$$

19. On trouve la période avec

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

On a la masse, mais il nous manque la constante du ressort.

Puisque $F = -kx$, la pente du graphique est égale à $-k$. Cette pente est

$$\begin{aligned} pente &= \frac{-8N}{0,4m} \\ &= -20\tfrac{N}{m} \end{aligned}$$

La valeur de k est donc 20 N/m. La période du mouvement est donc

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \\ &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0,2kg}{20\frac{N}{m}}} \\ &= 0,6283s \end{aligned}$$

20. La constante de phase se trouve avec

$$\tan(\omega t + \phi) = \frac{\omega x}{v}$$

Pour la trouver, il nous faut ω et v. On peut trouver ω avec la période.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$2s = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$\omega = \pi \tfrac{rad}{s}$$

La vitesse à $t = 0$ se trouve à partir de la position à $t = 0$.

$$x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2$$
$$(-0,08m)^2 + \left(\frac{v}{\pi s^{-1}}\right)^2 = (0,12m)^2$$
$$v = 0,28099 \tfrac{m}{s}$$

Puisqu'on dit que la vitesse est positive, on a $v = 0,28099$ m/s.

La constante de phase est donc

$$\tan(\omega t + \phi) = \frac{\omega x}{v}$$
$$\tan(0 + \phi) = \frac{\pi s^{-1} \cdot (-0,08m)}{0,28099 \tfrac{m}{s}}$$
$$\tan\phi = -0,8944$$
$$\phi = -0,7297 rad$$

21. Sans l'eau, le ressort est allongé un peu pour soutenir la chaudière. On a alors

$$mg = ky_0$$
$$2kg \cdot 9,8 \tfrac{N}{kg} = ky_0$$
$$ky_0 = 19,6N$$

Quand on ajoute de l'eau, la masse augmente et l'allongement du ressort augmente de 12 cm. On a alors

$$(2kg + m_{eau})\, g = k(y_0 + 0,12m)$$
$$2kg \cdot 9,8 \tfrac{N}{kg} + m_{eau} \cdot 9,8 \tfrac{N}{kg} = ky_0 + k \cdot 0,12m$$
$$19,6N + m_{eau} \cdot 9,8 \tfrac{N}{kg} = ky_0 + k \cdot 0,12m$$

Mais puisque ky_0 = 19.6 N, on a

$$19,6N + m_{eau} \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} = ky_0 + k \cdot 0,12m$$
$$19,6N + m_{eau} \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} = 19,6N + k \cdot 0,12m$$
$$m_{eau} \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} = k \cdot 0,12m$$

On sait aussi que la période d'oscillation est de 2,4 s. On a donc

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$
$$2,4s = 2\pi\sqrt{\frac{2kg + m_{eau}}{k}}$$

De cette équation, on isole *k*.

$$\frac{2,4s}{2\pi} = \sqrt{\frac{2kg + m_{eau}}{k}}$$
$$0,382s = \sqrt{\frac{2kg + m_{eau}}{k}}$$
$$0,1459s^2 = \frac{2kg + m_{eau}}{k}$$
$$k = \frac{2kg + m_{eau}}{0,1459s^2}$$

On remplace ensuite dans l'équation

$$m_{eau} \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} = k \cdot 0,12m$$

Ce qui nous donne

$$m_{eau} \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} = \frac{2kg + m_{eau}}{0,1459s^2} \cdot 0,12m$$

Puis on isole m_{eau}

$$m_{eau} \cdot 1,4298m = \left(2kg + m_{eau}\right) \cdot 0,12m$$
$$m_{eau} \cdot 1,4298m = 2kg \cdot 0,12m + m_{eau} \cdot 0,12m$$
$$m_{eau} \cdot 1,3098m = 2kg \cdot 0,12m$$
$$m_{eau} = 0,1832kg$$

22.

a) Puisque la moitié d'un cycle dure 0,6 seconde, la période est de 1,2 s. On trouve donc que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$1,2s = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2kg}{k}}$$

$$k = 54,83\tfrac{N}{m}$$

b) Trouvons de combien le ressort doit étirer pour atteindre la position d'équilibre.

$$mg = ky_0$$

$$y_0 = \frac{mg}{k}$$

$$y_0 = \frac{2kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg}}{54,83\tfrac{N}{m}}$$

$$y_0 = 0,3575m$$

Or, la distance entre la position la plus haute et la position d'équilibre est égale à l'amplitude. L'amplitude est donc 35,75 cm.

c) La vitesse maximale est

$$v_{\max} = A\omega$$

Ici

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{2\pi}{1,2s}$$

$$= \frac{5\pi}{3}\frac{rad}{s}$$

On a donc

$$\begin{aligned} v_{\max} &= A\omega \\ &= 0,3575m \cdot \frac{5\pi}{3} s^{-1} \\ &= 1,872 \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

d) La vitesse est donnée par

$$\begin{aligned} v &= A\omega \cos(\omega t + \phi) \\ &= v_{\max} \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Trouvons premièrement la constante de phase. On sait que la vitesse est nulle initialement. On a donc

$$\tan(\omega t + \phi) = \frac{x\omega}{v}$$
$$\tan \phi = \infty$$
$$\phi = \frac{\pi}{2} rad$$

On a donc

$$\begin{aligned} v &= v_{\max} \cos(\omega t + \phi) \\ &= 1,872 \tfrac{m}{s} \cdot \cos\left(\tfrac{5\pi}{3} \tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{\pi}{2} rad\right) \end{aligned}$$

On veut que la vitesse soit de 1 m/s (positive, car elle est vers le haut). On a donc

$$1 \tfrac{m}{s} = 1,872 \tfrac{m}{s} \cdot \cos\left(\tfrac{5\pi}{3} \tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{\pi}{2} rad\right)$$
$$0,5349 = \cos\left(\tfrac{5\pi}{3} \tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{\pi}{2} rad\right)$$
$$\pm 1,007 = \tfrac{5\pi}{3} s^{-1} \cdot t + \tfrac{\pi}{2}$$

Avec la valeur positive, on a

$$1,007 = \tfrac{5\pi}{3} s^{-1} \cdot t + \tfrac{\pi}{2}$$
$$-0,5637 = \tfrac{5\pi}{3} s^{-1} \cdot t$$
$$t = -0,1077 s$$

En ajoutant la période, on a t = 1,0923 s.

Avec la valeur négative, on a

$$\begin{aligned}-1,007 &= \tfrac{5\pi}{3}s^{-1}\cdot t+\tfrac{\pi}{2}\\ -2,578 &= \tfrac{5\pi}{3}s^{-1}\cdot t\\ t &= -0,4923s\end{aligned}$$

En ajoutant la période, on a t = 0,7077 s.

On voit que cela arrivera pour la première fois à t = 0,7077 s.

23. a) L'énergie est

$$\begin{aligned}E_{mec} &= \frac{1}{2}kA^2\\ &= \frac{1}{2}\cdot 250\tfrac{N}{m}\cdot(0,2m)^2\\ &= 5J\end{aligned}$$

b) À t = 5 s, la position est

$$\begin{aligned}x &= 0,2m\cdot\sin\left(5\tfrac{rad}{s}\cdot 5s+\tfrac{\pi}{4}rad\right)\\ &= 0,12146m\end{aligned}$$

L'énergie du ressort est donc

$$\begin{aligned}U_R &= \frac{1}{2}kx^2\\ &= \frac{1}{2}\cdot 250\tfrac{N}{m}\cdot(0,12146m)^2\\ &= 1,844J\end{aligned}$$

c) On peut trouver l'énergie cinétique avec

$$\begin{aligned}E_{mec} &= E_k+U_R\\ 5J &= E_k+1,844J\\ E_k &= 3,156J\end{aligned}$$

24. a) On a

$$E_{mec} = \frac{1}{2}kA^2$$
$$30J = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (0,8m)^2$$
$$k = 93,75 \tfrac{N}{m}$$

b) Avec une période de 3 s, on a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$
$$3s = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{93,75 \frac{N}{m}}}$$
$$m = 21,37kg$$

c) ω est

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$
$$= \frac{2\pi}{3s}$$
$$= 2,094 \tfrac{rad}{s}$$

La vitesse maximale est donc

$$v_{\max} = A\omega$$
$$= 0,8m \cdot 2,094s^{-1}$$
$$= 1,6755 \tfrac{m}{s}$$

25. a) L'énergie cinétique se trouve avec

$$E_k + U = E_{mec}$$

On sait que l'énergie mécanique est de 5 J, mais il nous manque l'énergie du ressort.

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

On a la position, mais il nous manque la constante du ressort. Cette constante se trouve avec l'amplitude.

$$E_{mec} = \frac{1}{2}kA^2$$
$$5J = \frac{1}{2}\cdot k\cdot(0,1m)^2$$
$$k = 1000\tfrac{N}{m}$$

L'énergie du ressort est donc

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2}kx^2\\ &= \frac{1}{2}\cdot 1000\tfrac{N}{m}\cdot(0,06m)^2\\ &= 1,8J\end{aligned}$$

Avec la conservation de l'énergie, on a alors

$$E_k + U = E_{mec}$$
$$E_k + 1,8J = 5J$$
$$E_k = 3,2J$$

b) L'énergie est

$$\begin{aligned}U_R &= \frac{1}{2}kx^2\\ &= \frac{1}{2}\cdot 1000\tfrac{N}{m}\cdot(0,04m)^2\\ &= 0,8J\end{aligned}$$

26. On a

$$E_{mec} = E_k + U$$

Si $E_k = U$, on obtient

$$E_{mec} = U + U$$
$$E_{mec} = 2U$$
$$\frac{1}{2}m\omega^2A^2 = 2\cdot\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$
$$A^2 = 2\cdot x^2$$

Ce qui donne

$$x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}} = \pm \frac{0,25m}{\sqrt{2}}$$

Trouvons maintenant quand cela se produit. Commençons par la valeur positive de *x*.

$$x = 0,25m \cdot \sin\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot t + \pi rad\right)$$

$$\frac{0,25m}{\sqrt{2}} = 0,25m \cdot \sin\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot t + \pi rad\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot t + \pi rad\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = 10s^{-1} \cdot t + \pi \qquad et \qquad \frac{3\pi}{4} = 10s^{-1} \cdot t + \pi$$

$$\frac{-3\pi}{4} = 10s^{-1} \cdot t \qquad et \qquad \frac{-\pi}{4} = 10s^{-1} \cdot t$$

$$t = -0,2356s \qquad et \qquad t = -0,0785s$$

Ajoutons maintenant la période à ces deux réponses pour trouver des valeurs positives de *t*. Comme la période est

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{10s^{-1}} \\ &= 0,6283s \end{aligned}$$

On a

$$\begin{array}{ccc} t = -0,2356s & & t = -0,0785s \\ & \downarrow +0,6283s & \\ t = 0,3927s & & t = 0,5498s \end{array}$$

Regardons maintenant la valeur négative de *x*.

$$x = 0,25m \cdot \sin\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot t + \pi rad\right)$$
$$-\frac{0,25m}{\sqrt{2}} = 0,25m \cdot \sin\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot t + \pi rad\right)$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot t + \pi rad\right)$$
$$-\frac{\pi}{4} = 10s^{-1} \cdot t + \pi \qquad et \qquad \frac{5\pi}{4} = 10s^{-1} \cdot t + \pi$$
$$\frac{-5\pi}{4} = 10s^{-1} \cdot t \qquad et \qquad \frac{\pi}{4} = 10s^{-1} \cdot t$$
$$t = -0,3927s \qquad et \qquad t = 0,0785s$$

Ajoutons maintenant la période à la première réponse pour obtenir une valeur positive. La valeur obtenue est 0,2356 s.

Les instants sont donc, dans l’ordre : 0,0785 s, 0,2356, 0,3927, 0,5498 s.

Le premier moment est donc à t = 0,0785 s.

27. a) On commence avec

$$A^2 = x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2$$

Puisque la grandeur de la vitesse est égale au quart de la vitesse maximale, on a

$$v = \frac{v_{\max}}{4}$$
$$v = \frac{A\omega}{4}$$

On a donc

$$A^2 = x^2 + \left(\frac{A\omega / 4}{\omega} \right)^2$$

$$A^2 = x^2 + \left(\frac{A}{4} \right)^2$$

$$A^2 = x^2 + \frac{A^2}{16}$$

$$\frac{15A^2}{16} = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{15}{16}} A$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{15}{16}} \cdot 0{,}12m$$

$$x = \pm 0{,}1162m$$

b) On commence avec

$$E_{mec} = E_k + U_R$$

Puisqu'on dit que $E_k = ½U$, on a

$$E_{mec} = \frac{1}{2} U_R + U_R$$

$$= \frac{3}{2} U_R$$

Cela nous donne

$$\frac{1}{2} kA^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right)$$

$$A^2 = \frac{3}{2} x^2$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} A$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 0{,}12m$$

$$x = \pm 0{,}09798m$$

28. a) La période est

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \\ &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2kg}{200\frac{N}{m}}} \\ &= 0,6283s \end{aligned}$$

b) On va trouver l'amplitude avec

$$A^2 = y^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2$$

Ce y est la position de la masse par rapport à la position d'équilibre. L'étirement du ressort à la position d'équilibre est

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{mg}{k} \\ &= \frac{2kg \cdot 9,8\frac{N}{kg}}{200\frac{N}{m}} \\ &= 0,098m \end{aligned}$$

Puisque le ressort n'est pas étiré initialement, la masse est à 9,8 cm de la position d'équilibre. Avec une vitesse initiale nulle, l'amplitude est

$$A^2 = y^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2$$

$$A^2 = (0,098m)^2 + \left(\frac{0\frac{m}{s}}{\omega}\right)^2$$

$$A = 0,098m$$

<u>*Solution alternative*</u>

La position initiale du bloc correspond au point le plus haut du mouvement puisque sa vitesse est nulle. Le bloc va ensuite descendre jusqu'à atteindre le point le plus bas quand la vitesse de bloc redeviendra nulle. Ce déplacement correspondra à 2 fois l'amplitude, parce que le bloc fera une fois l'amplitude jusqu'au point le plus haut jusqu'au point d'équilibre et une autre fois l'amplitude en passant de la position d'équilibre jusqu'au point le plus bas.

Trouvons le déplacement total du bloc jusqu'au point le plus bas avec la conservation de l'énergie. Le système étant formé d'un bloc et d'un ressort, l'énergie mécanique est

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

Initialement (bloc immobile à son point le plus haut), l'énergie est, en plaçant le $y = 0$ à la position initiale du bloc,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\cdot 2kg \cdot \left(0\tfrac{m}{s}\right)^2 + 2kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\cdot 0m + \frac{1}{2}\cdot 200\tfrac{N}{m}\cdot \left(0m\right)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ensuite, le bloc descend de la distance d, ce qui étire le ressort de cette distance. On a alors

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}\cdot 2kg \cdot \left(0\tfrac{m}{s}\right)^2 + 2kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\cdot \left(-d\right) + \frac{1}{2}\cdot 200\tfrac{N}{m}\cdot d^2 \\ &= -19{,}6N \cdot d + 100\tfrac{N}{m}\cdot d^2 \end{aligned}$$

Selon la conservation de l'énergie mécanique, on obtient

$$\begin{gathered} E = E' \\ 0J = -19{,}6N \cdot d + 100\tfrac{N}{m}\cdot d^2 \\ 19{,}6N \cdot d = 100\tfrac{N}{m}\cdot d^2 \\ 19{,}6N = 100\tfrac{N}{m}\cdot d \\ d = 0{,}196m \end{gathered}$$

L'amplitude est la moitié de cette valeur, ce qui signifie que l'amplitude est de 9,8 cm.

29. a) On va trouver la période avec

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

On trouve ω avec l'énergie potentielle.

$$128\tfrac{N}{m}\cdot x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$
$$128\tfrac{N}{m}\cdot x^2 = \frac{1}{2}\cdot 4kg\cdot\omega^2\cdot x^2$$
$$\omega = 8\tfrac{rad}{s}$$

(On a trouvé la masse avec l'énergie potentielle qui vaut ½mv^2.)

La période est donc

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$= \frac{2\pi}{8s^{-1}}$$
$$= 0{,}7854s$$

b) La formule nous indique que l'énergie totale est de 72 J. On a donc

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$
$$72J = \frac{1}{2}\cdot 4kg\cdot v_{\max}^2$$
$$v_{\max} = 6\tfrac{m}{s}$$

c) On a

$$v_{\max} = A\omega$$
$$6\tfrac{m}{s} = A\cdot 8s^{-1}$$
$$A = 0{,}75m$$

30. Comme le pendule redevient vertical 2 fois par cycle, la période du pendule doit être de 4 s. On a donc

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$
$$4s = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{9{,}8\tfrac{N}{kg}}}$$
$$l = 3{,}972m$$

31. Si la période est de 2 s sur Terre, alors la longueur de la corde est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$
$$2s = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{9,8\frac{N}{kg}}}$$
$$l = 0,9929m$$

La période sur la Lune serait donc de

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$
$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0,9929m}{1,6\frac{N}{kg}}}$$
$$T = 4,95s$$

32. a) La période est

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \\ &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2m}{9,8\frac{N}{kg}}} \\ &= 2,838s \end{aligned}$$

b) La vitesse maximale est

$$v_{\max} = A\omega$$

Il faut donc trouver l'amplitude. Cette amplitude est

$$\begin{aligned} A &= \theta_{\max} l \\ &= \left(10°\frac{2\pi rad}{360°}\right) \cdot 2m \\ &= 0,3491m \end{aligned}$$

Il faut ensuite trouver la fréquence angulaire.

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{g}{l}}\\ &= \sqrt{\frac{9,8\frac{N}{kg}}{2m}}\\ &= 2,214\tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

La vitesse maximale est donc

$$\begin{aligned}v_{\max} &= 0,3491m\cdot 2,214s^{-1}\\ &= 0,7727\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

33. On trouve la vitesse avec

$$A^2 = x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2$$

ω est

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2\pi}{T}\\ &= \frac{2\pi}{1,6s}\\ &= 3,927\tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

Pour trouver l'amplitude, il nous faudra la longueur de la corde. On trouve cette longueur avec

$$\begin{aligned}T &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\\ 1,6s &= 2\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{9,8\frac{N}{kg}}}\\ l &= 0,6355m\end{aligned}$$

L'amplitude est donc

$$\begin{aligned} A &= \theta_{\max} l \\ &= \left(12° \frac{2\pi rad}{360°}\right) \cdot 0,6355m \\ &= 0,1331m \end{aligned}$$

La position à $\theta = 8°$ est

$$\begin{aligned} x &= \theta l \\ &= \left(8° \frac{2\pi rad}{360°}\right) \cdot 0,6355m \\ &= 0,0887m \end{aligned}$$

On a donc

$$A^2 = x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2$$

$$(0,1311m)^2 = (0,0887m)^2 + \left(\frac{v}{3,927s^{-1}}\right)^2$$

$$v = 0,3896 \tfrac{m}{s}$$

34. Dans l'équation

$$\theta = \theta_{\max} \sin(\omega t + \phi)$$

Il nous manque l'amplitude, ω et ϕ.

On trouve ω avec

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{g}{l}} \\ &= \sqrt{\frac{9,8 \frac{N}{kg}}{1,2m}} \\ &= 2,8577 \tfrac{rad}{s} \end{aligned}$$

Pour trouver l'amplitude angulaire, on commence par trouver l'amplitude *A*. On trouve cette amplitude avec

$$A^2 = x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2$$

On sait que la vitesse est de -20 cm/s. La position est

$$\begin{aligned} x &= \theta l \\ &= \left(6° \frac{2\pi rad}{360°}\right) \cdot 1,2m \\ &= 0,1257m \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} A^2 &= x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \\ &= (0,1257m)^2 + \left(\frac{0,2\frac{m}{s}}{2,8577s^{-1}}\right)^2 \\ &= 0,02069m^2 \\ A &= 0,1438m \end{aligned}$$

L'amplitude angulaire est donc

$$\begin{aligned} A &= \theta_{\max} l \\ 0,1438m &= \theta_{\max} \cdot 1,2m \\ \theta_{\max} &= 0,1199rad \\ \theta_{\max} &= 6,868° \end{aligned}$$

La constante de phase est

$$\begin{aligned} \tan(\omega t + \phi) &= \frac{x\omega}{v} \\ \tan(0 + \phi) &= \frac{0,1257m \cdot 2,8577s^{-1}}{-0,2\frac{m}{s}} \\ \phi &= 2,079rad \end{aligned}$$

(π a été ajouté puisque la vitesse est négative.)

L'équation est donc

$$\theta = 6,868° \cdot \sin\left(2,858\tfrac{rad}{s} \cdot t + 2,079rad\right)$$

35. a) On sait que la vitesse maximale est 0,6 m/s. Comme $v_{\max} = A\omega$, on a

$$A\omega = 0,6\tfrac{m}{s}$$

En prenant les formules de l'amplitude angulaire

$$A = \theta_{\max} l$$

et de ω

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

on arrive à

$$\begin{aligned}
\left(\theta_{\max} l\right)\sqrt{\frac{g}{l}} &= 0,6\tfrac{m}{s} \\
\theta_{\max}\frac{l}{\sqrt{l}}\sqrt{g} &= 0,6\tfrac{m}{s} \\
\theta_{\max}\sqrt{l}\sqrt{g} &= 0,6\tfrac{m}{s} \\
\left(15°\tfrac{2\pi rad}{360°}\right)\cdot\sqrt{l}\cdot\sqrt{9,8\tfrac{N}{kg}} &= 0,6\tfrac{m}{s} \\
l &= 0,536m
\end{aligned}$$

b) La période est

$$\begin{aligned}
T &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \\
&= 2\pi\cdot\sqrt{\frac{0,536m}{9,8\tfrac{N}{kg}}} \\
&= 1,47s
\end{aligned}$$

36. Le période se trouve avec

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ω est

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

où d est la distance entre le centre de masse et l'axe de rotation. Cette distance est égale au rayon du disque, donc à 20 cm.

Le moment d'inertie est égal à

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{2} mR^2 \\ &= \frac{3}{2} \cdot 5kg \cdot (0,2m)^2 \\ &= 0,3kgm^2 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{mgd}{I}} \\ &= \sqrt{\frac{5kg \cdot 9,8\frac{N}{kg} \cdot 0,2m}{0,3kgm^2}} \\ &= 5,715\frac{rad}{s} \end{aligned}$$

La période est donc

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{5,715s^{-1}} \\ &= 1,099s \end{aligned}$$

37. Le période se trouve avec

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ω est

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

d est la distance entre le centre de masse et l'axe de rotation. Cette distance est égale à 75 cm.

Le moment d'inertie est égal à

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{12} mL^2 + mh^2 \\ &= \frac{1}{12} \cdot 2kg \cdot (2m)^2 + 2kg \cdot (0,75m)^2 \\ &= 1,792 kgm^2 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{mgd}{I}} \\ &= \sqrt{\frac{2kg \cdot 9,8 \frac{N}{kg} \cdot 0,75m}{1,792 kgm^2}} \\ &= 2,864 \tfrac{rad}{s} \end{aligned}$$

La période est donc

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{2,864 s^{-1}} \\ &= 2,194 s \end{aligned}$$

38. Le moment d'inertie se trouve avec

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

ω est

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2\pi}{T}\\ &= \frac{2\pi}{1,335s}\\ &= 4,707\,\tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{mgd}{I}}\\ 4,707\,\tfrac{rad}{s} &= \sqrt{\frac{0,9kg\cdot 9,8\,\tfrac{N}{kg}\cdot 0,43m}{I}}\\ I &= 0,1712kgm^2\end{aligned}$$

39. La période d'oscillation est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Dans ce cas, le moment d'inertie est

$$I = \frac{1}{12}mL^2 + md^2$$

et la période devient

$$\begin{aligned}T &= 2\pi\sqrt{\frac{\tfrac{1}{12}mL^2 + md^2}{mgd}}\\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{\tfrac{1}{12}L^2 + d^2}{d}}\\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{L^2}{12d} + d}\end{aligned}$$

Pour obtenir la période minimale, il faut que le terme dans la racine soit le plus petit possible. On doit donc trouver la valeur de *d* qui donne la plus petite valeur à

$$\frac{L^2}{12d} + d$$

Il y a un minimum quand la dérivée de cette fonction est nulle. On a donc

$$-\frac{L^2}{12d^2}+1=0$$
$$\frac{L^2}{12d^2}=1$$
$$L^2=12d^2$$
$$d=\frac{L}{\sqrt{12}}$$

40. Pour déterminer la période, on doit trouver la fréquence angulaire avec

$$a=-(\text{constante})x$$

Examinons premièrement l'iceberg quand il est à l'équilibre dans l'eau. Il y a alors la gravitation et la poussée d'Archimède qui agissent. On doit donc avoir

$$-mg+\rho_{eau}gV_f=0$$

La masse de l'iceberg est égale à sa densité multipliée par son volume et le volume de la partie immergée de l'iceberg est L^2x_0. (x_0 est la hauteur de la partie de l'iceberg qui est dans l'eau.) L'équation des forces devient donc

$$-mg+\rho_{eau}gV_f=0$$
$$-\rho_{glace}L^3g+\rho_{eau}gL^2x_0=0$$
$$\rho_{eau}gx_0=\rho_{glace}Lg$$

Imaginons maintenant que l'iceberg se déplace un peu vers le haut d'une distance x. La hauteur de la partie immergée devient alors $x_0 - x$, ce qui diminue la poussée d'Archimède. Alors, l'équilibre des forces est rompu et l'iceberg accélère. L'équation des forces devient alors

$$-mg+\rho_{eau}gV_f=ma$$
$$-\rho_{glace}L^3g+\rho_{eau}gL^2\left(x_0-x\right)=\rho_{glace}L^3a$$
$$-\rho_{glace}Lg+\rho_{eau}g\left(x_0-x\right)=\rho_{glace}La$$
$$-\rho_{glace}Lg+\rho_{eau}gx_0-\rho_{eau}gx=\rho_{glace}La$$

Mais puisque

$$\rho_{eau} g x_0 = \rho_{glace} L g$$

on a

$$\begin{aligned} -\cancel{\rho_{glace} L g} + \cancel{\rho_{eau} g x_0} - \rho_{eau} g x &= \rho_{glace} L a \\ -\rho_{eau} g x &= \rho_{glace} L a \\ a &= -\frac{\rho_{eau}}{\rho_{glace} L} x \end{aligned}$$

C'est bien la condition qu'il faut respecter pour avoir une oscillation harmonique. On a alors

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{\rho_{eau}}{\rho_{glace} L} \\ \omega^2 &= \frac{1000 \frac{kg}{m^3}}{920 \frac{kg}{m^3} \cdot 75m} \\ \omega^2 &= 0,01449 \frac{rad^2}{s^2} \\ \omega &= 0,1204 \frac{rad}{s} \end{aligned}$$

La période d'oscillation est donc

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{0,1204 s^{-1}} \\ &= 52,19\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

41. Si la force est

$$F = -cx^3$$

alors l'énergie potentielle est

$$U = \frac{1}{4} c x^4$$

(Puisque on doit avoir $F = -dU/dx$)

Selon la conservation de l'énergie, on a alors

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}cx^4$$

Quand l'objet est au plus loin de la position d'équilibre (donc à $x = A$) il n'y a plus d'énergie cinétique. On a donc

$$E_{mec} = \frac{1}{4}cA^4$$

En combinant ces deux équations, on a

$$\frac{1}{4}cA^4 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}cx^4$$

Si on isole la vitesse dans cette équation, on a

$$v = \sqrt{\frac{1}{2m}c\left(A^4 - x^4\right)}$$

Avec cette formule, on peut calculer le temps qu'il faut pour aller de la position d'équilibre jusqu'à $x = A$. (Ce temps est égal au quart de la période.)

Le temps pour faire une petite distance dx est

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dx}{v} \\ &= \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2m}c\left(A^4 - x^4\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{2m}{c}}\frac{dx}{\sqrt{A^4 - x^4}} \end{aligned}$$

Si on somme tous les temps pour aller de $x = 0$ à $x = A$, on a

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{2m}{c}}\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{A^4 - x^4}}$$

On va alors poser que

$$x = Au$$
$$dx = Adu$$

On a alors

$$\begin{aligned}\frac{T}{4} &= \sqrt{\frac{2m}{c}}\int_0^1 \frac{Adu}{\sqrt{A^4 - A^4u^4}} \\ &= \sqrt{\frac{2m}{c}}\int_0^1 \frac{Adu}{\sqrt{A^4\left(1-u^4\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{2m}{c}}\int_0^1 \frac{Adu}{A^2\sqrt{\left(1-u^4\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{2m}{c}}\frac{1}{A}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\left(1-u^4\right)}}\end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$T = 4\sqrt{\frac{2m}{c}}\frac{1}{A}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\left(1-u^4\right)}}$$

Voilà, c'est fait. On voit que la période est proportionnelle à 1/*A*. L'intégrale ne change rien puisque que la valeur de l'intégrale ne dépend pas de *A*. C'est un simple chiffre (en fait, cette intégrale vaut 1,3110288).