1 LES OSCILLATIONS HARMONIQUES

Un pendule ayant une longueur de 20 m et une masse de 1 kg a une vitesse de 5 m/s quand il est à la position d'équilibre. Quelle est la vitesse du pendule quand il fait un angle de 10° ?

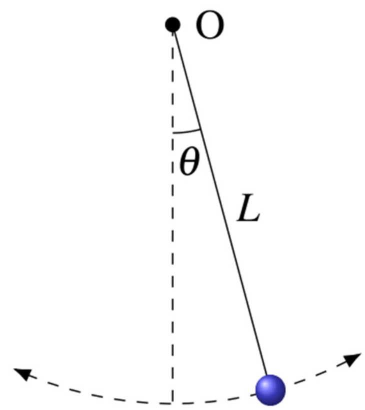
www.michaelfreemanphoto.com/media/1714951c-8d53-11e1-b996-f18e61a19d8d-foucault-pendulum

Découvrez comment résoudre ce problème dans ce chapitre.

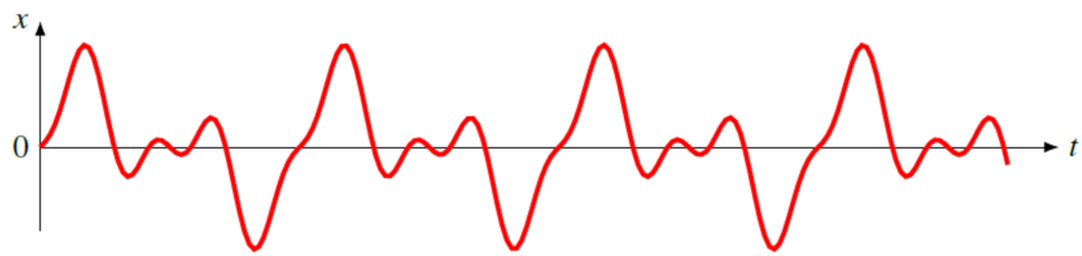
1.1 L'OSCILLATION HARMONIQUE

Description du mouvement avec un sinus

Quand un objet est en oscillation, il passe continuellement d'un côté à l'autre d'une position appelée *la position d'équilibre*. Ce pourrait être, par exemple, un pendule. Dans ce cas, la masse passe alternativement d'un côté à l'autre de la position d'équilibre, qui est au point le plus bas du mouvement du pendule.



Si on pose que la position d'équilibre est à $x = 0$, cela signifie que la position prend alternativement des valeurs positives et négatives. Le graphique de la position de l'objet en fonction du temps pourrait donc ressembler au graphique suivant.



Le graphique peut prendre une multitude de formes. La seule chose qui indique qu'il y a une oscillation c'est la répétition d'un mouvement identique à chaque cycle.

Il y a cependant un cas très important : le mouvement d'oscillation décrit par une fonction sinusoïdale. On parle alors d'oscillation harmonique. Dans ce cas, la position est donnée par la formule

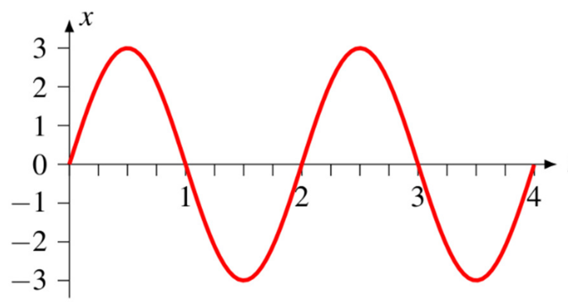
$$x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

(De façon correcte, on parle ici de mouvement harmonique simple. Dans le mouvement harmonique complexe, il faudrait plusieurs fonctions sinusoïdales additionnées pour décrire le mouvement.)

Prenons un exemple pour illustrer un mouvement d'oscillation harmonique. Supposons que la position soit donnée par

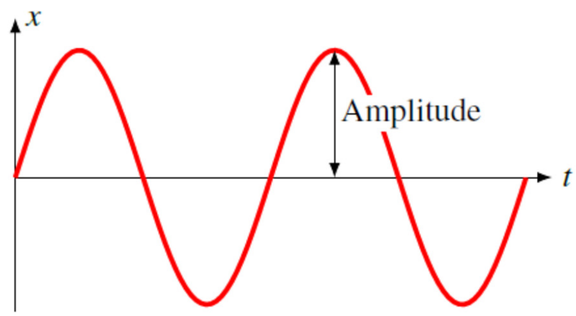
$$x = 3cm \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2s}t\right)$$

Le graphique de ce mouvement est illustré à droite.

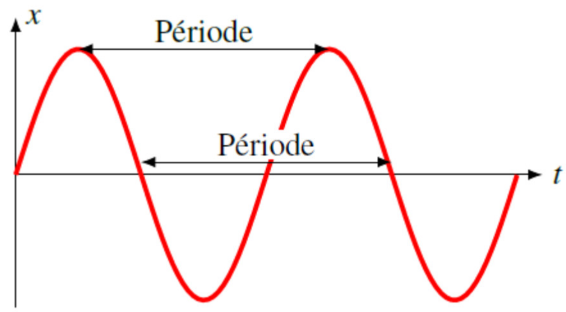


Dans ce clip, vous pouvez voir que le graphique de la position en fonction du temps pour un système masse-ressort (qui est un système qui fait une oscillation harmonique) est un graphique identique à celui de la figure.
http://www.youtube.com/watch?v=T7fRGXc9SBI

Dans la formule, A est l'amplitude du mouvement. Elle permet d'ajuster la hauteur du sinus. Normalement, un sinus a une valeur maximale de 1 et une valeur minimale de -1. En multipliant par A, le sinus aura alors une valeur maximale de A et une valeur minimale de $-A$. Cette amplitude indique la plus grande distance qu'il peut y avoir entre l'objet et la position d'équilibre. Dans notre exemple, l'amplitude est de 3 cm.



T est la période du mouvement. Elle indique le temps que prend l'objet pour faire un cycle d'oscillation. Normalement, un sinus a une période de 2π (en radians). En multipliant le temps par $2\pi/T$, le sinus aura alors une période de T. Dans notre exemple, la période est de 2 secondes.



Erreur fréquente : Utiliser une calculatrice en degrés

Les valeurs à l'intérieur des fonctions trigonométriques sont en radians dans ce chapitre. Il est très courant de voir des gens qui ont oublié de mettre leur calculatrice en radians et qui obtiennent des valeurs erronées.

f est la fréquence. Elle indique le nombre d'oscillations fait par l'objet en une seconde. Elle est mesurée en hertz (Hz), qui sont des s^{-1}.

Évidemment, il y a un lien entre la période et la fréquence puisque, plus l'objet fera d'oscillations par seconde, plus la période sera petite. Si l'objet fait 10 oscillations par seconde, cela signifie que chaque oscillation dure 0,1 s (1 seconde/10). Si l'objet fait 50 oscillations par seconde, chaque oscillation dure 0,02 s (1 seconde/50). On a donc

Lien entre T et f

$$T = \frac{1}{f}$$

On peut donc écrire la fonction sinusoïdale sous la forme

$$x = A\sin\left(2\pi ft\right)$$

La quantité $2\pi f$ revient continuellement dans l'étude des oscillations harmoniques. Les physiciens se sont donc tannés de l'écrire et ont décidé d'utiliser un symbole pour la représenter. C'est la fréquence angulaire.

Définition de la fréquence angulaire

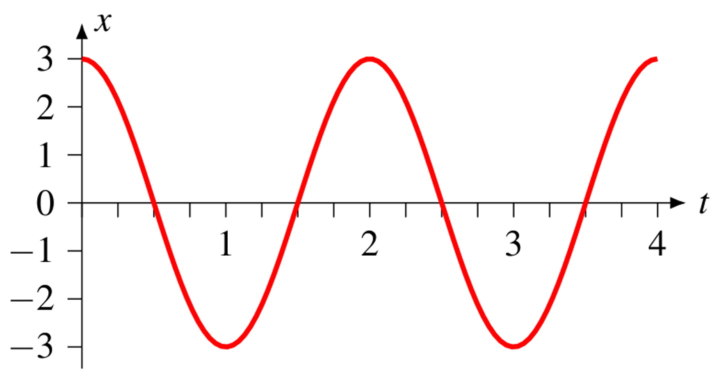
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

La fréquence angulaire est en rad/s et elle représente le nombre de cycles d'oscillation effectué durant un temps de 2π secondes.

Notre fonction sinusoïdale peut donc s'écrire sous la forme

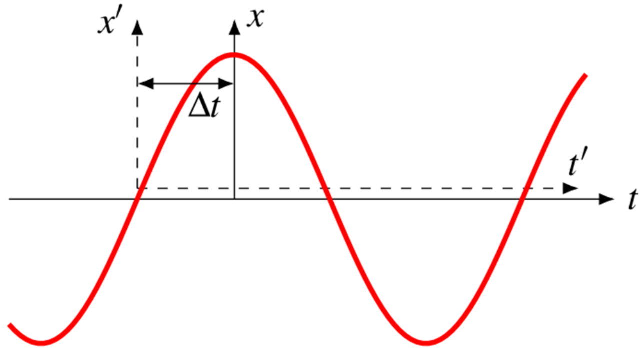
$$x = A\sin\left(\omega t\right)$$

Ce n'est toujours pas notre formule la plus générale pour décrire le mouvement d'oscillation, même si on peut ajuster l'amplitude et la période. On doit aussi pouvoir ajuster le début du mouvement. On n'est pas obligé de commencer le mouvement d'oscillation à $x = 0$ comme on doit avoir avec un sinus. Par exemple, le mouvement d'oscillation pourrait commencer à la position maximum comme illustré sur ce graphique.



Ce graphique ne correspond pas au graphique d'un sinus. On doit pouvoir changer quelque chose dans le sinus pour arriver à représenter cette fonction. En fait, la forme de la fonction n'a pas changé, le sinus n'est que déplacé le long de l'axe du temps. On a donc une translation de la fonction.

Sur le graphique suivant, on déplace notre fonction sinus de Δt vers la gauche.



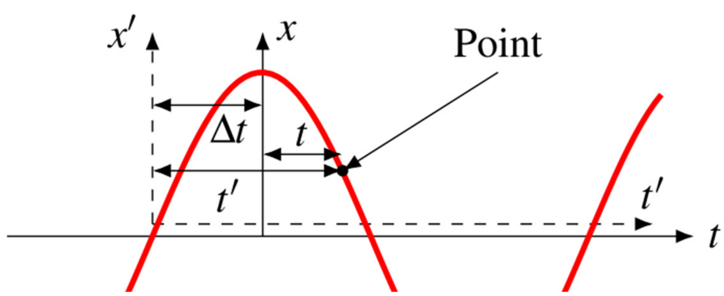
En pointillé, on voit les axes du départ qui se sont déplacés avec la fonction. Avec les axes en pointillé, nous avons toujours notre graphique du sinus. L'équation est donc

$$x' = A\sin(\omega t')$$

Avec les axes en lignes continues, nous avons notre sinus qui ne commence pas à zéro. On peut déterminer l'équation de ce sinus en trouvant les lois de transformation entre les coordonnées x' et t' et les coordonnées x et t. Comme on n'a pas changé de hauteur par rapport aux axes horizontaux lors du déplacement, on n'a pas changé les valeurs de x.

$$x' = x$$

Les points du graphique ne sont cependant pas à la même distance des axes verticaux puisque l'axe x' est Δt plus à gauche.



La loi de transformation est donc

$$t' = t + \Delta t$$

Si on met ces transformations dans notre formule du sinus, on obtiendra l'équation de ce graphique en fonction des axes x et t.

$$x' = A\sin(\omega t')$$
$$x = A\sin(\omega(t + \Delta t))$$
$$x = A\sin(\omega t + \omega\Delta t)$$

ω et Δt étant des constantes, leur produit est aussi une constante. Cette constante est notée ϕ et est appelée la *constante de phase* (qui est en radians).

$$\phi = \omega \Delta t$$

Notre équation la plus générale pour le mouvement d'oscillation harmonique est donc

Position en fonction du temps pour une oscillation harmonique

$$x = A \sin\left(\omega t + \phi\right)$$

Notez que tout ce qu'il y a à l'intérieur du sinus porte le nom de phase. (C'est un terme général en mathématiques et qui ne s'applique pas uniquement aux oscillations harmoniques.)

Examinons un peu plus le décalage fait par cette constante de phase. Puisque $\omega = 2\pi/T$, on peut écrire

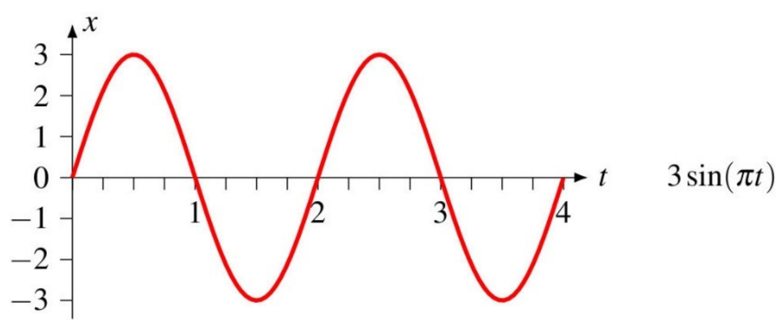
$$\begin{aligned} \phi &= \omega \Delta t \\ &= \frac{2\pi}{T} \Delta t \end{aligned}$$

On obtient alors

Constante de phase

$$\phi = \frac{\Delta t}{T} 2\pi$$

Illustrons l'effet de cette constante de phase par quelques exemples simples. On va commencer avec le graphique d'un sinus ayant une constante de phase nulle. Dans ce cas, le sinus n'est pas décalé et il commence à 0 avec une pente positive.



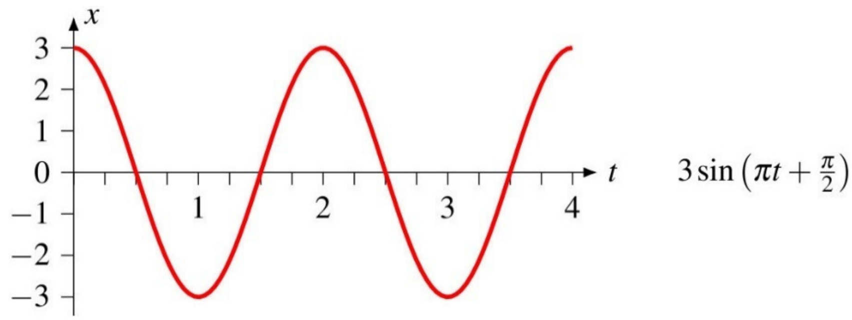
Si on déplace le sinus d'un quart de cycle, alors on a

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{1}{4}$$

et la constante de phase est

$$\phi = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

Voici le graphique de ce sinus décalé d'un quart de cycle vers la gauche.



Avec $\phi = \pi/2$, le sinus commence toujours à un maximum avec une pente nulle.

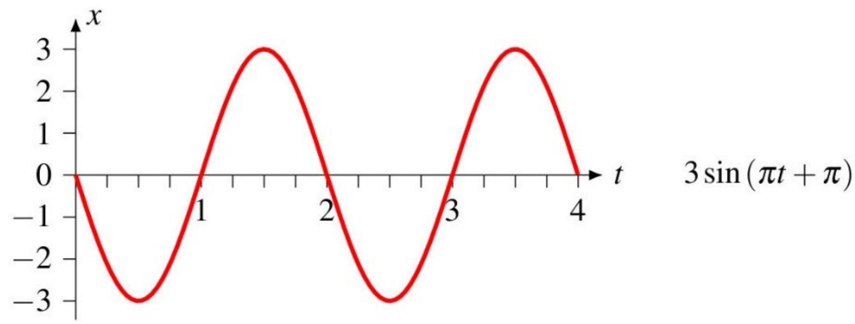
Si on déplace le sinus d'un demi-cycle, alors on a

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{1}{2}$$

et la constante de phase est

$$\phi = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$$

Voici le graphique de ce sinus décalé d'un demi-cycle vers la gauche.



Avec $\phi = \pi$, le sinus commence toujours à 0 avec une pente négative.

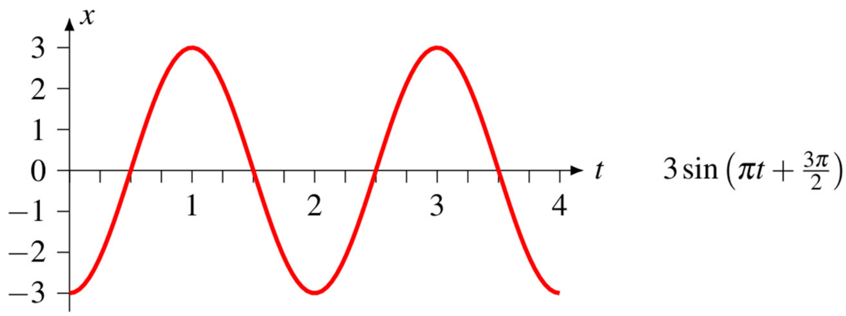
Si on déplace le sinus de trois quarts de cycle, alors on a

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{3}{4}$$

et la constante de phase est

$$\phi = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

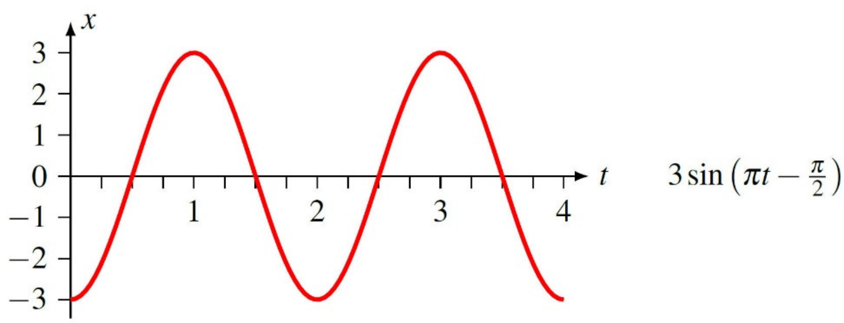
Voici le graphique de ce sinus décalé de trois-quarts de cycle vers la gauche.



Avec $\phi = 3\pi/2$, le sinus commence toujours à un minimum avec une pente nulle.

Inutile d'utiliser une constante de phase de 2π, puisqu'on décale alors le graphique d'un cycle au complet et on revient à notre sinus du départ.

Les constantes de phase positives font décaler le sinus vers les *x* négatifs. Pour décaler le sinus vers les *x* positifs, il suffit d'utiliser une constante de phase négative. Par exemple, voici le graphique d'un sinus décalé d'un quart de cycle vers la droite et qui correspond à $\phi = -\pi/2$.



Vous remarquez sans doute que ce graphique est identique au graphique correspondant à $\phi = 3\pi/2$. C'est normal puisque l'écart entre $-\pi/2$ et $3\pi/2$ est égal à 2π. Quand on ajoute ou on enlève 2π à la constante de phase, on obtient exactement le même résultat. On peut donc ajouter ou enlever des 2π à la constante de phase autant qu'on veut sans changer le graphique.

Certains d'entre vous ont peut-être déjà remarqué qu'avec une constante de $\pi/2$, le graphique obtenu est identique au graphique d'un cosinus. Cela veut dire qu'on pourrait également décrire les oscillations harmoniques avec un cosinus. C'est très correct de le faire et certains livres sur les oscillations travaillent toujours avec un cosinus. On peut passer facilement d'un à l'autre avec l'identité trigonométrique suivante.

$$\sin\left(\omega t + \phi\right) = \cos\left(\omega t + \phi - \tfrac{\pi}{2}\right)$$

Par exemple, on peut avoir

$$\sin\left(\omega t + \pi\right) = \cos\left(\omega t + \tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$\sin\left(\omega t + 4,206\right) = \cos\left(\omega t + 2,635\right)$$

$$\sin(\omega t + 0,902) = \cos(\omega t - 0,669)$$

La constante de phase est toujours π/2 plus petite avec le cosinus qu'avec le sinus.

Les identités suivantes peuvent être aussi utiles à l'occasion.

$$\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\omega t)$$
$$\sin(\omega t + \pi) = -\sin(\omega t)$$
$$\sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos(\omega t)$$
$$\sin(\omega t + 2\pi) = \sin(\omega t)$$

L'amplitude du mouvement n'est jamais négative. S'il y a un signe négatif devant la fonction, c'est une constante de phase de π déguisée en signe négatif comme l'indique la deuxième identité. Ainsi, l'équation x = -3 sin (2 t), est en fait l'équation x = 3 sin (2 t + π), ce qui montre bien que l'amplitude est 3 (et non pas -3).

Vitesse et accélération

Avec la position en fonction du temps, on peut facilement trouver la vitesse et l'accélération de l'objet en fonction du temps. La vitesse est

$$v = \frac{dx}{dt}$$

On obtient ainsi

Vitesse en fonction du temps pour une oscillation harmonique

$$v = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

Comme le cosinus peut prendre des valeurs entre -1 et 1, la plus grande valeur que peut prendre la vitesse (en valeur absolue) est

Vitesse maximale

$$v_{\max} = A\omega$$

L'accélération est

$$a = \frac{dv}{dt}$$

On obtient ainsi

Accélération en fonction du temps pour une oscillation harmonique

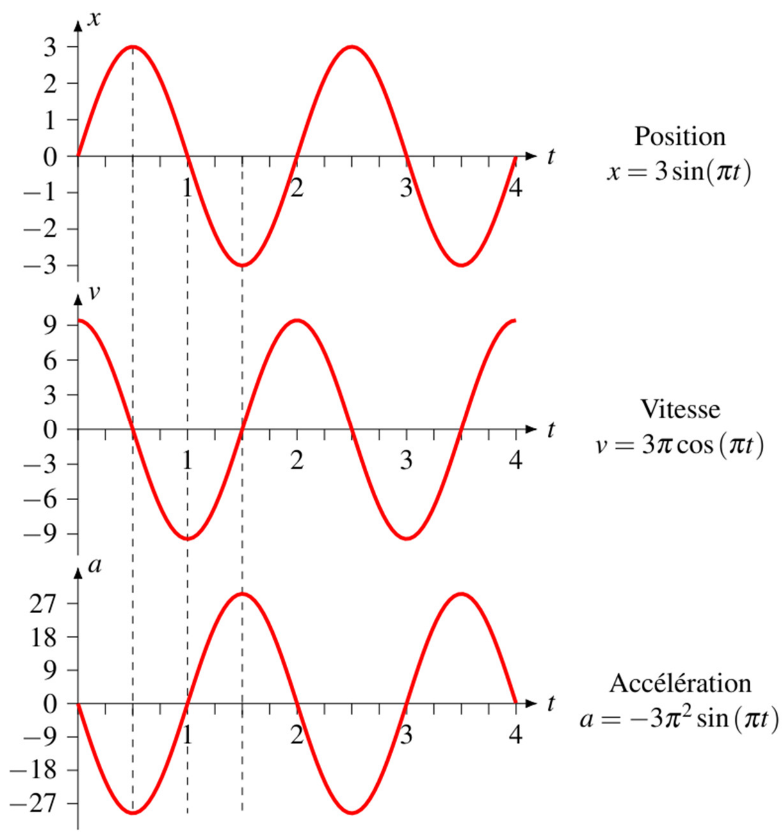
$$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

Comme le sinus peut prendre des valeurs entre -1 et 1, la plus grande valeur que peut prendre l'accélération (en valeur absolue) est

Accélération maximale

$$a_{max} = A\omega^2$$

Voici les graphiques de la position, de la vitesse et de l'accélération d'un mouvement harmonique.



On remarque que quand la position et l'accélération sont maximales (positive ou négative), la vitesse est nulle et que quand la vitesse est maximale (positive ou négative), la position et l'accélération sont nulles. L'objet atteint donc sa vitesse maximale quand il est à la position d'équilibre.

Vous pouvez admirer ces graphiques en action dans le clip suivant.
http://www.youtube.com/watch?v=eeYRkW8V7Vg

Lien entre la position et la vitesse

On trouve un lien très utile entre la position et la vitesse d'un objet en oscillation harmonique en utilisant une propriété entre les sinus et les cosinus. On obtient cette formule à partir des formules de la position et de la vitesse.

$$x = A\sin(\omega t + \phi) \qquad \text{et} \qquad v = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

Si on isole les sinus et cosinus dans ces équations, on a

$$\sin(\omega t + \phi) = \frac{x}{A} \qquad\qquad \cos(\omega t + \phi) = \frac{v}{A\omega}$$

Mais puisque,

$$\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi) = 1$$

on arrive à

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{A\omega}\right)^2 = 1$$

En multipliant par A^2, on a

Lien entre x et v à un certain moment

$$x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2$$

Lien entre la position et l'accélération

Comme la position et l'accélération sont

$$x = A\sin(\omega t + \phi) \qquad \text{et} \qquad a = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)$$

on remarque facilement que

$$a = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)$$
$$a = -\omega^2\left[A\sin(\omega t + \phi)\right]$$

et donc que

Lien entre x et a à un certain moment

$$a = -\omega^2 x$$

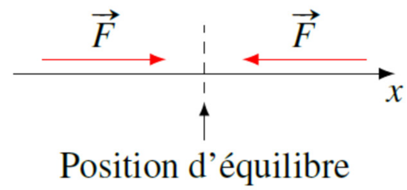
Condition pour avoir une oscillation harmonique

Cette dernière équation est aussi la condition suffisante pour obtenir une oscillation harmonique. Quand on analyse un système et qu'on détermine les forces agissant sur un objet dans le but de déterminer son accélération, on saura que le mouvement de l'objet sera une oscillation harmonique si on obtient un résultat de la forme suivante.

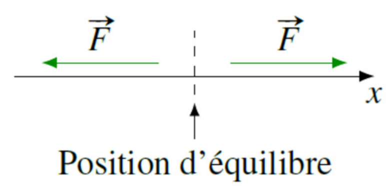
Condition pour obtenir une oscillation harmonique

$$a = -(\text{constante})\, x$$

De plus, la valeur de la constante nous donne ω^2, ce qui nous permet de connaitre la fréquence et la période d'oscillation. Nous appliquerons plus tard cette idée pour déterminer si certains systèmes font une oscillation harmonique.



Le signe négatif devant la constante est très important. Il indique que l'accélération, et donc la force, est de signe opposé à la position. Ainsi, si l'objet est à la droite de la position d'équilibre, la force est vers la gauche et si l'objet est à la gauche de la position d'équilibre, la force est vers la droite. On voit que la force ramène toujours l'objet vers sa position d'équilibre, ce qui est nécessaire pour obtenir une oscillation.



Si on avait un signe positif, il n'y aurait pas d'oscillations. À droite de la position d'équilibre, la force serait vers la droite et à gauche de la position d'équilibre, la force serait vers la gauche. Ces forces éloignent l'objet de la position d'équilibre plutôt que de le ramener. L'objet ne reviendra donc jamais à sa position d'équilibre, il s'en éloignera de plus en plus. Il n'y a pas d'oscillations alors.

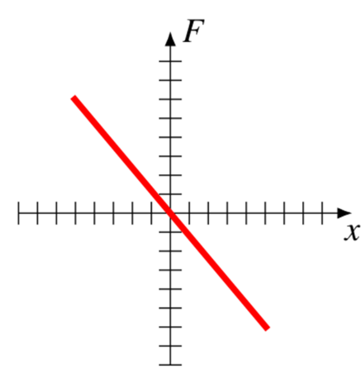
Interprétation graphique

La condition pour obtenir une oscillation harmonique peut s'écrire, en utilisant

$$F_{nette} = ma$$

sous la forme

$$F_{nette} = -m\omega^2 x$$



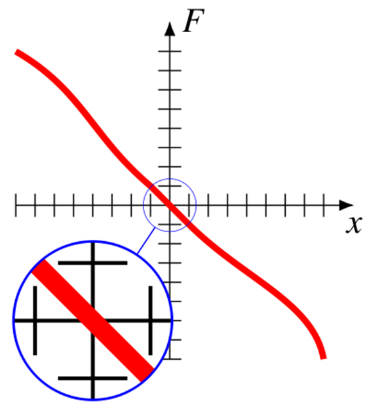
Puisque $m\omega^2$ est aussi une constante, le graphique de la force doit être une droite de pente négative pour qu'il y ait une oscillation harmonique. De plus, la pente de ce graphique permet de trouver ω puisque la pente doit être

$$Pente = -m\omega^2$$

Le point d'équilibre est à l'endroit où $F = 0$, donc à l'endroit où la ligne de F croise l'axe. La pente de ce graphique détermine la fréquence des oscillations.

Importance des oscillations harmoniques

Les équations des oscillations harmoniques sont importantes même si le graphique de la force dans un système n'est pas une droite. Par exemple, le graphique de la force sur le graphique du haut n'est pas une droite et l'oscillation du système sur lequel agit cette force ne sera pas harmonique.



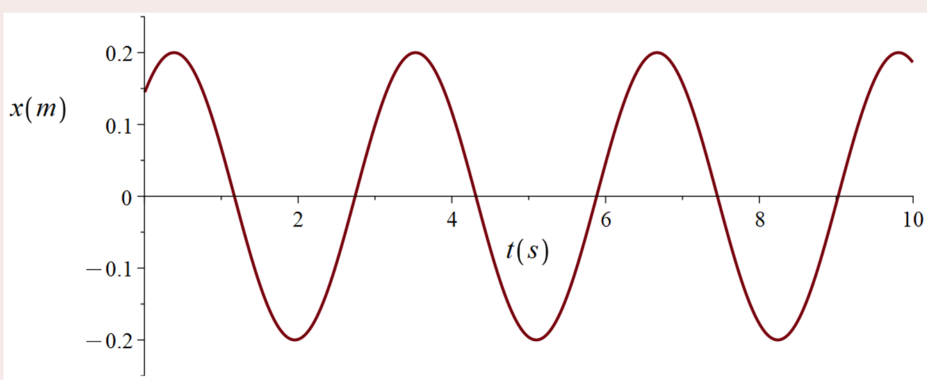
Toutefois, pour des oscillations de faible amplitude, on restera près du point d'équilibre. En zoomant suffisamment près du point d'équilibre, n'importe quelle fonction sera une droite. Cela signifie que pour des oscillations avec une amplitude suffisamment petite, on a toujours une oscillation harmonique, peu importe le système.

Exemple 1.1.1

Un objet fait une oscillation harmonique sur l'axe des x. Sa position est donnée par

$$x = 0{,}2m \cdot \sin\left(2\tfrac{rad}{s} \cdot t + 0{,}8rad\right)$$

Voici le graphique de ce mouvement



a) Quelle est la période de ce mouvement ?

La période est

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{2s^{-1}} \\ &= 3{,}142s \end{aligned}$$

b) Quelle est la vitesse de l'objet à t = 1 s ?

La vitesse est

$$\begin{aligned} v &= A\omega\cos\left(\omega t+\phi\right) \\ &= 0{,}2m\cdot 2s^{-1}\cdot\cos\left(2\tfrac{rad}{s}\cdot t+0{,}8rad\right) \\ &= 0{,}4\tfrac{m}{s}\cdot\cos\left(2\tfrac{rad}{s}\cdot t+0{,}8rad\right) \end{aligned}$$

À t = 1 s, on a

$$\begin{aligned} v &= 0{,}4\tfrac{m}{s}\cdot\cos\left(2\tfrac{rad}{s}\cdot 1s+0{,}8rad\right) \\ &= -0{,}377\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

c) Quelle est la vitesse de l'objet à x = 0,1 m ?

On trouve la vitesse avec

$$x^2+\left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2$$

$$\left(0{,}1m\right)^2+\left(\frac{v}{2s^{-1}}\right)^2 = \left(0{,}2m\right)^2$$

$$v^2 = 0{,}12\tfrac{m^2}{s^2}$$

$$v = 0{,}3464\tfrac{m}{s}$$

Cette vitesse peut être positive ou négative puisqu'à une certaine position, l'objet passe dans les deux directions, une fois en s'éloignant de la position d'équilibre et une autre fois en revenant vers la position d'équilibre.

d) À quel moment l'objet sera-t-il à x = 0,1 m et aura une vitesse positive pour la première fois ? (Presque toujours, on suppose que le mouvement commence à t = 0 s.)

Si l'objet est à x = 0,1 m, on a

$$0{,}1m = 0{,}2m\cdot\sin\left(2\tfrac{rad}{s}\cdot t+0{,}8rad\right)$$

Si on isole t, on a

$$0,1m = 0,2m \cdot \sin\left(2\tfrac{rad}{s} \cdot t + 0,8rad\right)$$

$$\frac{1}{2} = \sin\left(2\tfrac{rad}{s} \cdot t + 0,8rad\right)$$

$$\frac{\pi}{6} = 2s^{-1} \cdot t + 0,8 \qquad \text{ou} \qquad \frac{5\pi}{6} = 2s^{-1} \cdot t + 0,8$$

$$t = -0,1382s \qquad \text{ou} \qquad t = 0,9090s$$

(Voir plus loin la note sur les arcsinus pour comprendre pourquoi il y a deux réponses.)

Pour déterminer laquelle de ces deux réponses est bonne, nous allons calculer la vitesse à ces deux temps.

$$v = 0,4\tfrac{m}{s} \cdot \cos\left(2\tfrac{rad}{s} \cdot t + 0,8rad\right)$$

$$v = 0,4\tfrac{m}{s} \cdot \cos\left(2\tfrac{rad}{s} \cdot -0,1382s + 0,8rad\right) \quad \text{ou} \quad v = 0,4\tfrac{m}{s} \cdot \cos\left(2\tfrac{rad}{s} \cdot 0,9090s + 0,8rad\right)$$

$$v = 0,3464\tfrac{m}{s} \qquad \text{ou} \qquad v = -0,3464\tfrac{m}{s}$$

Comme on spécifiait que la vitesse est positive, notre réponse doit être t = -0,1382 s.

Toutefois, comme le mouvement commence à t = 0, on ne peut pas avoir une valeur négative de t. Il est possible que la solution d'une telle équation nous donne une valeur négative de t parce que, mathématiquement, la fonction sinusoïdale se prolonge de -∞ à ∞. On doit donc faire une correction à cette réponse pour obtenir une valeur positive de t.

En fait, il y a plusieurs autres valeurs de t possibles parce que le mouvement se répète toujours. Si l'objet est à x = 0,1 m à un certain moment, il le sera aussi une période plus tard. Il reviendra à cette position une autre période plus tard et ainsi de suite. En ajoutant la période aux valeurs de t obtenues, on obtient donc plusieurs autres réponses possibles. Les autres réponses possibles sont donc

$$-0,1382s \xrightarrow{+3,142s} 3,003s \xrightarrow{+3,142s} 6,145s$$

La plus petite valeur positive est donc 3,003 s. C'est notre réponse.

Erreur fréquente : Ne pas trouver toutes les solutions de l'arcsinus ou de l'arccosinus.

Sachez qu'il y a plusieurs réponses à un arcsinus et à un arccosinus. Les deux réponses principales sont :

Arcsin : réponse de la calculatrice et π – réponse de la calculatrice
Arccos : réponse de la calculatrice et – réponse de la calculatrice

En fait, il y a une infinité de solutions à un arcsinus et un arccosinus. On peut toutes les trouver en ajoutant ou en soustrayant des 2π autant qu'on veut à ces deux solutions. Ici, on peut faire quelque chose de plus simple pour trouver les autres solutions lorsqu'on cherche des valeurs de t avec nos arcsinus et nos arccosinus. Une fois que vous avez isolé les valeurs de t correspondant aux deux solutions principales, vous pouvez trouver toutes les autres solutions en ajoutant ou soustrayant la période autant de fois que vous voulez à chacune de ces solutions. Rappelez-vous, vous ne pouvez pas garder de solutions négatives pour t avec les oscillations harmoniques puisqu'on suppose que le mouvement commence à $t = 0$.

Comment trouver *A* si on connait *x* et *v* à un certain moment

On peut facilement trouver A si on sait x et v à n'importe quel moment en utilisant notre formule faisant le lien entre x et v, car l'amplitude est présente dans cette équation.

$$A^2 = x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2$$

Pour utiliser cette formule, on doit avoir les valeurs de x et v au même moment (qui n'est pas nécessairement $t = 0$).

Comment trouver ϕ si on connait *x* et *v* à un certain moment

Avec les graphiques, on a vu que c'est relativement facile de trouver ϕ quand le décalage est ¼, ½ ou ¾ de cycle. C'est plus difficile pour les autres valeurs de ϕ.

Si on connait la position pour une certaine valeur de t, on peut évidemment tenter de trouver ϕ avec la formule suivante.

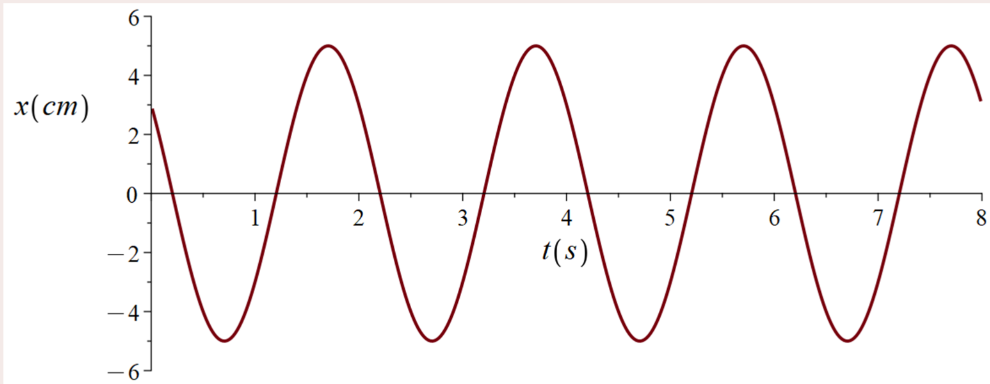
$$x = A\sin\left(\omega t + \phi\right)$$

En utilisant les valeurs de x et t, il ne restera que ϕ comme inconnu si on connait ω et A. Toutefois, il y aura un petit problème. Comme il y a deux réponses principales à un arcsinus, on va obtenir 2 valeurs de ϕ. Comment choisir la bonne réponse ?

Pour choisir entre les 2 valeurs de ϕ, il faut avoir une information sur la vitesse au temps t. Le signe de la vitesse peut être suffisant. Il suffit d'utiliser les deux valeurs de ϕ obtenues avec l'arcsinus dans la formule de la vitesse. Une des valeurs de ϕ va donner une vitesse positive et l'autre valeur de ϕ va donner une vitesse négative. On garde alors la valeur de ϕ qui donne le bon signe pour la vitesse.

Exemple 1.1.2

Un système oscille avec une période de 2 s et une amplitude de 5 cm. À t = 0 s, l'objet est à x = 3 cm et sa vitesse est négative. Quelle est la valeur de la constante de phase ?



Difficile d'évaluer précisément la valeur de la constante de phase à partir du graphique. On va donc la calculer.

On sait que l'amplitude est de 5 cm et on pourrait facilement trouver la valeur de ω à partir de T (mais on va voir qu'on n'a même pas besoin de connaitre la valeur de ω ici). L'équation du mouvement est donc

$$x = 5cm \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

Comme on sait que l'objet est à x = 3 cm à t = 0, on obtient

$$3cm = 5cm \cdot \sin(\omega \cdot 0s + \phi)$$

$$0,6 = \sin \phi$$

$$0,6435 = \phi \qquad \text{ou} \qquad 2,4981 = \phi$$

On doit maintenant trouver laquelle de ces 2 réponses est bonne. On va le déterminer avec le signe de la vitesse à t = 0. (Notez qu'on pourrait aussi le faire avec le graphique puisqu'on peut déterminer à partir de ce dernier que la constante de phase doit se situer entre π/2 (décalage de ¼ de cycle vers la gauche) et π (décalage de 1 cycle vers la gauche). On en déduit alors que 2,4981 doit être la valeur de ϕ.)

La formule de la vitesse est

$$v = A\omega \cos(\omega t + \phi)$$

À t = 0, la vitesse est

$$v = A\omega \cos(\phi)$$

Comme A et ω sont positifs, la vitesse sera négative si cos (ϕ) est négatif. Avec nos deux valeurs de ϕ, on a

$$\cos(0,6435) = 0,8 \qquad \cos(2,4981) = -0,8$$

On comprend alors que ϕ = 2,4981 est la bonne constante de phase.

Si on a la valeur de v, on peut éviter toutes ces complications (calcul de 2 réponses de l'arcsinus et ensuite calcul des vitesses) en utilisant une autre formule. On obtient cette formule à partir des formules de la position et de la vitesse.

$$x = A\sin(\omega t + \phi) \quad \text{et} \quad v = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

On commence par isoler les sinus et cosinus dans ces équations

$$\sin(\omega t + \phi) = \frac{x}{A} \qquad \cos(\omega t + \phi) = \frac{v}{A\omega}$$

pour ensuite diviser le sinus par le cosinus

$$\frac{\sin(\omega t + \phi)}{\cos(\omega t + \phi)} = \frac{x/A}{v/A\omega}$$

En remplaçant par tangente à gauche et en simplifiant à droite, on obtient la formule suivante qui va nous permettre de trouver la constante de phase.

Calcul de ϕ

$$\tan(\omega t + \phi) = \frac{\omega x}{v}$$

Pour utiliser cette formule, on doit avoir les valeurs de x et v au même moment (qui n'est pas nécessairement $t = 0$).

Attention :

- La valeur de ϕ est en radians. Mettez votre calculatrice en radians pour obtenir la bonne valeur.
- Si la valeur du dénominateur est négative (donc si v est négatif), il faut ajouter π radians à la réponse obtenue avec la calculatrice.
- Si la vitesse est nulle, vous devez faire l'arctangente de ∞ ou de –∞ selon le signe de x. Ne paniquez pas, les réponses de ces arctangentes sont π/2 et –π/2.

Un arctangente a aussi 2 réponses principales (réponse de la calculatrice et π + réponse de la calculatrice). Toutefois, on peut facilement savoir laquelle des deux réponses il faut prendre en suivant la 2e règle : on prend la réponse donnée par la calculatrice si la vitesse est positive et on prend π + la réponse donnée par la calculatrice si la vitesse est négative.

Exemple 1.1.3

Un objet fait une oscillation harmonique sur l'axe des x avec une période de 0,5 seconde. À t = 0 s, l'objet est à x = -3 cm et a une vitesse de -40 cm/s. Quelle est l'équation donnant la position en fonction du temps ?

On cherche à déterminer la valeur des éléments dans la formule suivante.

$$x = A\sin\left(\omega t + \phi\right)$$

On va premièrement trouver la fréquence angulaire à partir de la période.

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2\pi}{T}\\ &= \frac{2\pi}{0,5s}\\ &= 4\pi \tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

On peut ensuite trouver l'amplitude avec

$$x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2$$

$$\left(-0,03m\right)^2 + \left(\frac{-0,4\frac{m}{s}}{4\pi s^{-1}}\right)^2 = A^2$$

$$A = 0,04374m$$

On trouve finalement la constante de phase avec

$$\tan\left(\omega t + \phi\right) = \frac{\omega x}{v}$$

$$\tan\left(\omega \cdot 0 + \phi\right) = \frac{4\pi s^{-1} \cdot \left(-0,03m\right)}{-0,4\frac{m}{s}}$$

$$\tan\phi = \frac{3\pi}{10}$$

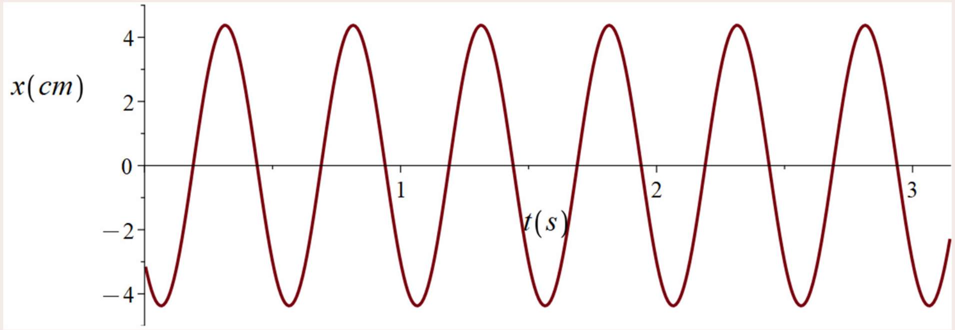
$$\phi = 3,8974rad$$

On a ajouté π à la réponse donnée par la calculatrice parce que la vitesse est négative.

L'équation du mouvement est donc

$$x = 0,04374m \cdot \sin\left(4\pi \tfrac{rad}{s} \cdot t + 3,8974rad\right)$$

Cette équation correspond au graphique suivant.



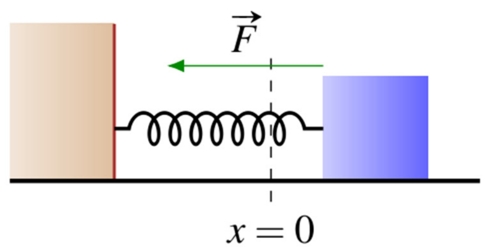
1.2 LE SYSTÈME MASSE-RESSORT

Pour déterminer si un système masse-ressort sur une surface sans friction fait des oscillations harmoniques simples, on doit trouver la formule reliant l'accélération à la position et voir si elle répond à la condition pour avoir une oscillation harmonique, qui est

$$a = -(\text{constante})\,x$$

Il y a trois forces sur le bloc : le poids (vers le bas), la normale (vers le haut) et la force du ressort (horizontale). Le poids et la normale s'annulent et il ne reste que la force du ressort. Si l'objet n'est pas à la position d'équilibre (force nulle exercée par le ressort), on a

$$\sum F_x = ma$$
$$-kx = ma$$
$$a = -\left(\frac{k}{m}\right)x$$



On obtient bien la forme voulue. Ainsi, on sait que

Les oscillations d'un système masse-ressort sont des oscillations harmoniques.

Comme la valeur de la constante (ce qui est entre parenthèses) doit aussi être égale au carré de la fréquence angulaire, on a

Fréquence angulaire pour un système masse-ressort

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

À partir de cette équation, on peut trouver la période d'oscillation d'un système masse-ressort. Elle est de

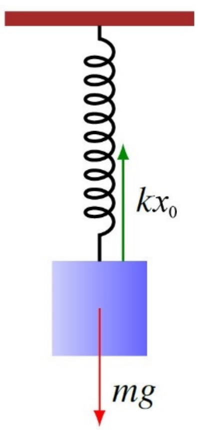
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

On remarque un élément très important et un peu surprenant : la période d'oscillation d'un système masse-ressort ne dépend pas de l'amplitude. Que le système fasse de toutes petites oscillations ou de grandes oscillations, le temps est le même ! La plus grande distance à faire est exactement compensée par des vitesses plus grandes. Cela est un peu particulier et ne se produit que pour les oscillations harmoniques. Pour tous les autres types d'oscillations, la période va dépendre de l'amplitude. Ce peut être d'ailleurs une façon de déterminer si on a affaire à une oscillation harmonique : on mesure la période d'oscillation et si on remarque qu'elle ne dépend pas de l'amplitude, notre système fait une oscillation harmonique.

La période des oscillations harmoniques ne dépend pas de l'amplitude du mouvement

C'est Galilée qui remarqua ceci en premier en examinant l'oscillation d'un chandelier suspendu lors d'une messe en 1583. À mesure que l'amplitude diminuait à cause de la friction, il remarqua que la période d'oscillation restait la même.

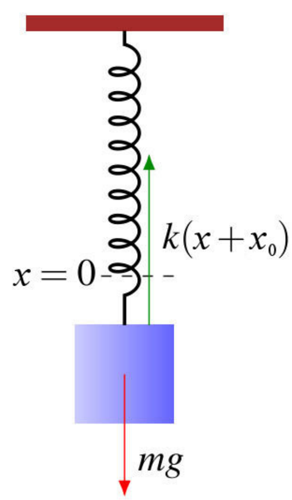


Est-ce qu'on a toujours des oscillations harmoniques si le système est vertical ? Dans ce cas, la force de gravité vient-elle détruire nos oscillations harmoniques ? On doit premièrement trouver où est maintenant située la position d'équilibre. On a une position d'équilibre quand la somme des forces sur l'objet est nulle. Le ressort sera donc étiré de x_0 pour compenser la force de gravité.

Étirement du ressort à la position d'équilibre

$$kx_0 = mg$$

On va maintenant vérifier si on a des oscillations harmoniques autour de cette position d'équilibre. Comme spécifié auparavant, on doit mettre notre $x = 0$ à la position d'équilibre (on va continuer d'utiliser x même si le mouvement est vertical). Si on descend le ressort un peu plus que la position d'équilibre, on a donc (avec un axe positif vers le bas)

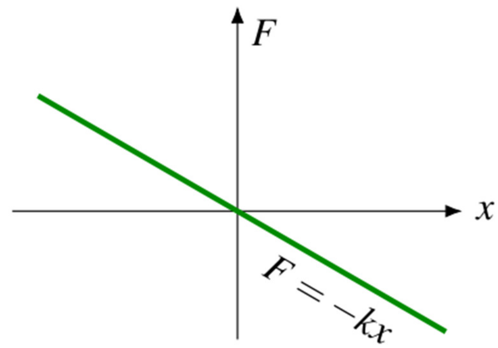


$$\sum F_x = ma$$
$$mg - k(x + x_0) = ma$$
$$mg - kx - kx_0 = ma$$

Or, comme $mg = kx_0$(formule de la position d'équilibre), il ne reste que

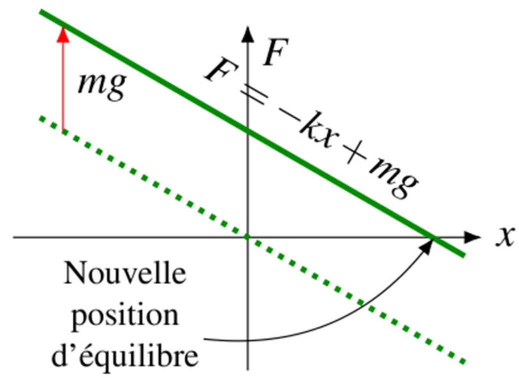
$$\cancel{mg} - kx - \cancel{kx_0} = ma$$
$$a = -\left(\frac{k}{m}\right)x$$

Cela respecte encore la condition pour le mouvement harmonique et la fréquence angulaire est la même. La période d'oscillation d'un système masse-ressort vertical est donc identique à celle d'un système oscillant sur une surface horizontale sans friction.



On peut aussi déterminer que la fréquence ne change pas avec un simple graphique. Sans la gravitation, le graphique de la force était celui de $F = -kx$. C'est exactement la forme du graphique qu'on doit avoir pour une oscillation harmonique (une droite avec une pente négative).

En ajoutant la gravité mg à cette force, la courbe monte de mg et on a maintenant le graphique de droite.



On voit que la position d'équilibre (endroit où la droite F coupe l'axe) a changé, mais la fréquence d'oscillation n'a pas changé puisque la pente de la droite est restée la même.

On va se faire une convention de signe pour la position dans un système masse-ressort : on va mettre la valeur de x positive quand le ressort étire.

Exemple 1.2.1

Un objet de 200 g est relié à un ressort ayant une constante de 5 N/m. On étire le ressort de 10 cm et on lâche l'objet, sans lui donner de vitesse initiale.

a) Quelle est la période du mouvement ?

Commençons par calculer la fréquence angulaire, car elle sera souvent utile.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$= \sqrt{\frac{5\frac{N}{m}}{0,2kg}}$$
$$= 5\,\tfrac{rad}{s}$$

Avec ω, on trouve la période.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$= 1,2566s$$

b) Quelle est l'équation de la position de l'objet en fonction du temps ?

L'équation du mouvement est $x = A\sin(\omega t + \phi)$. On a déjà ω. Il nous reste à trouver A et ϕ.

Pour A, on a

$$x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2$$
$$(0,10m)^2 + \left(\frac{0\frac{m}{s}}{5s^{-1}}\right)^2 = A^2$$
$$A = 0,10m$$

Pour ϕ, on a

$$\tan(\omega t + \phi) = \frac{\omega x}{v}$$
$$\tan(\omega \cdot 0 + \phi) = \frac{5s^{-1} \cdot 0,1m}{0\frac{m}{s}}$$
$$\tan\phi = \infty$$
$$\phi = \frac{\pi}{2} rad$$

L'équation est donc

$$x = 0,1m \cdot \sin\left(5\tfrac{rad}{s} \cdot t + \frac{\pi}{2} rad\right)$$

c) Quelle est la vitesse maximale de l'objet ?

La vitesse maximale est

$$v_{\max} = A\omega$$
$$= 0,1m \cdot 5s^{-1}$$
$$= 0,5\tfrac{m}{s}$$

d) Quelle est l'accélération maximale de l'objet ?

L'accélération maximale est

$$\begin{aligned} a_{max} &= A\omega^2 \\ &= 0{,}10m \cdot \left(5s^{-1}\right)^2 \\ &= 2{,}5\tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

e) Quels sont les trois premiers instants auxquels la vitesse de l'objet est de 0,3 m/s ?

La formule de la vitesse est

$$\begin{aligned} v &= A\omega\cos\left(\omega t+\phi\right) \\ &= 0{,}1m\cdot 5s^{-1}\cdot\cos\left(5\tfrac{rad}{s}\cdot t+\frac{\pi}{2}rad\right) \\ &= 0{,}5\tfrac{m}{s}\cdot\cos\left(5\tfrac{rad}{s}\cdot t+\frac{\pi}{2}rad\right) \end{aligned}$$

Si la vitesse est de 0,3 m/s, on a donc

$$0{,}3\tfrac{m}{s} = 0{,}5\tfrac{m}{s}\cdot\cos\left(5\tfrac{rad}{s}\cdot t+\frac{\pi}{2}rad\right)$$

$$0{,}6 = \cos\left(5\tfrac{rad}{s}\cdot t+\frac{\pi}{2}rad\right)$$

$$\swarrow_{calculatrice} \qquad\qquad \searrow_{-calculatrice}$$

$$0{,}9273 = 5s^{-1}\cdot t+\frac{\pi}{2} \qquad\qquad -0{,}9273 = 5s^{-1}\cdot t+\frac{\pi}{2}$$

$$t = -0{,}1287s \qquad\qquad t = -0{,}4996s$$

Aucune de ces deux réponses n'est bonne, car elles sont toutes les deux négatives. Cependant, il y a une infinité de solutions à un arccos et on trouve toutes les autres solutions en ajoutant la période autant de fois qu'on veut à ces deux réponses.

$$\begin{array}{ccc} t=-0{,}1287s & & t=-0{,}4996s \\ & \downarrow +1{,}2566s & \\ t=1{,}1279s & & t=0{,}7570s \\ & \downarrow +1{,}2566s & \\ t=2{,}3845s & & t=2{,}0136s \\ & \downarrow +1{,}2566s & \\ t=3{,}6411s & & t=3{,}2702s \end{array}$$

Les trois premiers instants sont donc

t = 0,7570 s, t = 1,1279 s et t = 2,0136 s.

1.3 L'ÉNERGIE MÉCANIQUE DANS LE MOUVEMENT HARMONIQUE

Formules de l'énergie

L'énergie peut prendre deux formes. L'énergie cinétique (E_k) et l'énergie potentielle (U). Par exemple, dans le système masse-ressort, on a l'énergie cinétique et l'énergie du ressort. L'énergie mécanique est la somme de ces deux formes d'énergie.

Énergie mécanique

$$E_{mec} = E_k + U$$

Énergie cinétique

L'énergie cinétique est évidemment

Énergie cinétique

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Énergie potentielle

Puisque

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

on peut trouver l'énergie potentielle avec

$$a = -\omega^2 x$$
$$F = -m\omega^2 x$$
$$-\frac{dU}{dx} = -m\omega^2 x$$
$$U = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + Cst$$

On peut choisir ce qu'on veut comme constante d'intégration. Le choix le plus simple est bien sûr une constante nulle.

Énergie potentielle (toujours valide)

$$U = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

Il est important de remarquer la chose suivante.

L'énergie potentielle doit absolument être proportionnelle à x^2 pour avoir une oscillation harmonique.

Dans le cas du système masse-ressort, on peut utiliser la valeur de $\omega^2 = k/m$ pour obtenir

Énergie potentielle (valide seulement pour le système masse-ressort)

$$U_R = \frac{1}{2} kx^2$$

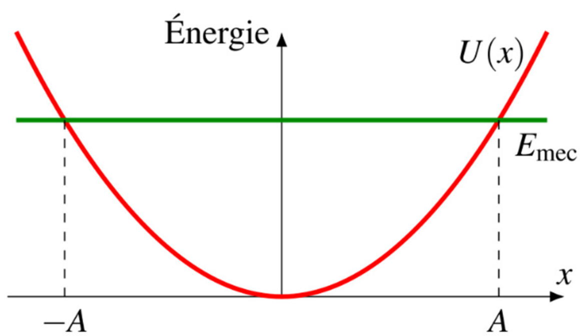
On reconnait la formule de l'énergie d'un ressort obtenue dans le cours de mécanique.

Graphique de l'énergie potentielle

La formule de l'énergie potentielle est

$$U = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

Le graphique de l'énergie potentielle est montré à droite. Ce graphique nous indique que l'objet doit rester entre $-A$ et A (parce que l'objet ne peut pas être aux endroits où U est supérieur à E_{mec}) et que sa vitesse maximale est à la position d'équilibre (endroit où l'écart entre U et E_{mec} est le plus grand).



Preuve de la conservation de l'énergie mécanique

On peut maintenant montrer que l'énergie mécanique est conservée. Pour y arriver, nous allons additionner l'énergie cinétique et l'énergie potentielle et utiliser les formules de la vitesse et de la position en fonction du temps. Nous pourrons alors voir que l'énergie mécanique ne change pas en fonction du temps.

$$\begin{aligned}E_{mec} &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \\ &= \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\phi) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2(\omega t+\phi) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\left(\cos^2(\omega t+\phi)+\sin^2(\omega t+\phi)\right) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\end{aligned}$$

Comme le résultat est une constante, l'énergie mécanique est conservée.

La valeur de l'énergie mécanique

Avec cette preuve, nous avons également obtenu, comme par enchantement, une formule pour l'énergie mécanique.

Énergie mécanique

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

Dans le cas du système masse-ressort, on peut utiliser $\omega^2 = k/m$ pour obtenir

Énergie mécanique (valide seulement pour le système masse-ressort)

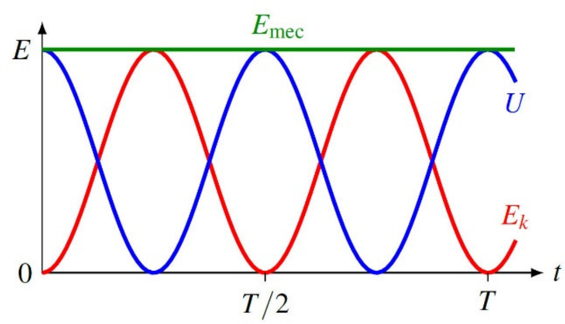
$$E_{mec} = \frac{1}{2}kA^2$$

Dans les deux cas, on voit que l'énergie mécanique est égale à la valeur maximale de l'énergie potentielle, car la valeur maximale de x est A. De plus, comme ωA est la vitesse maximale, on peut écrire

Énergie mécanique

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

On peut ainsi constater que l'énergie mécanique est aussi égale à la valeur maximale de l'énergie cinétique. Vous pouvez admirer à droite les graphiques des énergies en fonction du temps.



Supposons que ce soit un système masse-ressort. On voit très bien l'énergie qui passe alternativement de l'énergie cinétique à l'énergie du ressort. Au départ ici, l'objet est à sa position maximale et sa vitesse est nulle. L'énergie mécanique est alors entièrement sous forme d'énergie du ressort puisque le ressort est étiré au maximum. À mesure que l'objet se dirige vers la position d'équilibre, l'énergie du ressort diminue et l'énergie cinétique augmente de telle sorte qu'à la position d'équilibre, toute l'énergie mécanique est sous forme d'énergie cinétique. Puis l'objet s'éloigne de sa position d'équilibre ce qui fait augmenter l'énergie du ressort et diminuer l'énergie cinétique. Quand l'objet atteint sa plus grande distance de la position d'équilibre, l'énergie cinétique est redevenue nulle et toute l'énergie mécanique est revenue sous forme d'énergie du ressort. Puis tout se répète sans fin.

On peut voir dans ce vidéo comment l'énergie mécanique passe d'une forme à l'autre dans un système masse-ressort
http://www.youtube.com/watch?v=PL5g_IwrC5U

Exemple 1.3.1

Un objet de 200 g est relié à un ressort de 5 N/m. La position de l'objet est donnée par

$$x = 0,1m \cdot \cos\left(5\tfrac{rad}{s} \cdot t\right)$$

(Pour ceux qui se demandent pourquoi la position est donnée par un cosinus plutôt qu'un sinus, il s'agit simplement d'une fonction sinus avec une constante de phase de π/2 déguisée.)

a) Quelle est l'énergie du ressort à t = 3 s ?

L'énergie du ressort (ou énergie potentielle) est

$$U_R = \frac{1}{2}kx^2$$

Pour obtenir cette énergie, il nous faut la position à t = 3 s. Cette position est

$$\begin{aligned} x &= 0,1m \cdot \cos\left(5\tfrac{rad}{s} \cdot 3s\right) \\ &= -0,07597m \end{aligned}$$

L'énergie du ressort est donc

$$\begin{aligned} U_R &= \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5\tfrac{N}{m} \cdot (-0,07597m)^2 \\ &= 0,01443J \end{aligned}$$

b) Quelle est l'énergie cinétique à t = 3 s ?

L'énergie cinétique est

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Pour la trouver, il nous faut la vitesse. On ne peut pas utiliser directement la formule $v = A\omega\cos(\omega t+\phi)$ puisque l'équation de la position est écrite avec un cosinus et non pas un sinus. Pour trouver la vitesse, il y a 2 options.

1) On change la formule de la position pour qu'elle soit écrite avec un sinus.

En changeant le cosinus en sinus, on augmente la constante de phase de π/2. On a donc

$$\begin{aligned} x &= 0{,}1m \cdot \cos\left(5\tfrac{rad}{s} \cdot t\right) \\ &= 0{,}1m \cdot \sin\left(5\tfrac{rad}{s} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

On peut maintenant utiliser la formule $v = A\omega\cos(\omega t+\phi)$ pour trouver la vitesse.

$$\begin{aligned} v &= A\omega\cos\left(\omega t + \phi\right) \\ &= 0{,}1m \cdot 5s^{-1} \cdot \cos\left(5\tfrac{rad}{s} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0{,}5\tfrac{m}{s} \cdot \cos\left(5\tfrac{rad}{s} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

À t = 3 s, la vitesse est

$$\begin{aligned} v &= 0{,}5\tfrac{m}{s} \cdot \cos\left(5\tfrac{rad}{s} \cdot 3s + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -0{,}3251\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

2) On dérive la formule de la position.

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{d\left(0{,}1m \cdot \cos\left(5\tfrac{rad}{s} \cdot t\right)\right)}{dt} \\ &= -0{,}1m \cdot 5s^{-1} \cdot \sin\left(5\tfrac{rad}{s} \cdot t\right) \\ &= -0{,}5\tfrac{m}{s} \cdot \sin\left(5\tfrac{rad}{s} t\right) \end{aligned}$$

À t = 3 s, la vitesse est

$$\begin{aligned} v &= -0,5\tfrac{m}{s}\cdot\sin\left(5\tfrac{rad}{s}\cdot 3s\right) \\ &= -0,3251\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

L'énergie cinétique est donc

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 0,2kg\cdot\left(-0,3251\tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= 0,01057J \end{aligned}$$

c) Quelle est l'énergie mécanique à t = 3 s ?

Voici 3 façons de calculer l'énergie mécanique.

1) On peut additionner les énergie cinétique et potentielle à t = 3 s.

$$\begin{aligned} E_{mec} &= E_k + U \\ &= 0,01057J + 0,01443J \\ &= 0,025J \end{aligned}$$

2) On peut calculer l'énergie mécanique à partir de l'amplitude.

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{1}{2}kA^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 5\tfrac{N}{m}\cdot\left(0,1m\right)^2 \\ &= 0,025J \end{aligned}$$

3) On peut calculer l'énergie mécanique à partir de la vitesse maximale.

La vitesse maximale est

$$\begin{aligned} v_{\max} &= A\omega \\ &= 0,1m\cdot 5s^{-1} \\ &= 0,5\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

L'énergie est alors

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 0,2kg\cdot\left(0,5\tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= 0,025J \end{aligned}$$

Évidemment, cette énergie est constante et cette valeur est l'énergie mécanique à tout instant, pas seulement à t = 3 s.

1.4 LE PENDULE

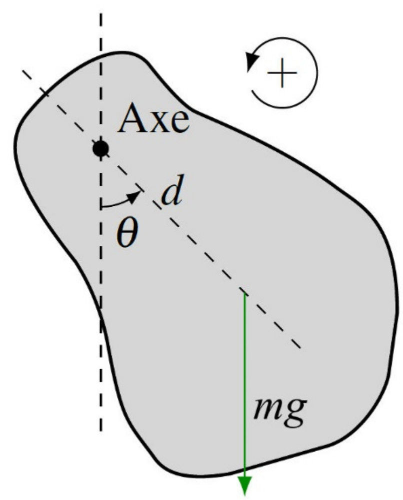
Preuve que le pendule est un mouvement harmonique (pour une petite amplitude)

Il faut vérifier que le pendule respecte la condition pour avoir un mouvement harmonique. Cependant, le mouvement du pendule est plus un mouvement de rotation qu'un mouvement de translation. Sans en donner de preuve, cette condition pour le mouvement de rotation est

$$\alpha = -(\text{constante})\,\theta$$

dans laquelle la constante vaut toujours ω^2.

Examinons si le pendule respecte cette condition. En fait, on va faire un cas plus complexe qu'une simple masse au bout d'une corde. On va faire le calcul pour un objet oscillant autour d'un axe fixe. Il y a deux forces sur le pendule : la gravitation et la force exercée par l'axe. Cette dernière force s'exerce sur l'axe de rotation et ne fait donc pas de moment de force. Seule la force de gravitation fait un moment de force sur un pendule. (On met la direction positive dans ce sens pour que le déplacement soit positif.) On a donc



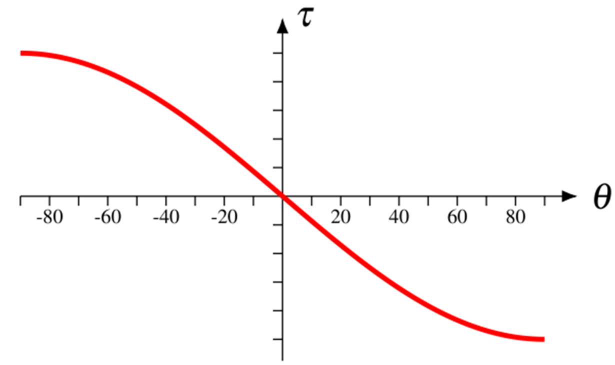
$$\begin{aligned} \sum \tau &= I\alpha \\ -mgd\sin(180° - \theta) &= I\alpha \\ -mgd\sin\theta &= I\alpha \end{aligned}$$

où d est la distance entre l'axe de rotation et le centre de masse de l'objet. Si on isole l'accélération angulaire, on a

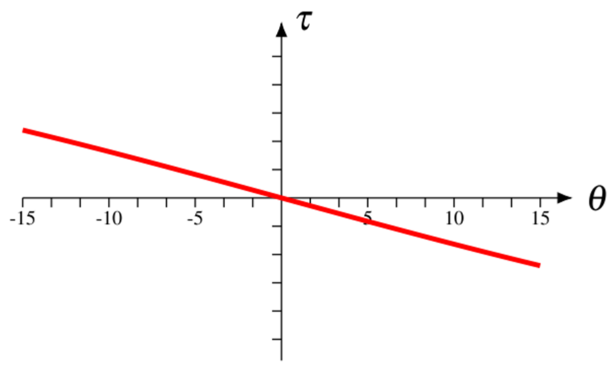
$$\alpha = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\sin\theta$$

Malheureusement, on n'obtient pas le résultat désiré à cause du sinus. On répondrait à la condition si, à la place de sin θ, on avait simplement θ.

Cela signifie que le mouvement du pendule n'est pas un mouvement d'oscillation harmonique. C'est un mouvement d'oscillation, mais il n'est pas harmonique, il est décrit par une autre fonction plus complexe qu'une simple fonction trigonométrique. (La solution exacte est fort complexe et fait appel à des fonctions elliptiques, que vous ne connaissez pas.) Le graphique du moment de force en fonction de l'angle (graphique de $\tau = -mgd \sin\theta$) nous confirme également que nous n'avons pas les conditions pour obtenir une oscillation harmonique puisque nous n'avons pas une droite avec une pente négative.



Toutefois, on peut voir que pour des angles inférieurs à 15°, on obtient le graphique suivant.



Maintenant, nous avons pratiquement une ligne droite avec une pente négative pour de petits angles. Cela signifie que pour de petits angles (plus petit que 15° environ), l'oscillation sera effectivement harmonique.

C'est qu'avec de petits angles, on peut faire l'approximation suivante.

$$\sin\theta \approx \theta$$

Avec cette approximation, l'accélération angulaire devient

$$\alpha = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\theta$$

qui est la condition pour avoir une oscillation harmonique. Cela veut dire que pour des oscillations de faibles amplitudes, l'oscillation du pendule ressemble beaucoup à une oscillation harmonique. On obtient même la fréquence angulaire, car on doit avoir

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

La fréquence angulaire d'un pendule simple

Le pendule simple est une masse ponctuelle au bout d'une corde de masse négligeable. Le centre de masse du pendule est donc au centre de la masse ponctuelle et d est donc égal à la longueur de la corde.

$$d = L$$

Comme toute la masse est concentrée dans la masse ponctuelle, le moment d'inertie est

$$I = \sum mr^2$$
$$I = mL^2$$

La fréquence angulaire est donc

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$
$$= \sqrt{\frac{mgL}{mL^2}}$$

En simplifiant, on obtient

Fréquence angulaire d'un pendule simple (Amplitude < 15°)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

La période du pendule est donc

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

(Dès 1637, Galilée avait indiqué que $T \propto \sqrt{L}$. La formule complète a été donnée par Huygens en 1673.)

On remarque encore une fois que la période ne dépend pas de l'amplitude. C'est normal, c'est ce qui se produit avec toutes les oscillations harmoniques. Ici, il y a une autre curiosité : la période ne dépend pas de la masse du pendule !

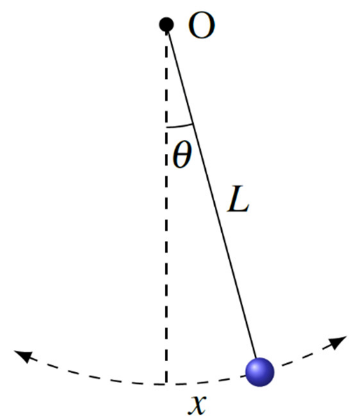
La période d'un pendule simple ne dépend pas de sa masse.

En y réfléchissant bien, ce n'est pas tellement surprenant puisque le mouvement est fait par la force de gravité et que la chute gravitationnelle donne la même accélération à tous les objets.

On peut bien voir au début du clip suivant que la période est plus petite pour les pendules avec des cordes plus petites. Les effets produits dans le reste du clip sont très jolis.
http://www.youtube.com/watch?v=yVkdfJ9PkRQ

Description du mouvement d'un pendule simple

Sachant que le mouvement est une oscillation harmonique, on peut décrire la position à l'aide d'une fonction sinusoïdale. On a cependant deux possibilités ici pour décrire cette position. On peut la faire avec la position x (mesurée le long de l'arc de cercle) ou avec l'angle θ que fait le pendule avec la verticale. On a donc



Position d'un pendule

$$x = A\sin(\omega t + \phi)$$

$$ou$$

$$\theta = \theta_{max}\sin(\omega t + \phi)$$

On peut donner l'angle θ en degrés ou en radians, c'est au choix. S'il est en degrés, inutile de mettre votre calculatrice en degrés, car cet angle n'est pas à l'intérieur d'une fonction trigonométrique. En fait, vous devez la laisser en radians, car ω est toujours en radians par seconde, ce qui fait que ce qui est à l'intérieur de la fonction trigonométrique est toujours en radians.

On peut d'ailleurs passer facilement de x à θ en se rappelant qu'un angle (en radians) est la longueur de l'arc de cercle divisé par le rayon du cercle. On a donc ici

Lien entre x et θ pour un pendule

$$\theta_{(rad)} = \frac{x}{L}$$

Ce qui fait qu'avec les valeurs maximales de x (qui est A) et θ (qui est θ_{max}), on obtient

Lien entre A et θ_{max} pour un pendule

$$\theta_{max(rad)} = \frac{A}{L}$$

Erreur fréquente : Utiliser les formules des sections précédentes en utilisant θ plutôt que x

Notez que toutes les formules des sections précédentes ont été faites avec x et non pas θ. Il arrive souvent qu'une personne utilise θ à la place de x pour certains calculs.

Exemple 1.4.1

Un pendule est constitué d'une masse attachée au bout d'une corde de 1 m. Initialement (t = 0 s), le pendule est à la position θ = 10° et s'éloigne de la position d'équilibre avec une vitesse de 50 cm/s.

a) Quelle est la période ?

La fréquence angulaire est

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{g}{L}} \\ &= \sqrt{\frac{9{,}8 \frac{N}{kg}}{1m}} \\ &= 3{,}13 \tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

La période est donc

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{3{,}13 s^{-1}} \\ &= 2{,}007 s\end{aligned}$$

(Ce n'est pas un hasard que la réponse soit si près de 2 secondes puisqu'on a tenté d'utiliser le pendule pour définir le mètre à une certaine époque : le mètre devait être la longueur du pendule qui a une période de 2 s. On n'a pas retenu cette idée, car g varie un peu d'un endroit à l'autre sur Terre.)

b) Quelle est l'équation de l'angle θ (en degrés) en fonction du temps ?

La formule de l'angle θ en fonction du temps est

$$\theta = \theta_{\max} \sin\left(\omega t + \phi\right)$$

On a déjà la valeur de ω. Il nous reste donc à trouver l'amplitude angulaire et la constante de phase. On trouve ces valeurs avec les formules suivantes.

$$A^2 = x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2$$

$$\tan(\omega t + \phi) = \frac{\omega x}{v}$$

Pour utiliser ces formules, il nous faut x et v à t = 0 s. On sait déjà que la vitesse est de 0,5 m/s à ce moment, mais on ne sait pas la position x. Par contre, on sait la position angulaire (θ) au départ, ce qui nous permet de trouver x.

$$\begin{aligned} x &= \theta_{(rad)} L \\ &= 10° \cdot \frac{2\pi rad}{360°} \cdot 1m \\ &= 0,1745m \end{aligned}$$

Ainsi, l'amplitude est de

$$A^2 = x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2$$

$$A^2 = (0,1745m)^2 + \left(\frac{0,5\frac{m}{s}}{3,13s^{-1}}\right)^2$$

$$A = 0,2366m$$

On peut obtenir alors l'amplitude angulaire (angle maximum)

$$\begin{aligned} \theta_{\max(rad)} &= \frac{A}{L} \\ &= \frac{0,2366m}{1m} \\ &= 0,2366rad \end{aligned}$$

qui, en degrés, est

$$\begin{aligned} \theta_{\max(°)} &= 0,2366rad \cdot \frac{360°}{2\pi rad} \\ &= 13,55° \end{aligned}$$

La constante de phase est

$$\tan(\omega t + \phi) = \frac{\omega x}{v}$$

$$\tan(\phi) = \frac{3,13s^{-1} \cdot 0,1745m}{0,5\frac{m}{s}}$$

$$\phi = 0,8295rad$$

La formule de θ en fonction du temps est donc

$$\theta = 13{,}55° \cdot \sin\left(3{,}13\tfrac{rad}{s} \cdot t + 0{,}8295 rad\right)$$

c) Quelle est la vitesse du pendule quand le pendule fait un angle de 5° ?

Quand on sait la position, on trouve la vitesse avec

$$x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2$$

On doit premièrement trouver la position quand le pendule fait un angle de 5°. On commence par trouver l'angle en radians

$$\begin{aligned}\theta_{(rad)} &= 5° \cdot \frac{2\pi rad}{360°}\\ &= \frac{\pi}{36} rad\end{aligned}$$

et ensuite on trouve la position x avec

$$\begin{aligned}x &= \theta_{(rad)} L\\ &= \frac{\pi}{36} rad \cdot 1m\\ &= 0{,}0873m\end{aligned}$$

On peut finalement trouver la vitesse.

$$\begin{aligned}x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 &= A^2\\ (0{,}0873m)^2 + \left(\frac{v}{3{,}13s^{-1}}\right)^2 &= (0{,}2366m)^2\\ v &= 0{,}6883\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

d) Quelle est la vitesse maximale du pendule ?

La vitesse maximale est

$$\begin{aligned}v_{\max} &= A\omega\\ &= 0{,}2366m \cdot 3{,}13s^{-1}\\ &= 0{,}741\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

Énergie potentielle du pendule simple

Comme pour n'importe quelle oscillation harmonique, l'énergie potentielle (qui est de l'énergie gravitationnelle pour un pendule) est

$$U_g = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

En utilisant la formule de ω pour le pendule, on peut aussi obtenir

Énergie gravitationnelle du pendule

$$U_g = \frac{1}{2} m \frac{g}{L} x^2$$

ou, en utilisant aussi $x = \theta_{\text{(rad)}} L$,

Énergie gravitationnelle du pendule

$$U_g = \frac{1}{2} mgL\theta^2$$

L'angle est en radians dans cette formule.

Ces formules peuvent sembler un peu bizarres puisqu'on avait vu que l'énergie gravitationnelle est mgy. Toutefois, on peut facilement montrer qu'à partir de cette formule, on obtient effectivement nos formules de l'énergie gravitationnelle.

Il faut premièrement se rappeler le lien entre y et θ dans un pendule. Ce lien est

$$y = L(1-\cos\theta)$$

Ici, les oscillations du pendule sont petites, ce qui nous permet d'utiliser la série de Taylor du cosinus

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots$$

On a alors

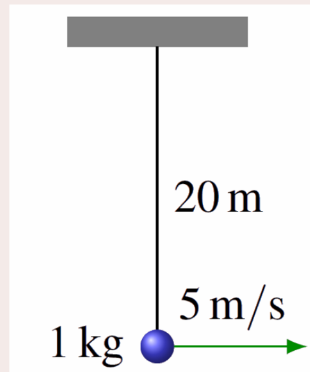
$$\begin{aligned} y &= L(1-\cos\theta) \\ &= L\left(1-\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\right) \\ &= \frac{L\theta^2}{2} \end{aligned}$$

En remplaçant dans mgy, l'énergie gravitationnelle devient

$$U_g = mgy = mg\frac{L\theta^2}{2}$$

qui est la formule obtenue précédemment.

Exemple 1.4.2



Le pendule de la figure a une vitesse de 5 m/s quand il est à la position d'équilibre. Quelle est la grandeur de la vitesse du pendule quand il fait un angle de 10° ?

À l'instant 1 (quand le pendule est à la position d'équilibre), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= E_k + U \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mgL\theta^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1kg\cdot\left(5\tfrac{m}{s}\right)^2 + 0 \\ &= 12,5J \end{aligned}$$

À l'instant 2 (quand l'angle est de 10° = π/18 rad), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mgL\theta^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1kg\cdot v^2 + \frac{1}{2}\cdot 1kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}\cdot 20m\cdot\left(\tfrac{\pi}{18}rad\right)^2 \\ &= 0,5kg\cdot v^2 + 2,985J \end{aligned}$$

Puisque l'énergie mécanique est conservée, on a

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 12,5J &= 0,5kg\cdot v^2 + 2,985J \\ v &= 4,362\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

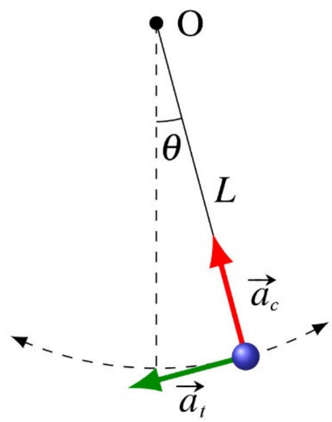
L'accélération du pendule

Juste une petite note pour vous dire que la formule

$$a = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)$$

vous donnera, dans le cas du pendule, l'accélération tangentielle (a_t). Il ne faut pas oublier que le pendule fait aussi un mouvement circulaire et qu'il y a aussi l'accélération centripète.

$$a_c = \frac{v^2}{L}$$



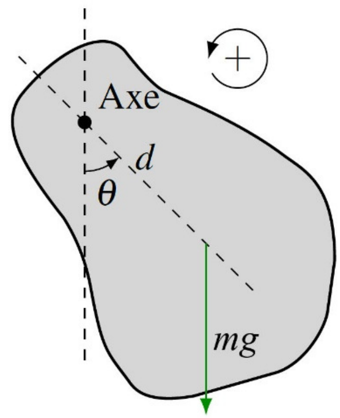
L'accélération du pendule sera donc de

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$$

Dans le vidéo suivant, vous pouvez voir, en action, les vecteurs vitesses et accélérations sur un pendule, de même que les valeurs des différentes énergies.

http://www.youtube.com/watch?feature=fvwp&NR=1&v=jyHFXTZmWgI

Le pendule composé



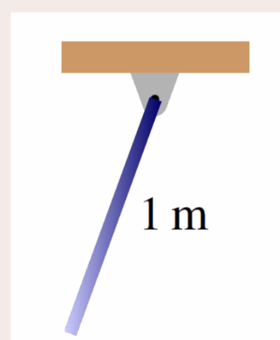
Le pendule composé est un objet qu'on fait osciller autour d'un axe. On a déjà fait le calcul de la fréquence angulaire dans ce cas.

Fréquence angulaire d'un pendule composé

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

Il ne reste qu'à trouver d (la distance entre l'axe et le centre de masse) et I (le moment d'inertie) selon la situation.

Exemple 1.4.3



On fait osciller une tige de 1 m autour d'un axe passant par le bout de la tige. Quelle est la période d'oscillation de la tige ?

Pour trouver la période, qui est $2\pi/\omega$, on doit trouver ω. Pour ce genre de pendule, ω est

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

Pour calculer ω, il nous faut d et I.

Commençons par d. Comme le centre de masse de la tige est au milieu de celle-ci et que l'axe est au bout, la distance entre le centre de masse et l'axe est

$$d = \frac{L}{2} = 0,5m$$

Le moment d'inertie I est

$$I = I_{cm} + md^2$$

Comme I_{cm} d'une tige est

$$I_{cm} = \frac{1}{12} mL^2$$

on a

$$I = \frac{1}{12} mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} mL^2$$

La fréquence angulaire est donc

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{mgd}{I}} \\ &= \sqrt{\frac{mgd}{\frac{1}{3} mL^2}} \\ &= \sqrt{\frac{3gd}{L^2}} \\ &= \sqrt{\frac{3 \cdot 9,8 \frac{N}{kg} \cdot 0,5m}{(1m)^2}} \\ &= 3,834 \frac{rad}{s} \end{aligned}$$

La période est donc

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{3,834 s^{-1}} \\ &= 1,639 s \end{aligned}$$

Les oscillations permettent d'ailleurs de déterminer le moment d'inertie des objets pour lequel il est très difficile de le calculer. On le fait osciller et, à partir de la valeur de la période et de d, on peut déterminer la valeur de I.

1.5 LA RÉSONANCE

Jusqu'ici, nous avons parlé de systèmes en oscillation libre. Cela veut dire qu'une fois que l'oscillation est commencée, il n'y a pas de force externe qui vient perturber le système. Dans ce cas, l'énergie est conservée et l'oscillation est perpétuelle.

Bien sûr, il y a toujours la friction qui est présente. Il s'agit d'une force externe qui ferait perdre de l'énergie au système. On aurait alors affaire à des oscillations amorties. Avec une friction pas trop importante, on verrait que l'amplitude des oscillations diminue avec le temps (c'est l'amortissement sous-critique). Nous n'allons pas explorer ce qui arrive si on tient compte de la friction.

Il pourrait aussi y avoir une force externe qui agit sur le système. Le cas des forces périodiques est particulièrement intéressant. Il s'agit de forces qui agissent de façon cyclique sur le système. Une personne qui pousse un enfant sur une balançoire est un exemple de force périodique. Chaque fois que l'enfant revient, la personne exerce une force sur l'enfant. Chaque poussée augmente alors l'amplitude du mouvement.

Examinons ce qui se passe si une force s'exerce de façon cyclique sur un système masse-ressort qui oscille horizontalement sur une surface sans friction avec une période d'oscillation naturelle de 1 seconde. Supposons au départ que la force s'exerce avec une période qui n'est pas la même que celle du système masse-ressort. Par exemple, il y a une force de 5 N agissant vers la droite pendant 0,1 seconde toutes les 0,5 seconde. Au départ, la force pousse la masse et la met en mouvement. Une demi-seconde plus tard, la masse a fait une demi-oscillation et est revenue au point de départ, mais en allant vers la gauche. C'est alors que la force vers la droite agit sur la masse qui va vers la gauche. Cette force va donc arrêter la masse. Une demi-seconde plus tard, la force vers la droite va remettre la masse en mouvement, mais elle sera arrêtée à nouveau une demi-seconde plus tard. Le mouvement de la masse restera donc toujours faible. C'est toujours ce qui se passera si la force agit avec une période différente de celle du système oscillant : parfois, la force va donner de l'énergie à la masse quand la force est dans le même sens que la vitesse et parfois elle va enlever de l'énergie à la masse quand elle agit dans le sens contraire de la vitesse. L'effet global ne sera donc pas important.

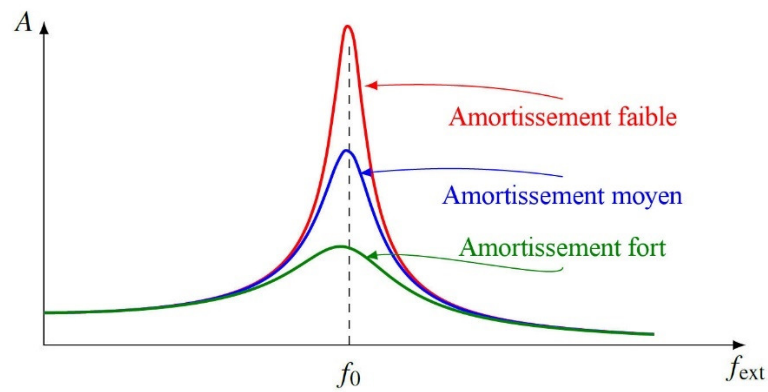
Par contre, l'effet est différent si la force agit avec la même période que le système en oscillation. Si la force agit toutes les secondes sur notre système masse-ressort alors, l'amplitude augmentera sans cesse. Au départ, la force met la masse en mouvement vers la droite. Quand la force agit à nouveau une seconde plus tard, l'objet est revenu à la position de départ et va vers la droite. Une force vers la droite agissant sur une masse allant vers la droite fait augmenter la vitesse de la masse, ce qui fait augmenter l'amplitude. Cette augmentation de vitesse et d'amplitude va se reproduire toutes les secondes ce qui fera augmenter continuellement l'amplitude d'oscillation. L'amplitude d'oscillation peut donc devenir très grande quand la force agit avec une période égale à la période d'oscillation du système. S'il n'y a pas de friction, l'amplitude va augmenter jusqu'à ce que le système se détruise. Avec de la friction, l'amplitude va augmenter jusqu'à ce que l'énergie fournie par la force soit égale à l'énergie dissipée par la friction.

Quand une force agit sur un système oscillant avec une période égale à la période d'oscillation naturelle du système, l'amplitude d'oscillation peut devenir très grande. C'est le phénomène de résonance.

On peut même trouver l'amplitude d'oscillation du système quand il y a une force périodique qui agit sur le système. Par exemple, vous pouvez voir dans ce document le calcul de l'amplitude d'une système masse-ressort soumis à une force $F_0 \cos \omega t$ s'il y a une force de friction proportionnelle à la vitesse ($F = -bv$) qui s'oppose au mouvement.
http://physique.merici.ca/ondes/preuveamplitude.pdf
Ce calcul montre que l'amplitude au bout d'un certain temps est

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{\left(-\omega^2 m + k\right)^2 + \left(\omega b\right)^2}}$$

Voici le graphique de cette amplitude en fonction de la fréquence de la force.



La ligne pointillée est la fréquence d'oscillation du système. On voit que quand la force a une fréquence égale à la fréquence d'oscillation du système, l'amplitude devient très grande. Il y a en fait trois cas sur ce graphique : peu de friction en rouge, un peu plus de friction en bleu et encore plus de friction en vert. On remarque que l'amplitude d'oscillation devient très grande pour des systèmes avec peu de friction. L'amplitude peut devenir tellement grande que le système se détruira. (En fait, la résonance se fait à une fréquence un peu inférieure à la fréquence naturelle d'oscillation, surtout quand la friction est importante. On peut voir sur le graphique que l'amplitude atteint une valeur maximale un peu avant que la fréquence soit égale à la fréquence naturelle sur la courbe où il y a le plus de friction.)

Dans cette démonstration, un moteur tente de faire osciller un système masse-ressort. On remarque que l'amplitude est beaucoup plus importante quand le moteur fait une force avec une fréquence identique à la fréquence du système masse-ressort.
http://www.youtube.com/watch?v=aZNnwQ8HJHU

Le son arrivant sur un objet tente de faire vibrer cet objet avec la même fréquence que le son. Si un son à la bonne fréquence arrive sur un verre avec une fréquence identique à celle du verre, l'amplitude peut augmenter jusqu'à ce que le verre casse. (Oui oui, le bord du

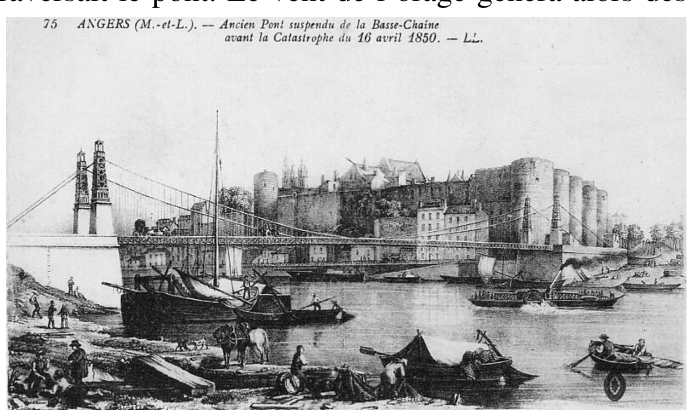
verre peut osciller, vous allez très bien le voir dans le vidéo. Ça semble aller lentement, mais c'est parce qu'on a utilisé un stroboscope.)
http://www.youtube.com/watch?v=17tqXgvCN0E
Ce qu'on peut faire (semble-t-il) à la maison.
http://www.youtube.com/watch?v=fbfjcEzFN2U
Rappelez-vous qu'il n'y a pas que la force du son qui importe, la fréquence doit être exactement la bonne. Il est donc impossible que quelqu'un casse toutes les affaires en verre autour de lui en chantant très fort. Il faudrait pour cela que tous les objets en verre aient une fréquence d'oscillation égale à la fréquence du son, ce qui est très peu probable.

Dans le vidéo suivant, un hélicoptère est détruit par la résonance.
http://www.youtube.com/watch?v=ztBGCesBudE
Les pales de derrière n'étant pas équilibrées, la rotation de l'hélice fait une force périodique sur l'arrière de l'hélicoptère. En faisant tourner l'hélice à la fréquence de résonance de l'hélicoptère, l'amplitude d'oscillation augmente sans cesse jusqu'à ce que l'arrière de l'hélicoptère se détruise. Cela ne se serait pas produit si l'hélice avait tourné avec une période plus grande ou plus petite.

Vous pouvez admirer ces jeunes qui tentent de faire effondrer un pont en appliquant une force périodique avec une des fréquences naturelles du pont (parce qu'il y a plusieurs façons de faire osciller un pont).
http://www.youtube.com/watch?v=MNBun1JgDYo
http://www.youtube.com/watch?v=xlOS_31Ubdo

Quand on a ouvert le pont du millénium à Londres, on se rendit compte qu'il se produisait un phénomène de résonance. Quand le pont oscillait, les piétons, qui tentaient de garder leur équilibre, exerçaient une force sur le pont avec la même fréquence que la fréquence d'oscillation du pont, ce qui amplifiait les oscillations.
http://www.youtube.com/watch?v=eAXVa__XWZ8
http://www.youtube.com/watch?v=gQK21572oSU (version plus détaillée)
On a réglé le problème en ajoutant des amortisseurs, ce qui augmentait la friction.

Le même phénomène est à l'origine de l'effondrement du pont suspendu de la Basse-Chaine à Angers en France. Le 16 avril 1850, un violent orage se produisit alors que le 11^e^ régiment d'infanterie légère traversait le pont. Le vent de l'orage généra alors des oscillations dans le pont. Tout comme sur le pont millenium, les mouvements d'oscillation furent amplifiés par les soldats qui tentaient de garder leur équilibre sur le pont. Les oscillations devinrent tellement grandes que les câbles retenant le pont cédèrent et 226 personnes périrent (certains furent tués par les baïonnettes de leurs camarades).



fr.wikipedia.org/wiki/Pont_de_la_Basse-Cha%C3%AEne#/media/File:Pont1839.jpg

On peut parfois lire que la chute de ce pont fut provoquée par les soldats qui marchaient au pas avec la même fréquence que la fréquence de résonance du pont. Toutefois, les soldats ne marchaient pas au pas à ce moment. Par contre, c'est ce qui provoqua l'effondrement du pont de Broughton traversant la rivière Irwel à Manchester. Le 12 avril 1831, les soldats sentirent le pont vibrer sous leur pas (même s'ils ne marchaient pas au pas à ce moment). Trouvant la sensation amusante, certains se mirent à siffloter un air de marche pour que tous marchent au même rythme que l'oscillation du pont. Sous le coup des pas cadencés, l'amplitude d'oscillation augmenta jusqu'à ce qu'une partie du tablier tombe de 6 m. Comme la rivière n'était pas très profonde à cet endroit, il n'y eut que des blessés cette fois-ci.

L'effondrement du pont de Tacoma Narrows (État de Washington), bien que spectaculaire,
http://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs
n'est pas dû à la résonance, mais à l'instabilité aéroélastique. Dans ce cas, l'amplitude augmente simplement avec la force du vent, il n'y a pas de fréquence de résonance.

RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS

Lien entre *T* et *f*

$$T = \frac{1}{f}$$

Définition de la fréquence angulaire

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Constante de phase

$$\phi = \frac{\Delta t}{T} 2\pi$$

Position en fonction du temps pour une oscillation harmonique

$$x = A\sin(\omega t + \phi)$$

Vitesse en fonction du temps pour une oscillation harmonique

$$v = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

Vitesse maximale

$$v_{max} = A\omega$$

Accélération en fonction du temps pour une oscillation harmonique

$$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

Accélération maximale

$$a_{\max} = A\omega^2$$

Lien entre *x* et *v*

$$A^2 = x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2$$

Lien entre *x* et *a*

$$a = -\omega^2 x$$

Condition pour obtenir une oscillation harmonique

$$a = -(\text{constante})\, x$$

ou

L'énergie potentielle doit être proportionnelle à x^2

Calcul de ϕ

$$\tan(\omega t + \phi) = \frac{\omega x}{v}$$

Fréquence angulaire pour un système masse-ressort

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Étirement du ressort à la position d'équilibre

$$kx_0 = mg$$

Énergie mécanique

$$E_{mec} = E_k + U$$

Énergie cinétique

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Énergie potentielle (toujours valide)

$$U = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

Énergie potentielle (valide seulement pour le système masse-ressort)

$$U_R = \frac{1}{2} kx^2$$

Énergie mécanique

$$E_{mec} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$

$$E_{mec} = \frac{1}{2} mv_{\max}^2$$

Énergie mécanique (valide seulement pour le système masse-ressort)

$$E_{mec} = \frac{1}{2} kA^2$$

Fréquence angulaire d'un pendule simple (Amplitude < 15°)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Position d'un pendule

$$x = A\sin\left(\omega t + \phi\right)$$

ou

$$\theta = \theta_{\max} \sin\left(\omega t + \phi\right)$$

Lien entre x et θ pour un pendule

$$\theta_{(rad)} = \frac{x}{L}$$

Lien entre A et $\theta_{\max}$ pour un pendule

$$\theta_{\max(rad)} = \frac{A}{L}$$

Énergie potentielle (valide seulement pour le pendule)

$$U_g = \frac{1}{2} m\frac{g}{L} x^2 \qquad \text{ou} \qquad U_g = \frac{1}{2} mgL\theta^2 \quad \text{(L'angle est en radians)}$$

Fréquence angulaire d'un pendule composé

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

EXERCICES

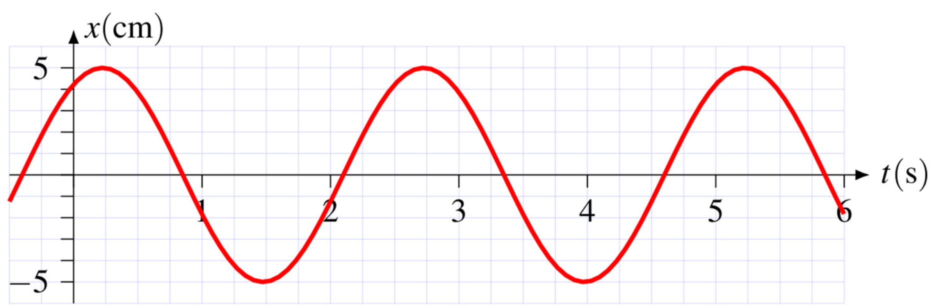
1.1 Oscillation harmonique

1. La position en fonction du temps d'un objet en oscillation harmonique est donnée par la formule suivante.

$$x = 0,2m \cdot \sin\left(5\tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{\pi}{4}\right)$$

a) Quelle est l'amplitude ?
b) Quelle est la période de l'oscillation ?
c) Quelle est la constante de phase ?
d) Quelle est la vitesse maximale ?
e) Écrivez cette équation sous la forme $x = A\cos(\omega t + \psi)$

2. Un mouvement d'oscillation est décrit par ce graphique.



a) Quelle est l'amplitude de ce mouvement (approximativement) ?
b) Quelle est la période de ce mouvement (approximativement) ?
c) Quelle est la constante de phase du mouvement décrit par ce graphique (approximativement) ?

3. La position en fonction du temps d'un objet en oscillation harmonique est donnée par la formule suivante.

$$x = 0,25m \cdot \sin\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{3\pi}{4}\right)$$

a) Quelle est la position à t = 1 s ?
b) Quelle est la vitesse à t = 1 s ?
c) Quelle est l'accélération à t = 1 s ?

4. La fréquence d'un objet en oscillation harmonique est de 5 Hz et l'accélération maximale de l'objet est de 12 m/s². Quelle est la vitesse maximale de l'objet ?

5. La vitesse maximale d'un objet en oscillation harmonique est de 32 m/s alors que l'accélération maximale de cet objet est de 128 m/s².

   a) Quelle est la période du mouvement ?
   b) Quelle est l'amplitude du mouvement ?

6. À t = 0 s, un objet en oscillation harmonique est à la position x = 10 cm et a une vitesse de 24 cm/s. La période du mouvement est de 8 secondes. Quelle est l'équation du mouvement $\left(x = A\sin\left(\omega t + \phi\right)\right)$?

7. À t = 0 s, un objet en oscillation harmonique est à la position x = -20 cm et a une vitesse de 0 m/s. La période du mouvement est de 8 secondes. Quelle est l'équation du mouvement $\left(x = A\sin\left(\omega t + \phi\right)\right)$?

8. À un certain moment pendant son mouvement d'oscillation, un objet est à x = 6 cm, a une vitesse de -1 m/s et une accélération de -24 m/s².

   a) Quelle est la période du mouvement ?
   b) Quelle est l'amplitude du mouvement ?

9. La position en fonction du temps d'un objet en oscillation harmonique est donnée par la formule suivante.

$$x = 0,25m \cdot \sin\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{3\pi}{4}\right)$$

   a) Quelle est la vitesse quand l'objet est à x = 15 cm ?
   b) Quelle est l'accélération quand l'objet est à x = 15 cm ?

10. La position en fonction du temps d'un objet en oscillation harmonique est donnée par la formule suivante.

$$x = 0,2m \cdot \sin\left(5\tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{\pi}{4}\right)$$

   a) À quel moment la masse est-elle à la position x = 12 cm pour la première fois ?
   b) À quel moment la vitesse de la masse est-elle de v = -60 cm/s pour la première fois ?

11. La position en fonction du temps d'un objet en oscillation harmonique est donnée par la formule suivante.

$$x = 0{,}16m \cdot \sin\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{\pi}{2}\right)$$

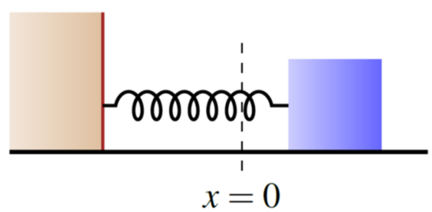
À quel moment la masse est-elle à la position x = 8 cm tout en ayant une vitesse positive pour la première fois ?

12. Un objet décrit une oscillation harmonique avec une période de 0,5 s. À t = 0 s, la grandeur de l'accélération de l'objet est maximale. À ce moment, l'accélération atteint -32 m/s². Quelle est l'équation du mouvement $\left(x = A\sin\left(\omega t + \phi\right)\right)$?

13. Dans un mouvement harmonique ayant une amplitude de 20 cm et une période de 6 secondes, combien faut-il de temps pour que l'objet passe de x = -10 cm à x = 10 cm ?

1.2 Le système masse-ressort

14. Une masse de 250 g est fixée au bout d'un ressort tel qu'illustré sur la figure. Le ressort a une constante de k = 81 N/m. À t = 1 s, la masse est à x = 10 cm et a une vitesse de -2 m/s.



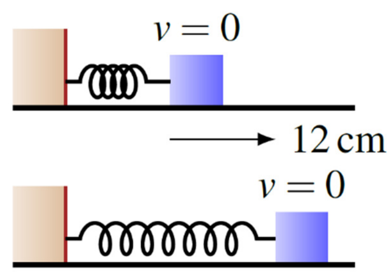
   a) Quelle est l'amplitude du mouvement ?
   b) Quelle est la constante de phase ?
   c) Quelle est l'équation du mouvement $\left(x = A\sin\left(\omega t + \phi\right)\right)$?

15. Un système masse-ressort a une fréquence d'oscillation de 10 Hz. Quand on change la masse pour une autre ayant une masse supérieure de 100 g, la fréquence d'oscillation diminue à 6 Hz.

   a) Quelle était la valeur initiale de la masse ?
   b) Quelle est la valeur de la constante du ressort ?

16. Quand on accroche une masse de 200 g à un ressort vertical, ce dernier allonge de 10 cm pour atteindre la position d'équilibre. Quelle sera la période d'oscillation de ce système masse-ressort ?

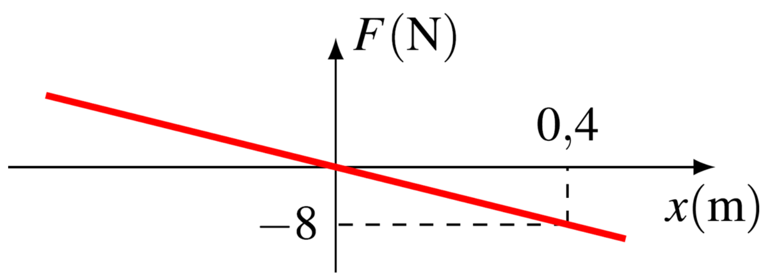
17. Une masse prend 0,8 seconde pour parcourir les 12 cm pour passer d'un côté à l'autre dans son mouvement d'oscillation.



a) Quelle est l'amplitude du mouvement ?
b) Quelle est la période du mouvement ?
c) Quelle est la vitesse maximale de la masse ?
d) Quelle est l'accélération maximale de la masse ?

18. Un objet est fixé au bout d'un ressort ayant une constante de 250 N/m. On donne ensuite une petite poussée à l'objet et le mouvement résultant a une amplitude de 20 cm. Quelle est la masse de l'objet sachant que la vitesse maximale d'objet est de 4 m/s ?

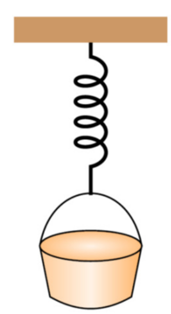
19. La force exercée par un ressort sur une masse de 200 g est donnée par ce graphique.



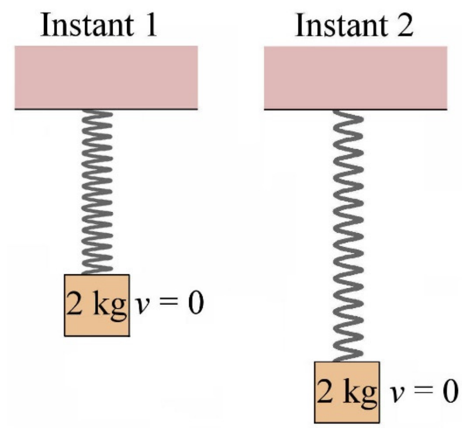
Quelle est la période du mouvement harmonique de cette masse ?

20. Un système masse-ressort oscille avec une amplitude de 12 cm et une période de 2 secondes. À $t = 0$, la position de la masse est $x = -8$ cm et la vitesse est positive. Quelle est la constante de phase ϕ ?

21. Quand on ajoute de l'eau dans la chaudière montrée sur la figure, la nouvelle position d'équilibre est 12 cm plus bas. La chaudière vide a une masse de 2 kg. Une fois que l'eau est ajoutée, le système oscille avec une période de 2,4 s. Quelle est la masse de l'eau qu'on a ajoutée dans la chaudière ?



22. Une masse de 2 kg est suspendue au bout d'un ressort. Initialement (instant 1), le ressort n'est pas étiré et la masse est au repos. Quand on laisse tomber la masse (sans la pousser), elle prend alors 0,6 seconde pour atteindre son point le plus bas (instant 2).



a) Quelle est la constante du ressort ?
b) Quelle est l'amplitude du mouvement ?
c) Quelle est la vitesse maximale de la masse ?
d) Quand la masse aura-t-elle une vitesse de 1 m/s vers le haut pour la première fois ?

1.3 L'énergie mécanique dans le mouvement harmonique

23. La position en fonction du temps d'un système masse-ressort est donnée par la formule suivante.

$$x = 0,2m \cdot \sin\left(5\tfrac{rad}{s} \cdot t + \tfrac{\pi}{4}\right)$$

La constante du ressort est de 250 N/m.

a) Quelle est l'énergie mécanique de ce système ?
b) Quelle est l'énergie du ressort à t = 5 s ?
c) Quelle est l'énergie cinétique à t = 5 s ?

24. À un certain moment dans un système masse-ressort en oscillation, l'énergie cinétique est de 10 J et l'énergie du ressort est de 20 J. La période du mouvement est de 3 s et l'amplitude est de 80 cm.

a) Quelle est la constante du ressort ?
b) Quelle est la grandeur de la masse ?
c) Quelle est la vitesse maximale de la masse ?

25. L'énergie mécanique d'un système en oscillation harmonique est de 5 J. L'amplitude d'oscillation est de 10 cm et la période est de 0,5 s.

a) Quelle est l'énergie cinétique quand x = 6 cm ?
b) Quelle est l'énergie du ressort quand x = 4 cm ?

26. La position en fonction du temps d'une masse en oscillation harmonique est donnée par la formule suivante.

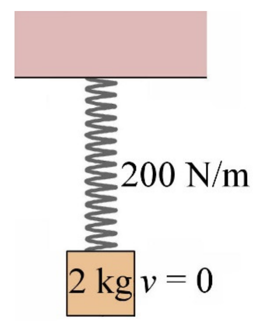
$$x = 0,25m \cdot \sin\left(10\tfrac{rad}{s} \cdot t + \pi\right)$$

À quel moment a-t-on $E_k = U$ pour la première fois si l'énergie mécanique du système est de 50 J ?

27. Un système masse-ressort oscille avec une amplitude de 12 cm.

a) Quelle est la position de l'objet si la grandeur de la vitesse est égale au quart de la vitesse maximale ?
b) Quelle est la position de l'objet si l'énergie cinétique est égale à la moitié de l'énergie du ressort ?

28. La masse de 2 kg de la figure est suspendue au plafond avec un ressort dont la constante vaut 200 N/m. Au départ, le ressort n'est pas étiré ni comprimé. On laisse alors tomber la masse sans la pousser. On aura alors un mouvement d'oscillation de la masse.



a) Quelle sera la période du mouvement ?
b) Quelle sera l'amplitude de ce mouvement ?

1.4 Le pendule

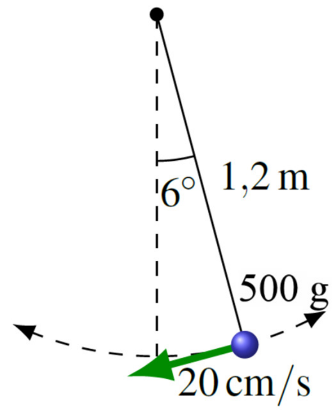
29. Quelle est la longueur de la corde d'un pendule simple si le pendule redevient vertical toutes les 2 secondes ?

30. Un pendule a une période de 2 secondes à la surface de la Terre. Quelle sera la période du pendule si on l'amène à la surface de la Lune, où g vaut 1,6 N/kg ?

31. La longueur de la corde d'un pendule simple est de 2 m. On donne un angle de 10° à ce pendule et on le lâche.

a) Quelle est la période du mouvement ?
b) Quelle est la vitesse maximale de ce pendule ?

32. Un pendule simple oscille avec une amplitude angulaire de 12° et une période de 1,6 seconde. Quelle est la vitesse de la masse quand l'angle est de 8° ?



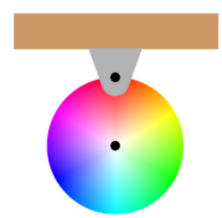
33. Un pendule simple est formé d'une masse de 500 g et d'une corde de 1,2 m. Au départ (t = 0 s), on a la situation montrée sur la figure de droite.

Quelle est l'équation du mouvement de ce pendule $\left(\theta = \theta_{max} \sin\left(\omega t + \phi\right)\right)$? (On veut θ en degrés.)

34. L'amplitude angulaire d'un pendule simple est de 15° et sa vitesse maximale est 60 cm/s.

a) Quelle est la longueur de la corde ?
b) Quelle est la période du mouvement ?

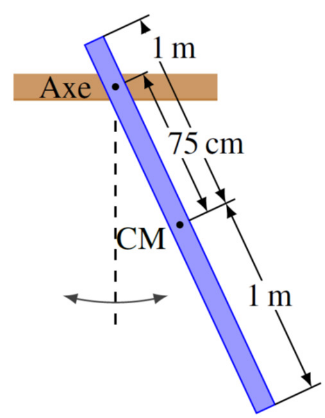
35. On fixe un disque à un axe de rotation tel qu'illustré sur la figure. Sachant que la masse du disque est de 5 kg, que son rayon est de 20 cm et que le moment d'inertie d'un disque tournant autour d'un axe situé au bord du disque est de



$$I = \frac{3}{2} mR^2$$

déterminez la période d'oscillation du disque si on lui fait faire une oscillation.

36. Quelle est la période d'oscillation de cette tige de 2 kg ?



Rappels :

1) Le moment d'inertie d'une tige est

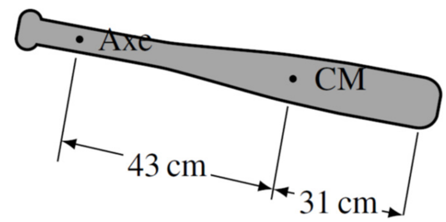
$$I_{cm} = \frac{1}{12} mL^2$$

2) Le moment d'inertie quand l'axe de rotation n'est pas au centre de masse est

$$I = I_{cm} + mh^2$$

où h est la distance entre le centre de masse et l'axe de rotation.

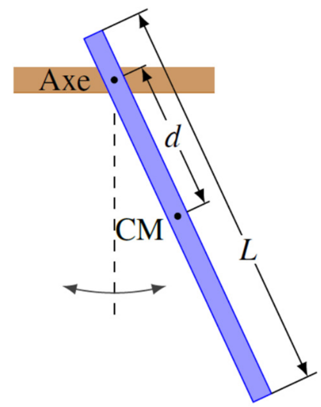
37. Ce bâton de baseball de 900 g oscille avec une période de 1,335 seconde quand l'axe de rotation est à l'endroit indiqué sur la figure. Quel est son moment d'inertie quand l'axe est à cet endroit ?



Défis

(Questions plus difficiles que les questions qu'il y aura à l'examen.)

38. Quel doit être la valeur de d pour que la période d'oscillation de cette tige soit la plus petite possible ?



Rappels :

1) Le moment d'inertie d'une tige est

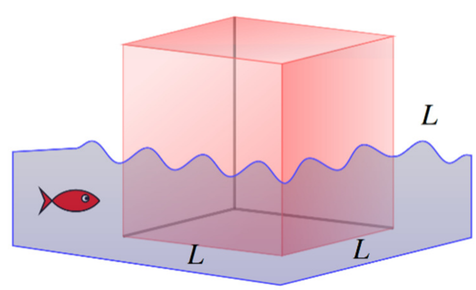
$$I_{cm} = \frac{1}{12} mL^2$$

2) Le moment d'inertie quand l'axe de rotation n'est pas au centre de masse est

$$I = I_{cm} + mh^2$$

où h est la distance entre le centre de masse et l'axe de rotation.

39. Un gros iceberg cubique (L = 75 m) flotte sur l'océan. Quelle est la période d'oscillation de l'iceberg s'il oscille légèrement de haut en bas à surface de l'eau ? (La densité de l'eau est de 1000 kg/m³ et la densité de la glace est de 920 kg/m³.)



40. Supposons que la force sur un objet est donnée par $F = -cx^3$ (au lieu de $F = -kx$). Montrez qu'avec une telle force, la période est proportionnelle à $1/A$ (où A est l'amplitude).

RÉPONSES

1.1 Oscillation harmonique

1. a) 20 cm b) 1,257 s c) π/4 d) 1 m/s e) $x = 0,2m \cdot \cos\left(5\frac{rad}{s} \cdot t - \frac{\pi}{4}\right)$
2. a) 5 cm b) 2,5 s c) 1 rad
3. a) -5,216 cm b) 2,445 m/s c) 5,216 m/s²
4. 0,382 m/s
5. a) 1,571 s b) 8 m
6. $x = 0,3215m \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\frac{rad}{s} \cdot t + 0,3163\right)$
7. $x = 0,2m \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\frac{rad}{s} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$ ou $x = 0,2m \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\frac{rad}{s} \cdot t + \frac{3\pi}{2}\right)$
8. a) 0,3142 s b) 7,81 cm
9. a) ± 2 m/s b) -15 m/s²
10. a) 0,3425 s b) 0,2858 s
11. 0,5236 s
12. $x = 0,2026m \cdot \sin\left(4\pi\frac{rad}{s} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$
13. 1 s

1.2 Le système masse-ressort

14. a) 14,95 cm b) -15,591 rad c) $x = 0,1495m \cdot \sin\left(18\frac{rad}{s} \cdot t - 15,591rad\right)$
15. a) 56,25 g b) 222,1 N/m
16. 0,6347 s
17. a) 6 cm b) 1,6 s c) 0,2356 m/s d) 0,9253 m/s²
18. 625 g
19. 0,6283 s
20. -0,7297 rad
21. 183,2 g
22. a) 54,83 N/m b) 35,75 cm c) 1,872 m/s d) 0,7077 s

1.3 L'énergie mécanique dans le mouvement harmonique

23. a) 5 J b) 1,844 J c) 3,156 J
24. a) 93,75 N/m b) 21,37 kg c) 1,676 m/s
25. a) 3,2 J b) 0.8 J
26. 0,0785 s
27. a) ±11,62 cm b) ±9,80 cm
28. a) 0,6283 s b) 9,8 cm
29. a) 0,7854 s b) 6 m/s c) 75 cm

1.4 Le pendule

30. 3,972 m
31. 4,95 s
32. a) 2,838 s b) 0,7727 m/s
33. 0,3896 m/s
34. $\theta = 6,868° \cdot \sin\left(2,858 \frac{rad}{s} \cdot t + 2,079 rad\right)$
35. a) 0,536 m b) 1,47 s
36. 1,099 s
37. 2,194 s
38. 0,171 kgm²

Défis

39. $L/\sqrt{12}$
40. 16,67 s