

Solutionnaire du chapitre 11

1. a) On va commencer par calculer $h^2/8mL^2$.

$$\begin{aligned}\frac{h^2}{8mL^2} &= \frac{(6,626 \times 10^{-34} \text{ Js})^2}{8 \cdot 1,6749 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot (2 \times 10^{-14} \text{ m})^2} \\ &= 8,192 \times 10^{-14} \text{ J} \\ &= 0,511 \text{ MeV}\end{aligned}$$

L'énergie du premier niveau est

$$\begin{aligned}E_1 &= 1^2 \frac{h^2}{8mL^2} \\ &= 1 \cdot 0,511 \text{ MeV} \\ &= 0,511 \text{ MeV}\end{aligned}$$

L'énergie du deuxième niveau est

$$\begin{aligned}E_2 &= 2^2 \frac{h^2}{8mL^2} \\ &= 4 \cdot 0,511 \text{ MeV} \\ &= 2,045 \text{ MeV}\end{aligned}$$

L'énergie du troisième niveau est

$$\begin{aligned}E_3 &= 3^2 \frac{h^2}{8mL^2} \\ &= 9 \cdot 0,511 \text{ MeV} \\ &= 4,602 \text{ MeV}\end{aligned}$$

b) Au niveau 1, la longueur d'onde du neutron est

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \frac{2L}{n} \\ \lambda_1 &= \frac{2L}{1} \\ &= \frac{2 \cdot 2 \times 10^{-14} \text{ m}}{1} \\ &= 4 \times 10^{-14} \text{ m}\end{aligned}$$

2. Cette onde est l'onde du 6^e niveau. La longueur d'onde est

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \frac{2L}{n} \\ \lambda_6 &= \frac{2L}{6} \\ &= \frac{2 \cdot 4 \times 10^{-9} \text{ m}}{6} \\ &= 1,333 \times 10^{-9} \text{ m}\end{aligned}$$

La quantité de mouvement de l'électron est

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} \\ 1,333 \times 10^{-9} \text{ m} &= \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ Js}}{p} \\ p &= 4,9696 \times 10^{-25} \frac{\text{kgm}}{\text{s}}\end{aligned}$$

3. La plus petite énergie correspond à $n = 1$. L'énergie de ce niveau est

$$\begin{aligned}E_1 &= 1^2 \frac{h^2}{8mL^2} \\ &= \frac{(6,626 \times 10^{-34} \text{ Js})^2}{8 \cdot 9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg} \cdot (1 \times 10^{-9} \text{ m})^2} \\ &= 6,025 \times 10^{-20} \text{ J} \\ &= 0,376 \text{ eV}\end{aligned}$$

4. On trouve la largeur avec la formule de l'énergie du 4^e niveau.

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8mL^2}$$

$$E_4 = 16 \frac{h^2}{8mL^2}$$

$$10 \cdot 1,602 \times 10^{-19} \text{ J} = 16 \cdot \frac{(6,626 \times 10^{-34} \text{ Js})^2}{8 \cdot 9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg} \cdot L^2}$$

$$L = 7,757 \times 10^{-10} \text{ m} = 0,7757 \text{ nm}$$

5. À partir de l'énergie du quatrième niveau, on peut trouver l'énergie de premier niveau

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8mL^2}$$

$$E_4 = 4^2 \cdot \frac{h^2}{8mL^2}$$

$$= 16 \cdot \frac{h^2}{8mL^2}$$

$$= 16 \cdot E_1$$

On a donc

$$E_4 = 16 \cdot E_1$$

$$24 \text{ eV} = 16 \cdot E_1$$

$$E_1 = 1,5 \text{ eV}$$

Ensuite, on peut trouver l'énergie du troisième niveau à partir de l'énergie du premier niveau

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8mL^2}$$

$$E_3 = 3^2 \cdot \frac{h^2}{8mL^2}$$

$$= 9 \cdot \frac{h^2}{8mL^2}$$

$$= 9 \cdot E_1$$

$$= 9 \cdot 1,5 \text{ eV}$$

$$= 13,5 \text{ eV}$$

6. L'énergie du niveau est

$$\begin{aligned}
 E_n &= (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{h^2}{8mL^2} \\
 &= (3^2 + 4^2 + 2^2) \cdot \frac{(6,626 \times 10^{-34} \text{ Js})^2}{8 \cdot 9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg} \cdot (1 \times 10^{-9} \text{ m})^2} \\
 &= 1,747 \times 10^{-18} \text{ J} \\
 &= 10,90 \text{ eV}
 \end{aligned}$$

7. a) L'énergie du premier niveau est de

$$E_1 = 1^2 \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{h^2}{8mL^2}$$

On sait qu'un niveau (n) a une énergie de 80 eV

$$\begin{aligned}
 E_n &= n^2 \frac{h^2}{8mL^2} \\
 80 \text{ eV} &= n^2 E_1
 \end{aligned}$$

et que le niveau suivant ($n + 1$) a une énergie de 96,8 eV

$$\begin{aligned}
 E_{n+1} &= (n+1)^2 \frac{h^2}{8mL^2} \\
 96,8 \text{ eV} &= (n+1)^2 E_1
 \end{aligned}$$

On a alors 2 équations et 2 inconnues. En divisant l'une par l'autre, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{96,8 \text{ eV}}{80 \text{ eV}} &= \frac{(n+1)^2 E_1}{n^2 E_1} \\
 1,21 &= \frac{(n+1)^2}{n^2}
 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$1,21n^2 = (n+1)^2$$

$$1,21n^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$0,21n^2 - 2n - 1 = 0$$

Les solutions de cette équation sont $n = 10$ et $n = -10/21$. Comme n peut seulement être un entier positif, la seule valeur acceptable pour n est $n = 10$.

On peut maintenant trouver l'énergie du premier niveau.

$$80eV = n^2 E_1$$

$$80eV = 10^2 \cdot E_1$$

$$E_1 = 0,8eV$$

b) La largeur de la boîte est

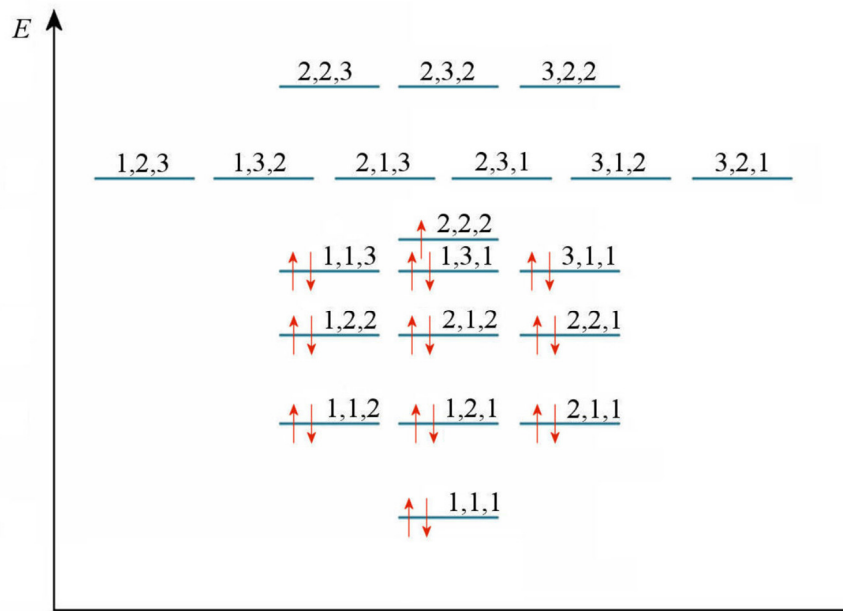
$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}$$

$$0,8eV \cdot 1,602 \times 10^{-19} \frac{J}{eV} = \frac{(6,626 \times 10^{-34} Js)^2}{8 \cdot 9,1094 \times 10^{-31} kg \cdot L^2}$$

$$L = 6,856 \times 10^{-10} m$$

$$L = 0,6856 nm$$

8. Plaçons les 21 électrons sur les niveaux.



Le dernier électron est au niveau 2, 2, 2, donc à $n_x = 2$, $n_y = 2$ et $n_z = 2$

9. Trouvons les niveaux d'énergie. On va commencer par calculer $h^2/8mL^2$.

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{8mL^2} &= \frac{(6,626 \times 10^{-34} \text{ Js})^2}{8 \cdot 1,6749 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot (10^{-14} \text{ m})^2} \\ &= 3,277 \times 10^{-13} \text{ J} \\ &= 2,045 \text{ MeV} \end{aligned}$$

L'énergie du premier niveau est

$$\begin{aligned} E_1 &= 1^2 \frac{h^2}{8mL^2} \\ &= 1 \cdot 2,045 \text{ MeV} \\ &= 2,045 \text{ MeV} \end{aligned}$$

L'énergie du deuxième niveau est

$$\begin{aligned} E_2 &= 2^2 \frac{h^2}{8mL^2} \\ &= 4 \cdot 2,045 \text{ MeV} \\ &= 8,181 \text{ MeV} \end{aligned}$$

L'énergie du photon est

$$\begin{aligned} E_{\text{photons}} &= E_2 - E_1 \\ &= 8,181\text{MeV} - 2,045\text{MeV} \\ &= 6,136\text{MeV} \end{aligned}$$

La longueur d'onde de ce photon est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1240\text{eVnm}}{\lambda} \\ 6,136 \times 10^6 \text{eV} &= \frac{1240\text{eVnm}}{\lambda} \\ \lambda &= 2,021 \times 10^{-4} \text{nm} \end{aligned}$$

10. Trouvons les niveaux d'énergie. On va commencer par calculer $h^2/8mL^2$.

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{8mL^2} &= \frac{(6,626 \times 10^{-34} \text{Js})^2}{8 \cdot 9,1094 \times 10^{-31} \text{kg} \cdot (2 \times 10^{-9} \text{m})^2} \\ &= 1,506 \times 10^{-20} \text{J} \\ &= 0,094 \text{eV} \end{aligned}$$

L'énergie du premier niveau est

$$\begin{aligned} E_1 &= 1^2 \frac{h^2}{8mL^2} \\ &= 1 \cdot 0,094 \text{eV} \\ &= 0,094 \text{eV} \end{aligned}$$

L'énergie du quatrième niveau est

$$\begin{aligned} E_4 &= 4^2 \frac{h^2}{8mL^2} \\ &= 16 \cdot 0,094 \text{eV} \\ &= 1,504 \text{eV} \end{aligned}$$

Pour passer du niveau 1 au niveau 4, l'énergie du photon doit être

$$\begin{aligned}
 E_{\text{photon}} &= E_4 - E_1 \\
 &= 1,504\text{eV} - 0,094\text{eV} \\
 &= 1,410\text{eV}
 \end{aligned}$$

La longueur d'onde de ce photon est

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1240\text{eVnm}}{\lambda} \\
 1,41\text{eV} &= \frac{1240\text{eVnm}}{\lambda} \\
 \lambda &= 879\text{nm}
 \end{aligned}$$

11. Trouvons les niveaux d'énergie. On va commencer par calculer $h^2/8mL^2$.

$$\begin{aligned}
 \frac{h^2}{8mL^2} &= \frac{(6,626 \times 10^{-34} \text{ Js})^2}{8 \cdot 9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg} \cdot (0,5 \times 10^{-9} \text{ m})^2} \\
 &= 2,410 \times 10^{-19} \text{ J} \\
 &= 1,504\text{eV}
 \end{aligned}$$

L'énergie du niveau de départ est

$$\begin{aligned}
 E_i &= (2^2 + 2^2 + 2^2) \frac{h^2}{8mL^2} \\
 &= 12 \cdot 1,504\text{eV} \\
 &= 18,049\text{eV}
 \end{aligned}$$

L'énergie du niveau final est

$$\begin{aligned}
 E_f &= (1^2 + 1^2 + 1^2) \frac{h^2}{8mL^2} \\
 &= 3 \cdot 1,504\text{eV} \\
 &= 4,512\text{eV}
 \end{aligned}$$

L'énergie du photon est

$$\begin{aligned}
 E_{\text{photons}} &= E_i - E_f \\
 &= 18,049\text{eV} - 4,512\text{eV} \\
 &= 13,537\text{eV}
 \end{aligned}$$

La longueur d'onde de ce photon est

$$E = \frac{1240eVnm}{\lambda}$$

$$13,537eV = \frac{1240eVnm}{\lambda}$$

$$\lambda = 91,60nm$$

12. a) L'énergie $E_{1\infty}$ est

$$E_{1\infty} = \frac{h^2}{8mL^2}$$

$$= \frac{(6,626 \times 10^{-34} Js)^2}{8 \cdot 9,1094 \times 10^{-31} kg \cdot (0,6 \times 10^{-9} m)^2}$$

$$= 1,674 \times 10^{-19} J$$

$$= 1,0445eV$$

La valeur de u est donc

$$U = u^2 E_{1\infty}$$

$$20eV = u^2 \cdot 1,0445eV$$

$$u = 4,3758$$

Comme $u + 1 = 5,3758$, il y a 5 niveaux.

b) On doit résoudre les équations

$$v \tan\left(\frac{\pi v}{2}\right) = \sqrt{4,3758^2 - v^2}$$

$$-v \cot\left(\frac{\pi v}{2}\right) = \sqrt{4,3758^2 - v^2}$$

Selon le site Wolfram, les solutions de ces équations sont :

La première équation donne 4,1875, 2,5957 et 0,8722

La deuxième équation donne 3,4272 et 1,7397

(On voit qu'il y a bien 5 niveaux et qu'il y a une valeur de v entre 0 et 1, une valeur de v entre 1 et 2, une valeur de v entre 2 et 3 et ainsi de suite.)

Les niveaux d'énergie, donnés par $E = v^2 E_{1\infty}$, sont donc

$$\begin{aligned} E_1 &= (0,8722)^2 \cdot 1,0445eV \\ &= 0,795eV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= (1,7397)^2 \cdot 1,0445eV \\ &= 3,161eV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_3 &= (2,5957)^2 \cdot 1,0445eV \\ &= 7,038eV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_4 &= (3,4272)^2 \cdot 1,0445eV \\ &= 12,27eV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_5 &= (4,1875)^2 \cdot 1,0445eV \\ &= 18,32eV \end{aligned}$$

c) Pour sortir de la boîte, l'énergie de la particule doit être plus grande que 20 eV. On a donc

$$E_f > 20eV$$

Au minimum, l'énergie est 20 eV.

L'énergie minimale du photon est donc

$$\begin{aligned} E_{\text{photon min}} &= E_f - E_i \\ &= 20eV - 3,161eV \\ &= 16,839eV \end{aligned}$$

La longueur d'onde maximale est donc

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{max}} &= \frac{1240eVnm}{E_{\text{photon min}}} \\ &= \frac{1240eVnm}{16,839eV} \\ &= 73,64nm \end{aligned}$$

13. La probabilité est

$$T = \frac{16E(U - E)}{U^2} e^{-2\alpha L}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi\sqrt{8m(U - E)}}{h} \\ &= \frac{\pi\sqrt{8 \cdot 9,1094 \text{ kg} \cdot (10 \text{ eV} - 3 \text{ eV}) \cdot 1,602 \times 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}}}}{6,626 \times 10^{-24} \text{ Js}} \\ &= 1,3555 \times 10^{10} \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} T &= \frac{16E(U - E)}{U^2} e^{-2\alpha L} \\ &= \frac{16 \cdot 3 \text{ eV} (10 \text{ eV} - 3 \text{ eV})}{(10 \text{ eV})^2} e^{-2 \cdot 1,3555 \times 10^{10} \text{ m}^{-1} \cdot 0,3 \times 10^{-9} \text{ m}} \\ &= \frac{16 \cdot 3 \text{ eV} (10 \text{ eV} - 3 \text{ eV})}{(10 \text{ eV})^2} \cdot 0,002938 \\ &= 0,000987 \\ &= 0,0987\% \end{aligned}$$

14. La probabilité est

$$T = \frac{16E(U - E)}{U^2} e^{-2\alpha L}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi\sqrt{8m(U - E)}}{h} \\ &= \frac{\pi\sqrt{8 \cdot 9,1094 \text{ kg} \cdot (12 \text{ eV} - 4 \text{ eV}) \cdot 1,602 \times 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}}}}{6,626 \times 10^{-24} \text{ Js}} \\ &= 1,4491 \times 10^{10} \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

On a donc

$$0,05 = \frac{16 \cdot 4eV \cdot (12eV - 4eV)}{(12eV)^2} e^{-2,4491 \times 10^{10} m^{-1} \cdot L}$$

$$0,05 = \frac{32}{9} \cdot e^{-2,8981 \times 10^{10} m^{-1} \cdot L}$$

$$\frac{9}{640} = e^{-2,8981 \times 10^{10} m^{-1} \cdot L}$$

$$\ln\left(\frac{9}{640}\right) = -2,8981 \times 10^{10} m^{-1} \cdot L$$

$$L = 1,471 \times 10^{-10} m$$

$$L = 0,1471 nm$$

15. La probabilité est

$$T = \frac{16E(U - E)}{U^2} e^{-2\alpha L}$$

Au départ, on a

$$0,1 = \frac{16 \cdot 4eV \cdot (8eV - 4eV)}{(8eV)^2} e^{-2\alpha L}$$

$$0,1 = 4 \cdot e^{-2\alpha L}$$

$$e^{-2\alpha L} = 0,025$$

Si on double la largeur, on a

$$T = \frac{16 \cdot 4eV \cdot (8eV - 4eV)}{(8eV)^2} e^{-2\alpha(2L)}$$

$$= 4 \cdot (e^{-2\alpha L})^2$$

$$= 4 \cdot (0,025)^2$$

$$= 0,0025$$

$$= 0,25\%$$

16. Avec une période de 4×10^{-15} s, la fréquence d'oscillation est

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4 \times 10^{-15} s} = 2,5 \times 10^{14} Hz$$

a) La plus petite énergie est au niveau $n = 0$.

$$\begin{aligned}
 E_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right) hf \\
 E_0 &= \left(0 + \frac{1}{2}\right) hf \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 6,626 \times 10^{-34} \text{ Js} \cdot 2,5 \times 10^{14} \text{ Hz} \\
 &= 8,283 \times 10^{-20} \text{ J} \\
 &= 0,517 \text{ eV}
 \end{aligned}$$

b) La longueur d'onde du photon se trouve avec l'énergie du photon. Cette énergie est

$$E_{\text{photon}} = E_i - E_f$$

E_i est l'énergie du niveau $n = 3$.

$$\begin{aligned}
 E_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right) hf \\
 E_3 &= \left(3 + \frac{1}{2}\right) hf \\
 &= \frac{7}{2} hf \\
 &= 7 \cdot \frac{1}{2} hf \\
 &= 7 \cdot E_0 \\
 &= 7 \cdot 0,517 \text{ eV} \\
 &= 3,619 \text{ eV}
 \end{aligned}$$

E_f est l'énergie du niveau $n = 1$

$$\begin{aligned}
 E_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right) hf \\
 E_1 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) hf \\
 &= \frac{3}{2} hf \\
 &= 3 \cdot \frac{1}{2} hf \\
 &= 3 \cdot E_0 \\
 &= 3 \cdot 0,517 \text{ eV} \\
 &= 1,551 \text{ eV}
 \end{aligned}$$

L'énergie du photon est donc

$$\begin{aligned} E_{\text{photon}} &= E_3 - E_1 \\ &= 3,619\text{eV} - 1,551\text{eV} \\ &= 2,068\text{eV} \end{aligned}$$

La longueur d'onde de ce photon est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1240\text{eV} \cdot \text{nm}}{\lambda} \\ 2,068\text{eV} &= \frac{1240\text{eV} \cdot \text{nm}}{\lambda} \\ \lambda &= 599,6\text{nm} \end{aligned}$$

17. On va trouver la période avec la fréquence d'oscillation qui elle-même se trouve avec l'énergie de l'électron

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) hf$$

Comme l'énergie du photon est

$$E_{\text{photon}} = E_i - E_f$$

et que l'énergie du photon est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1240\text{eVnm}}{\lambda} \\ &= \frac{1240\text{eVnm}}{496\text{nm}} \\ &= 2,5\text{eV} \end{aligned}$$

on arrive à

$$\begin{aligned} E_{\text{photon}} &= E_5 - E_2 \\ 2,5\text{eV} &= \left(5 + \frac{1}{2}\right) hf - \left(2 + \frac{1}{2}\right) hf \\ 2,5\text{eV} &= 5hf + \frac{1}{2} hf - 2hf - \frac{1}{2} hf \\ 2,5\text{eV} &= 3hf \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 2,5eV &= 3hf \\
 2,5 \cdot 1,602 \times 10^{-19} J &= 3 \cdot 6,626 \times 10^{-34} Js \cdot f \\
 f &= 2,015 \times 10^{14} Hz
 \end{aligned}$$

La période d'oscillation est donc

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{f} \\
 &= \frac{1}{2,015 \times 10^{14} Hz} \\
 &= 4,963 \times 10^{-15} s
 \end{aligned}$$

18. La longueur d'onde se trouve à partir de l'énergie du photon qui elle-même se trouve à partir de

$$E_{\text{photon}} = E_i - E_f$$

L'énergie du 5^e niveau est

$$\begin{aligned}
 E_n &= \frac{-13,598eV}{n^2} \\
 E_5 &= \frac{-13,598eV}{5^2} \\
 &= -0,54392eV
 \end{aligned}$$

L'énergie du 2^e niveau est

$$\begin{aligned}
 E_n &= \frac{-13,598eV}{n^2} \\
 E_2 &= \frac{-13,598eV}{2^2} \\
 &= -3,3995eV
 \end{aligned}$$

L'énergie du photon est

$$\begin{aligned}
 E_{\text{photon}} &= E_i - E_f \\
 &= -0,54392eV - (-3,3995eV) \\
 &= 2,85558eV
 \end{aligned}$$

La longueur d'onde de la lumière est donc

$$E = \frac{1240eV \cdot nm}{\lambda}$$

$$2,85558eV = \frac{1240eV \cdot nm}{\lambda}$$

$$\lambda = 434,2nm$$

- 19.** La longueur d'onde se trouve à partir de l'énergie du photon. Pour que le photon soit absorbé, son énergie doit être exactement égale à l'écart d'énergie entre les niveaux 1 et 6.

L'énergie du 1^{er} niveau est

$$E_n = \frac{-13,598eV}{n^2}$$

$$E_1 = \frac{-13,598eV}{1^2}$$

$$= -13,598eV$$

L'énergie du 6^e niveau est

$$E_n = \frac{-13,598eV}{n^2}$$

$$E_2 = \frac{-13,598eV}{6^2}$$

$$= -0,37772eV$$

L'énergie que le photon doit avoir est

$$E_{\text{photon}} = E_f - E_i$$

$$= -0,37773eV - (-13,598eV)$$

$$= 13,2203eV$$

La longueur d'onde de la lumière doit donc être de

$$E = \frac{1240eV \cdot nm}{\lambda}$$

$$13,2203eV = \frac{1240eV \cdot nm}{\lambda}$$

$$\lambda = 93,80nm$$

20. a) L'énergie du 1^{er} niveau est

$$E_n = \frac{-13,598eV}{n^2}$$

$$E_1 = \frac{-13,598eV}{1^2}$$

$$= -13,598eV$$

L'énergie du niveau final est

$$E_{\text{photon}} = E_f - E_i$$

$$13eV = E_f - (-13,598eV)$$

$$E_f = -0,598eV$$

Voyons à quel niveau correspond cette énergie

$$E_n = \frac{-13,598eV}{n^2}$$

$$-0,598 = \frac{-13,598eV}{n^2}$$

$$n = 4,769$$

Comme n peut seulement être une valeur entière, il n'y a pas de niveau ayant cette énergie. Les photons ne peuvent donc pas être absorbés et les électrons restent toujours sur le niveau $n = 1$.

- b) Si on bombarde avec des électrons, n'importe quelle énergie entre 0 et 13 eV peut être transférée lors de la collision. En a), on a trouvé qu'un ajout de 13 eV nous amène quelque part entre le 4^e et le 5^e niveau. L'électron peut donc monter au niveau 2, au niveau 3 et au niveau 4.

21. À un niveau n , les valeurs de l peuvent prendre les valeurs entières entre 0 et $n - 1$.

Pour chaque valeur de l , m peut prendre de valeurs entières entre $-l$ et l . On a donc

- 1 valeur pour $l = 0$ ($m = 0$)
- 3 valeurs pour $l = 1$ ($m = -1, 0$ et 1)
- 5 valeurs pour $l = 2$ ($m = -2, -1, 0, 1$ et 2)
- 7 valeurs pour $l = 3$ ($m = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ et 3)
- ...et ainsi de suite.

On retrouve ici la suite des nombres impairs. Le dernier nombre impair sera $2l_{\max} + 1$.

Comme l_{\max} est égal à $n - 1$, le dernier nombre impair sera

$$\begin{aligned} 2l_{\max} + 1 &= 2(n - 1) + 1 \\ &= 2n - 1 \end{aligned}$$

Le nombre total de niveaux se trouve donc en additionnant ces n nombres impairs.

$$N = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$$

Si $n = 1$, $N = 1$. Si $n = 2$, $N = 4$. Si $n = 3$, $N = 9$. Si $n = 4$, $N = 16$. On semble voir que le nombre de niveau est bien n^2 .

Peut-on faire une preuve plus solide que cette somme de nombres impairs est égal à n^2 ? Bien sûr.

On va additionner ces 2 suites de nombres

$$N = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 5) + (2n - 3) + (2n - 1)$$

et

$$N = (2n - 1) + (2n - 3) + (2n - 5) + \dots + 7 + 5 + 3 + 1$$

Si on additionne ensemble les premiers termes de chaque série, on obtient $2n$.

Si on additionne ensemble les deuxièmes termes de chaque série, on obtient $2n$.

Si on additionne ensemble les troisièmes termes de chaque série, on obtient $2n$.

...

L'addition des termes 2 à 2 nous donne une suite de $2n$.

$$2N = 2n + 2n + 2n + \dots + 2n$$

Comme il y a n termes dans la série, on a

$$2N = n \cdot 2n$$

$$2N = 2n^2$$

$$N = n^2$$

22. a) L'énergie est

$$E_n = -\frac{Z^2 \cdot 13,60eV}{n^2}$$

$$E_1 = -\frac{3^2 \cdot 13,60eV}{1^2}$$

$$= -122,4eV$$

- b) Pour ioniser, il faut amener l'électron à une énergie de 0 eV. Comme l'électron est à -122,4 eV au départ, il faut donc lui donner une énergie de 122,4 eV pour ioniser l'atome. L'énergie d'ionisation est donc de 122,4 eV.
- c) La longueur d'onde se trouve à partir de l'énergie du photon qui elle-même se trouve à partir de

$$E_{\text{photon}} = E_i - E_f$$

L'énergie du 2^e niveau est

$$E_n = -\frac{Z^2 \cdot 13,60eV}{n^2}$$

$$E_2 = -\frac{3^2 \cdot 13,60eV}{2^2}$$

$$= -30,6eV$$

On sait déjà que l'énergie du 1^{er} niveau est -122,4 eV.

L'énergie du photon est

$$E_{\text{photon}} = E_i - E_f$$

$$= -30,6eV - (-122,4eV)$$

$$= 91,8eV$$

La longueur d'onde de la lumière est donc

$$E = \frac{1240eV \cdot nm}{\lambda}$$

$$91,8eV = \frac{1240eV \cdot nm}{\lambda}$$

$$\lambda = 13,51nm$$

23. L'énergie du photon absorbé est

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1240eVnm}{\lambda} \\
 &= \frac{1240eVnm}{250nm} \\
 &= 4,96eV
 \end{aligned}$$

L'énergie de l'électron a donc augmenté de 4,96 eV.

En émettant un premier photon, l'électron perd l'énergie de ce photon. Cette énergie est

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1240eVnm}{\lambda} \\
 &= \frac{1240eVnm}{800nm} \\
 &= 1,55eV
 \end{aligned}$$

Comme l'électron avait gagné 4,96 eV et qu'il vient de perdre 1,55 eV, il lui reste 3,41 eV à perdre pour revenir à son niveau d'énergie initiale. Il devra donc émettre un photon de 3,41 eV, ce qui correspond à la longueur d'onde donnée par cette formule.

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1240eVnm}{\lambda} \\
 3,41eV &= \frac{1240eVnm}{\lambda} \\
 \lambda &= 363,6nm
 \end{aligned}$$

24. Dans la boîte, on a une onde stationnaire qui est identique à une onde stationnaire dans une corde. L'amplitude de l'onde sera donc identique à celle d'une onde stationnaire sur une corde.

$$\psi = 2A \sin kx$$

Au niveau $n = 1$, la longueur d'onde est

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \frac{2L}{1} \\
 &= 2L \\
 &= 2 \cdot 10nm \\
 &= 20nm
 \end{aligned}$$

L'amplitude de l'onde est donc

$$\psi = 2A \sin kx$$

$$\psi = 2A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

$$\psi = 2A \sin\left(\frac{2\pi}{20nm} x\right)$$

Premièrement, on doit avoir

$$\int_{\text{toutes les positions possibles}} \psi^2 dx = 1$$

Comme les seules positions possibles sont entre 0 nm et 10 nm, cette équation devient

$$\int_{0nm}^{10nm} \left(2A \sin\left(\frac{2\pi}{20nm} x\right)\right)^2 dx = 1$$

Cette intégrale nous permet de trouver la valeur de A.

$$\begin{aligned} \int_{0nm}^{10nm} 4A^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{20nm} x\right) dx &= 1 \\ 4A^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{20nm}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{20nm} x\right) \right]_{0nm}^{10nm} &= 1 \\ 4A^2 \left[\frac{10nm}{2} - \frac{20nm}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{20nm} 10nm\right) \right] - A^2 \left[\frac{0nm}{2} - \frac{10nm}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{20nm} 0nm\right) \right] &= 1 \\ 4A^2 \left[\frac{10nm}{2} - \frac{20nm}{8\pi} \sin(2\pi) \right] - A^2 \left[0 - \frac{10nm}{8\pi} \sin(0) \right] &= 1 \\ 4A^2 \cdot 5nm &= 1 \\ A &= \frac{1}{2\sqrt{5nm}} \end{aligned}$$

L'amplitude de l'onde est donc

$$\psi = 2A \sin\left(\frac{2\pi}{20nm}x\right)$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{5nm}} \sin\left(\frac{2\pi}{20nm}x\right)$$

Ainsi, la probabilité de trouver la particule entre $x = 0$ nm et $x = 3$ nm est

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{0nm}^{3nm} \frac{1}{5nm} \sin^2\left(\frac{2\pi}{20nm}x\right) dx \\
 &= \frac{1}{5nm} \left[\frac{x}{2} - \frac{20nm}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{20nm}x\right) \right]_{0nm}^{3nm} \\
 &= \frac{1}{5nm} \left[\frac{3nm}{2} - \frac{20nm}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{20nm}3nm\right) \right] - \frac{1}{5nm} \left[\frac{0nm}{2} - \frac{20nm}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{20nm}0nm\right) \right] \\
 &= \frac{1}{5nm} \left[\frac{3nm}{2} - \frac{20nm}{8\pi} \sin(0,6\pi) \right] - \frac{1}{5nm} \left[0 - \frac{20nm}{8\pi} \sin(0) \right] \\
 &= \frac{1}{5nm} \left[\frac{3nm}{2} - \frac{20nm}{8\pi} \sin(1,2\pi) \right] \\
 &= \frac{3}{10} - \frac{1}{2\pi} \sin(0,6\pi) \\
 &= 0,1486
 \end{aligned}$$

La probabilité est donc de 14,86 %

25. L'équation de Schrödinger avec le potentiel $U = \frac{1}{2}kx^2$ est

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{1}{2}kx^2 \right) \psi = 0$$

Vérifions si

$$\psi = Ae^{-Bx^2}$$

est une solution. Pour le vérifier, il nous faut la deuxième dérivée de cette fonction

$$\begin{aligned}
 \frac{d\psi}{dx} &= Ae^{-Bx^2} (-2Bx) \\
 &= 2ABxe^{-Bx^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(-2ABxe^{-Bx^2}) \\ &= -2ABxe^{-Bx^2}(-2Bx) - 2ABe^{-Bx^2} \\ &= 4AB^2x^2e^{-Bx^2} - 2ABe^{-Bx^2}\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)\psi &= 0 \\ 4AB^2x^2e^{-Bx^2} - 2ABe^{-Bx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)Ae^{-Bx^2} &= 0 \\ 4B^2x^2 - 2B + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right) &= 0 \\ \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right) &= 2B - 4B^2x^2 \\ \frac{2m}{\hbar^2}E - \frac{mk}{\hbar^2}x^2 &= 2B - 4B^2x^2\end{aligned}$$

La fonction est une solution si les deux côtés sont égaux. Pour qu'ils soient égaux, il faut que les termes constants soient égaux et que les termes avec x^2 soient aussi égaux. On a donc

$$\frac{2m}{\hbar^2}E = 2B \quad \text{et} \quad \frac{mk}{\hbar^2}x^2 = 4B^2x^2$$

La deuxième équation donne

$$\begin{aligned}\frac{mk}{\hbar^2}x^2 &= 4B^2x^2 \\ \frac{mk}{4\hbar^2} &= B^2\end{aligned}$$

Si on remplace dans la première équation, on a

$$\begin{aligned}\frac{2m}{\hbar^2} E &= 2B \\ \frac{2m}{\hbar^2} E &= 2\sqrt{\frac{mk}{4\hbar^2}} \\ \frac{m}{\hbar^2} E &= \frac{\sqrt{mk}}{2\hbar} \\ E &= \frac{\sqrt{mk}}{2m} \hbar \\ E &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \hbar\end{aligned}$$

Pour une oscillation harmonique, on a

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2} \hbar \omega \\ &= \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi} 2\pi f \\ &= \frac{1}{2} hf\end{aligned}$$