Solutionnaire du chapitre 9

1. On va prendre le sens contraire des aiguilles d'une montre comme sens positif

a) Le moment de force est

$$\begin{aligned}\tau_1 &= Fr\sin\phi \\ &= 20N\cdot 0,2m\cdot\sin 105° \\ &= 3,864Nm\end{aligned}$$

b) Le moment de force est

$$\begin{aligned}\tau_2 &= Fr\sin\phi \\ &= -35N\cdot 0,3m\cdot\sin 120° \\ &= -9,093Nm\end{aligned}$$

c) Le moment de force net est

$$\begin{aligned}\tau_{net} &= \tau_1+\tau_2 \\ &= 3,864Nm+-9,093Nm \\ &= -5,229Nm\end{aligned}$$

2. On va prendre le sens contraire des aiguilles d'une montre comme sens positif.

Le moment de force fait par la force de 30 N est

$$\begin{aligned}\tau_1 &= Fr\sin\phi \\ &= 30N\cdot 2m\cdot\sin 135° \\ &= 42,43Nm\end{aligned}$$

Le moment de force fait par la force de 25 N est

$$\begin{aligned}\tau_2 &= Fr\sin\phi \\ &= 25N\cdot 0m\cdot\sin\phi \\ &= 0Nm\end{aligned}$$

Le moment de force fait par la force de 10 N est

$$\begin{aligned}\tau_3 &= Fr\sin\phi \\ &= -10N\cdot 2m\cdot \sin 160° \\ &= -6,84Nm\end{aligned}$$

Le moment de force net est

$$\begin{aligned}\tau_{net} &= \tau_1+\tau_2+\tau_3 \\ &= 42,43Nm + 0Nm + -6,84Nm \\ &= 35,59Nm\end{aligned}$$

3. On va prendre le sens des aiguilles d'une montre comme sens positif.

a) La distance entre l'axe de rotation et le centre de masse de la balle est 1,3 m. Le moment de force fait par la balle est

$$\begin{aligned}\tau_1 &= Fr\sin\phi \\ &= \left(0,750kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}\right)\cdot 1,35m\cdot \sin 150° \\ &= 4,961Nm\end{aligned}$$

b) La distance entre l'axe de rotation et le centre de masse de la tige est 0,625 m. Le moment de force fait par la tige est

$$\begin{aligned}\tau_2 &= Fr\sin\phi \\ &= \left(0,050kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}\right)\cdot 0,625m\cdot \sin 150° \\ &= 0,153Nm\end{aligned}$$

c) Le moment de force net est

$$\begin{aligned}\tau_{net} &= \tau_1+\tau_2 \\ &= 4,961Nm + 0,153Nm \\ &= 5,114Nm\end{aligned}$$

4. On va prendre le sens contraire des aiguilles d'une montre comme sens positif.

Le moment de force fait par la force de 10 N est

$$\begin{aligned}\tau_1 &= Fr\sin\phi \\ &= -10N \cdot 0{,}35m \cdot \sin 90° \\ &= -3{,}5Nm\end{aligned}$$

Le moment de force fait par la force de 9 N est

$$\begin{aligned}\tau_2 &= Fr\sin\phi \\ &= -9N \cdot 0{,}35m \cdot \sin 90° \\ &= -3{,}15Nm\end{aligned}$$

Le moment de force fait par la force de 12 N est

$$\begin{aligned}\tau_3 &= Fr\sin\phi \\ &= 12N \cdot 0{,}15m \cdot \sin 90° \\ &= 1{,}8Nm\end{aligned}$$

Le moment de force net est

$$\begin{aligned}\tau_{net} &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \\ &= -3{,}5Nm + -3{,}15Nm + 1{,}8Nm \\ &= -4{,}85Nm\end{aligned}$$

5. En prenant le sens contraire des aiguilles d'une montre comme sens positif, le moment de force fait par la force de 160 N

$$\begin{aligned}\tau_{net} &= Fr_\perp \\ &= 160N \cdot 0{,}165m \\ &= 26{,}4Nm\end{aligned}$$

6. Il y a trois forces qui s'exercent sur la tige.

1) La force faite par la corde qui soutient le bloc de 300 g. Cette force est égale au poids du bloc, donc à 2,94 N.
2) La force faite par la corde qui soutient le bloc de masse inconnue. Cette force est égale au poids du bloc, donc à P.
3) La normale faite par le pivot.

En prenant le pivot comme axe, la force normale au pivot ne fait pas de moment de force. L'équation de la somme des moments de forces sur la tige est donc

$$\sum \tau = 0$$
$$\rightarrow 2,94N \cdot 0,2m + -P \cdot 0,8m = 0$$

On trouve alors *P* avec cette équation.

$$\begin{gathered}2,94N \cdot 0,2m + -P \cdot 0,8m = 0 \\ 0,588Nm - P \cdot 0,8m = 0 \\ P \cdot 0,8m = 0,588Nm \\ P = 0,735N\end{gathered}$$

On utilise ensuite cette valeur pour trouver la masse.

$$\begin{gathered}P = mg \\ 0,735N = m.9,8\tfrac{N}{kg} \\ m = 0,075kg\end{gathered}$$

Il faut donc une masse de 75 g.

7. Il y a trois forces qui s'exercent sur la tige.

1) Le poids de la tige (0,98 N)
2) La force faite par la corde qui soutient le bloc de 300 g. Cette force est égale au poids du bloc, donc à 2,94 N.
3) La force faite par la corde qui soutient le bloc de masse inconnue. Cette force est égale au poids du bloc, donc à *P*.
4) La normale faite par le pivot.

En prenant le pivot comme axe, la force normale au pivot ne fait pas de moment de force. L'équation de la somme des moments de forces sur la tige est donc

$$\sum \tau = 0$$
$$\rightarrow -0,98N \cdot 0,3m + 2,94N \cdot 0,2m + -P \cdot 0,8m = 0$$

On trouve alors *P* avec cette équation.

$$\begin{gathered}-0,98N \cdot 0,3m + 2,94N \cdot 0,2m + -P \cdot 0,8m = 0 \\ -0,294Nm + 0,588Nm - P \cdot 0,8m = 0 \\ P \cdot 0,8m = 0,588Nm - 0,294Nm \\ P \cdot 0,8m = 0,294Nm \\ P = 0,3675N\end{gathered}$$

On utilise ensuite cette valeur pour trouver la masse.

$$P = mg$$
$$0,3675N = m.9,8\tfrac{N}{kg}$$
$$m = 0,0375kg$$

Il faut donc une masse de 37,5 g.

8. Il y a trois forces qui s'exercent sur la plaque.

1) Le poids de la plaque de 490 N.
2) La force faite par la corde.
3) Les forces *H* et *V* faites par le pivot.

En prenant le pivot comme axe, les forces *H* et *V* faites par le pivot ne font pas de moment de force.

On va calculer les moments de forces avant de faire l'équation de l'équilibre, car il y a quelques subtilités.

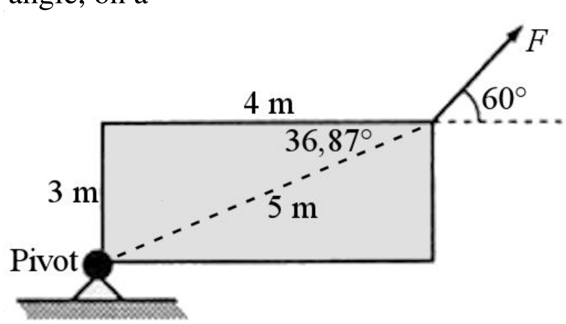
Le moment de force fait par la gravitation est

$$\begin{aligned}\tau_1 &= Fr_\perp \\ &= -490N \cdot 2m \\ &= -980Nm\end{aligned}$$

Le moment de force fait par la corde est

$$\tau_2 = Fr\sin\phi$$

Pour la distance et l'angle, on a



Le moment de force fait par la corde est don

$$\begin{aligned}\tau_2 &= Fr\sin\phi \\ &= F\cdot 5m\cdot\sin 156{,}87° \\ &= F\cdot 1{,}964m\end{aligned}$$

L'équation de la somme des moments de forces sur la tige est donc

$$\sum\tau = 0$$
$$\to -980Nm + F\cdot 1{,}964m = 0$$

On trouve alors *F* avec cette équation.

$$\begin{aligned}-980Nm + F\cdot 1{,}964m &= 0 \\ F\cdot 1{,}964m &= 980Nm \\ F &= 499N\end{aligned}$$

9. Il y a trois forces qui s'exercent sur la tige.

1) La force faite par la corde qui soutient le plateau de 50 g et le poisson de 800 g. Cette force est égale au poids du plateau et du poisson, donc à 8,33 N.
2) La force faite par la corde qui soutient le peson de 250 g. Cette force est égale au poids du bloc, donc à 2,45 N.
3) La force faite par la corde au pivot.

En prenant le pivot comme axe, la force faite par la corde au pivot ne fait pas de moment de force. L'équation de la somme des moments de forces sur la tige est donc

$$\sum\tau = 0$$
$$\to -8{,}33N\cdot 0{,}07m + 2{,}45N\cdot x = 0$$

On trouve alors *x* avec cette équation.

$$\begin{aligned}-8{,}33N\cdot 0{,}07m + 2{,}45N\cdot x &= 0 \\ -0{,}5831Nm + 2{,}45N\cdot x &= 0 \\ 2{,}45N\cdot x &= 0{,}5831Nm \\ x &= 0{,}238m\end{aligned}$$

10. On va prendre l'axe de la roue de la brouette comme axe et une direction positive dans le sens opposé au sens des aiguilles d'une montre.

a) Le moment de force fait par le poids de la brouette est

$$\begin{aligned}\tau_{brouette} &= Fr_{\perp} \\ &= \left(4kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\right) \cdot 0{,}2m \\ &= 7{,}84Nm\end{aligned}$$

b) Le moment de force fait par le poids du chargement est

$$\begin{aligned}\tau_{chargement} &= Fr_{\perp} \\ &= \left(50kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\right) \cdot 0{,}3m \\ &= 147Nm\end{aligned}$$

c) À l'équilibre, la somme des moments de force est nulle. Comme les moments de force faits par les forces H et V à l'axe ne font pas de moment de force, on doit avoir

$$\begin{aligned}&\sum \tau = 0 \\ &\to \tau_{brouette} + \tau_{chargement} + \tau_F = 0\end{aligned}$$

Cela nous donne

$$\begin{aligned}\tau_{brouette} + \tau_{chargement} + \tau_F &= 0 \\ 7{,}84Nm + 147Nm + \tau_F &= 0 \\ \tau_F &= -7{,}84Nm - 147Nm \\ \tau_F &= -154{,}84Nm\end{aligned}$$

d) Le moment de force fait par les forces F est

$$\begin{aligned}\tau_F &= Fr_{\perp} \\ &= -(2F) \cdot 1{,}2m\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}-154{,}84Nm &= -(2F) \cdot 1{,}2m \\ F &= 64{,}52N\end{aligned}$$

11. Il y a quatre forces qui s'exercent sur la poutre.

1) Le poids de la poutre (196 N)
2) La force de 200 N.
3) La force de 250 N.
4) La force de 300 N.

En prenant le pivot comme axe, les forces H et V faites par le pivot ne font pas de moment de force. L'équation de la somme des moments de forces sur la poutre est donc

$$\sum \tau = 0$$
$$196N \cdot 1,4m \cdot \sin 90° + 200N \cdot 1m \cdot \sin 50° + 250N \cdot 1,5m \cdot \sin 150° + -300N \cdot x \cdot \sin 90° = 0$$

On trouve alors x avec cette équation.

$$196N \cdot 1,4m \cdot \sin 90° + 200N \cdot 1m \cdot \sin 50° + 250N \cdot 1,5m \cdot \sin 150° + -300N \cdot x \cdot \sin 90° = 0$$
$$274,4Nm + 153,21Nm + 187,5Nm + -300N \cdot x = 0$$
$$615,11Nm + -300N \cdot x = 0$$
$$300N \cdot x = 615,11Nm$$
$$x = 2,05m$$

12. Il y a trois forces qui s'exercent sur la planche.

1) La force faite par la corde qui soutient la masse de 125 kg. Cette force est égale au poids de la masse, donc à 1225 N.
2) La force faite par la corde qui soutient la masse de 275 kg. Cette force est égale au poids de la masse, donc à 2695 N.
3) La force normale faite par pivot.

En prenant le pivot comme axe, la normale faite par le pivot ne fait pas de moment de force. L'équation de la somme des moments de forces sur la planche est donc

$$\sum \tau = 0$$
$$\rightarrow 1225N \cdot x \cdot \sin 90° + -2695N \cdot (4m - x) \cdot \sin 90° = 0$$

On trouve alors x avec cette équation.

$$1225N \cdot x \cdot \sin 90° + -2695N \cdot (4m - x) \cdot \sin 90° = 0$$
$$1225N \cdot x + -2695N \cdot (4m - x) = 0$$
$$1225N \cdot x - 10\,780Nm + 2695N \cdot x = 0$$
$$3920N \cdot x - 10\,780Nm = 0$$
$$3920N \cdot x = 10\,780Nm$$
$$x = 2,75m$$

13. S'il y a équilibre de rotation, alors la somme des moments de force est nulle.

$$\sum \tau = 0$$

Il y a 3 forces sur l'avion.

1- Le poids (*P*).
2- La portance faite par les ailes (F_L)
3- La portance faite par la gouverne de direction (F_{LG})

Le poids de l'avion est

$$\begin{aligned} P &= 15\,000kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \\ &= 147\,000N \end{aligned}$$

Le moment de force fait par le poids est

$$\begin{aligned} \tau_1 &= F_1 r_{1\perp} \\ &= 147\,000N \cdot 1m \\ &= 147\,000Nm \end{aligned}$$

Le moment de force fait par la portance des ailes est nul puisque le point d'application de la force est directement sur l'axe de rotation.

On va prendre un sens positif dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Le moment de force fait par la portance de la gouverne de profondeur est

$$\begin{aligned} \tau_3 &= F_3 r_{3\perp} \\ &= -F_{LG} \cdot 5m \end{aligned}$$

À l'équilibre, la somme des moments de force doit être nulle. On doit donc avoir que

$$\sum \tau = 0$$
$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$
$$147\,000Nm + 0Nm - F_{LG} \cdot 5m = 0$$

Il ne reste qu'à isoler F_{LG}.

$$147\,000Nm - F_{LG} \cdot 5m = 0$$
$$147\,000Nm = F_{LG} \cdot 5m$$
$$F_{LG} = \frac{147\,000Nm}{5m}$$
$$F_{LG} = 29\,400N$$

Pour trouver la portance faite par les ailes, on fait la somme des forces verticales.

$$F_L - mg - F_{LG} = 0$$
$$F_L - 147\,000N + 29\,400N = 0$$
$$F_L = 117\,600N$$

La gouverne fait donc une force de 29 400 N vers le haut et les ailes font une force de 117 600 N vers le haut (les 2 forces ensemble font une force de 196 000 N pour soutenir le poids de l'avion.)

14. S'il y a équilibre de rotation, alors la somme des moments de force est nulle.

$$\sum \tau = 0$$

Il y a 3 forces sur l'avion.

1- Le poids ($220\,000kg \cdot 9{,}8\frac{N}{kg} = 2\,156\,000N$).
2- La normale faite par le train avant (F_{N1}).
3- La normale faite par le train arrière (F_{N2}).

On va prendre le train avant comme axe de rotation. On va prendre un sens positif dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Le moment de force fait par le poids de l'avion est

$$\begin{aligned}\tau_1 &= Fr_{1\perp}\\ &= -2\,156\,000N \cdot 20{,}1m\\ &= -43\,335\,600Nm\end{aligned}$$

Le moment de force fait par F_{N1} est nul puisque cette force s'applique sur l'axe.

$$\tau_2 = 0Nm$$

Le moment de force fait par F_{N2} est

$$\begin{aligned}\tau_3 &= F_3 r_3 \sin\theta_3 \\ &= F_{N2} \cdot 22{,}18m \cdot \sin 90° \\ &= F_{N2} \cdot 22{,}18m\end{aligned}$$

À l'équilibre, la somme des moments de force doit être nulle. On doit donc avoir que

$$\begin{gathered}\sum \tau = 0 \\ \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \\ -43\,335\,600Nm + 0Nm + F_{N2} \cdot 22{,}18m = 0\end{gathered}$$

Cette équation nous permet de trouver F_{N2}.

$$\begin{gathered}-43\,335\,600Nm + 0Nm + F_{N2} \cdot 22{,}18m = 0 \\ F_{N2} \cdot 22{,}18m = 43\,335\,600Nm \\ F_{N2} = 1\,953\,814N\end{gathered}$$

On a F_{N2}, mais on n'a pas F_{N1}. On trouve cette normale avec la somme des forces en y.

$$\sum F_y = -2\,156\,000N + F_{N1} + F_{N2} = 0$$

On a alors

$$\begin{gathered}-2\,156\,000N + F_{N1} + F_{N2} = 0 \\ -2\,156\,000N + F_{N1} + 1\,953\,814N = 0 \\ F_{N1} - 202\,186N = 0 \\ F_{N1} = 202\,186N\end{gathered}$$

Comme le train avant supporte 202 186 N des 2 156 000 N du poids, le train avant supporte 9,4 % du poids de l'avion.

Comme le train arrière supporte 1 953 814 N des 2 156 000 N du poids, le train arrière supporte 90,6 % du poids de l'avion.

15. S'il y a équilibre de rotation, alors la somme des moments de force est nulle.

$$\sum \tau = 0$$

Il y a 4 forces sur l'avion.

1- Le poids ($220\,000kg \cdot 9,8\frac{N}{kg} = 2\,156\,000N$).
2- La normale faite par le train avant (F_{N1}).
3- La normale faite par le train arrière (F_{N2}).
4- La poussée des moteurs (F_T = 550 000 N).

On doit prendre le centre de masse comme axe de rotation.

Le moment de force fait par le poids de l'avion est nul puisque cette force s'applique sur l'axe.

$$\tau_1 = 0$$

Le moment de force fait par F_{N1} est

$$\begin{aligned}\tau_2 &= F_2 r_{2\perp} \\ &= -F_{N1} \cdot 20,10m\end{aligned}$$

Le moment de force fait par F_{N2} est

$$\begin{aligned}\tau_3 &= F_3 r_{3\perp} \\ &= F_{N2} \cdot 2,08m\end{aligned}$$

Le moment de force fait par la poussée est

$$\begin{aligned}\tau_4 &= F_4 r_{4\perp} \\ &= -550\,000N \cdot 2,04m \\ &= -1122\,000Nm\end{aligned}$$

À l'équilibre, la somme des moments de force doit être nulle. On doit donc avoir que

$$\begin{gathered}\sum \tau = 0 \\ \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = 0 \\ 0Nm - F_{N1} \cdot 20,10m + F_{N2} \cdot 2,08m - 1122\,000Nm = 0 \\ -F_{N1} \cdot 20,10m + F_{N2} \cdot 2,08m = 1122\,000Nm\end{gathered}$$

Cette équation ne permet pas de trouver les normales et il nous faut une autre équation. Cette 2e équation est la somme des forces en *y*.

$$\sum F_y = -2\,156\,000N + F_{N1} + F_{N2} = 0$$

On a donc les deux équations suivantes.

$$-F_{N1} \cdot 20{,}10m + F_{N2} \cdot 2{,}08m = 1\,122\,000Nm$$
$$F_{N1} + F_{N2} = 2\,156\,000N$$

Si on isole F_{N2} dans la 2[e] équation

$$F_{N2} = 2\,156\,000N - F_{N1}$$

et qu'on remplace dans la 1[re] équation, on a

$$-F_{N1} \cdot 20{,}10m + \left(2\,156\,000N - F_{N1}\right) \cdot 2{,}08m = 1\,122\,000Nm$$
$$-F_{N1} \cdot 20{,}10m + 4\,484\,480Nm - F_{N1} \cdot 2{,}08m = 1\,122\,000Nm$$
$$-F_{N1} \cdot 22{,}18m = -3\,362\,480Nm$$
$$F_{N1} = 151\,600N$$

On peut ensuite trouver F_{N2}.

$$-2\,156\,000N + F_{N1} + F_{N2} = 0$$
$$-2\,156\,000N + 151\,600N + F_{N2} = 0$$
$$F_{N2} - 2\,004\,400N = 0$$
$$F_{N2} = 2\,004\,400N$$

Comme le train avant supporte 151 600 N des 2 156 000 N du poids, le train avant supporte 7,0 % du poids de l'avion.

Comme le train arrière supporte 2 004 400 N des 2 156 000 N du poids, le train arrière supporte 93,0 % du poids de l'avion.

16. a) S'il y a équilibre de rotation, alors la somme des moments de force est nulle.

$$\sum \tau = 0$$

Il y a 5 forces sur l'avion.

1- Le poids ($220\,000kg \cdot 9{,}8\frac{N}{kg} = 2\,156\,000N$).
2- La normale faite par le train avant (F_{N1}).
3- La normale faite par le train arrière (F_{N2}).
4- La force faite par les inverseurs de poussée (F_T = 80 000 N).

5- La force de freinage (F_f = 340 000 N).

On doit prendre le centre de masse comme axe de rotation.

Le moment de force fait par le poids de l'avion est nul puisque cette force s'applique sur l'axe.

$$\tau_1 = 0$$

Le moment de force fait par F_{N1} est

$$\begin{aligned}\tau_2 &= F_2 r_{2\perp} \\ &= -F_{N1} \cdot 20{,}10m\end{aligned}$$

Le moment de force fait par F_{N2} est

$$\begin{aligned}\tau_3 &= F_3 r_{3\perp} \\ &= F_{N2} \cdot 2{,}08m\end{aligned}$$

Le moment de force faite par les inverseurs de poussée est

$$\begin{aligned}\tau_4 &= F_4 r_{4\perp} \\ &= 80\,000N \cdot 2{,}04m \\ &= 163\,200Nm\end{aligned}$$

Le moment de force fait par la force de freinage est

$$\begin{aligned}\tau_4 &= F_4 r_{4\perp} \\ &= 340\,000N \cdot 4{,}27m \\ &= 1\,451\,800Nm\end{aligned}$$

À l'équilibre, la somme des moments de force doit être nulle. On doit donc avoir que

$$\begin{gathered}\sum \tau = 0 \\ \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 + \tau_5 = 0 \\ 0Nm - F_{N1} \cdot 20{,}10m + F_{N2} \cdot 2{,}08m + 163\,200Nm + 1\,451\,800Nm = 0 \\ -F_{N1} \cdot 20{,}10m + F_{N2} \cdot 2{,}08m = -1\,615\,000Nm\end{gathered}$$

Cette équation ne permet pas de trouver les normales et il nous faut une autre équation. Cette 2[e] équation est la somme des forces en y.

$$\sum F_y = -2\,156\,000N + F_{N1} + F_{N2} = 0$$

On a donc les deux équations suivantes.

$$-F_{N1} \cdot 20{,}10m + F_{N2} \cdot 2{,}08m = -1\,615\,000Nm$$
$$F_{N1} + F_{N2} = 2\,156\,000N$$

Si on isole F_{N2} dans la 2e équation

$$F_{N2} = 2\,156\,000N - F_{N1}$$

et qu'on remplace dans la 1re équation, on a

$$-F_{N1} \cdot 20{,}10m + \left(2\,156\,000N - F_{N1}\right) \cdot 2{,}08m = -1\,615\,000Nm$$
$$-F_{N1} \cdot 20{,}10m + 4\,484\,480Nm - F_{N1} \cdot 2{,}08m = -1\,615\,000Nm$$
$$-F_{N1} \cdot 22{,}18m = -6\,099\,480Nm$$
$$F_{N1} = 274\,999N$$

On peut ensuite trouver F_{N2}.

$$-2\,156\,000N + F_{N1} + F_{N2} = 0$$
$$-2\,156\,000N + 274\,999N + F_{N2} = 0$$
$$F_{N2} - 1\,881\,001N = 0$$
$$F_{N2} = 1\,881\,001N$$

Comme le train avant supporte 274 999 N des 2 156 000 N du poids, le train avant supporte 12,8 % du poids de l'avion.

Comme le train arrière supporte 1 881 001 N des 2 156 000 N du poids, le train arrière supporte 87,2 % du poids de l'avion.

b) La force de freinage maximale est

$$\begin{aligned} F_{\max} &= \mu_s F_{N2} \\ &= 0{,}9 \cdot 1\,881\,001N \\ &= 1\,692\,901N \end{aligned}$$

(On prend uniquement la normale qui s'exerce sur le train arrière.)

Le rapport de la force de freinage sur la force de freinage maximum est

$$\frac{340\,000N}{1\,692\,901N}=0,201$$

On freine donc à 20,1 % du freinage maximum.

17. a) S'il y a équilibre de rotation, alors la somme des moments de force est nulle.

$$\sum\tau=0$$

Il y a 7 forces sur l'avion.

1- Le poids ($220\,000kg\cdot 9,8\frac{N}{kg}=2\,156\,000N$).
2- La normale faite par le train avant (F_{N1}).
3- La normale faite par le train arrière (F_{N2}).
4- La force faite par les inverseurs de poussée (F_T = 80 000 N).
5- La force de freinage (F_f = 340 000 N).
6- La portance
7- La trainée

On doit prendre le centre de masse comme axe de rotation.

Le moment de force fait par le poids de l'avion est nul puisque cette force s'applique sur l'axe.

$$\tau_1=0$$

Le moment de force fait par F_{N1} est

$$\begin{aligned}\tau_2&=F_2r_{2\perp}\\&=-F_{N1}\cdot 20{,}10m\end{aligned}$$

Le moment de force fait par F_{N2} est

$$\begin{aligned}\tau_3&=F_3r_{3\perp}\\&=F_{N2}\cdot 2{,}08m\end{aligned}$$

Le moment de force faite par les inverseurs de poussée est

$$\begin{aligned}\tau_4 &= F_4 r_{4\perp}\\ &= 80\,000N \cdot 2{,}04m\\ &= 163\,200Nm\end{aligned}$$

Le moment de force fait par la force de freinage est

$$\begin{aligned}\tau_4 &= F_4 r_{4\perp}\\ &= 340\,000N \cdot 4{,}27m\\ &= 1\,451\,800Nm\end{aligned}$$

La trainée et la portance ne font pas de moment de force.

À l'équilibre, la somme des moments de force doit être nulle. On doit donc avoir que

$$\sum \tau = 0$$
$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 + \tau_5 + \tau_6 + \tau_7 = 0$$
$$0Nm - F_{N1} \cdot 20{,}10m + F_{N2} \cdot 2{,}08m + 163\,200Nm + 1\,451\,800Nm + 0Nm + 0Nm = 0$$
$$-F_{N1} \cdot 20{,}10m + F_{N2} \cdot 2{,}08m = -1\,615\,000Nm$$

Cette équation ne permet pas de trouver les normales et il nous faut une autre équation. Cette 2^e^ équation est la somme des forces en y.

$$\sum F_y = -2\,156\,000N + F_{N1} + F_{N2} + F_L = 0$$

Comme la portance est

$$\begin{aligned}F_L &= \frac{1}{2} C_L \rho A v^2\\ &= \frac{1}{2} \cdot 0{,}7 \cdot 1{,}155 \tfrac{kg}{m^3} \cdot 361{,}6m^2 \cdot \left(72{,}1\tfrac{m}{s}\right)^2\\ &= 759\,887N\end{aligned}$$

on arrive à

$$-2\,156\,000N + F_{N1} + F_{N2} + 759\,887N = 0$$
$$F_{N1} + F_{N2} = 1\,396\,113N$$

On a donc les deux équations suivantes.

$$-F_{N1} \cdot 20{,}10m + F_{N2} \cdot 2{,}08m = -1\,615\,000Nm$$
$$F_{N1} + F_{N2} = 1\,396\,113N$$

Si on isole F_{N2} dans la 2[e] équation

$$F_{N2} = 1\,396\,113N - F_{N1}$$

et qu'on remplace dans la 1[re] équation, on a

$$-F_{N1} \cdot 20{,}10m + \left(1\,396\,113N - F_{N1}\right) \cdot 2{,}08m = -1\,615\,000Nm$$
$$-F_{N1} \cdot 20{,}10m + 2\,903\,915Nm - F_{N1} \cdot 2{,}08m = -1\,615\,000Nm$$
$$-F_{N1} \cdot 22{,}18m = -4\,518\,915Nm$$
$$F_{N1} = 203\,738N$$

On peut ensuite trouver F_{N2}.

$$F_{N1} + F_{N2} = 1\,392\,824N$$
$$203\,430N + F_{N2} = 1\,396\,113N$$
$$F_{N2} = 1\,396\,113N - 203\,738N$$
$$F_{N2} = 1\,192\,375N$$

Comme la portance supporte 759 887 N des 2 156 000 N du poids, la portance supporte 35,2 % du poids de l'avion.

Comme le train avant supporte 203 738 N des 2 156 000 N du poids, le train avant supporte 9,4 % du poids de l'avion.

Comme le train arrière supporte 1 192 375 N des 2 156 000 N du poids, le train arrière supporte 55,3 % du poids de l'avion.

b) La force de freinage maximale est

$$\begin{aligned} F_{\max} &= \mu_s F_{N2} \\ &= 0{,}9 \cdot 1\,192\,375N \\ &= 1\,073\,138N \end{aligned}$$

(On prend uniquement la normale qui s'exerce sur le train arrière.)

Le rapport de la force de freinage sur la force de freinage maximum est

$$\frac{340\,000N}{1\,073\,138N} = 0,317$$

On freine donc à 31,7 % du freinage maximum.

18. La position de centre de masse en x est

$$\begin{aligned} x_{cg} &= \frac{1}{m}\sum xm \\ &= \frac{1}{m}\left(x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3\right) \\ &= \frac{1}{10kg}\left(0,5\cdot 3kg + 3,5m\cdot 3kg + 2m\cdot 4kg\right) \\ &= \frac{20kgm}{10kg} \\ &= 2m \end{aligned}$$

La position de centre de masse en y est

$$\begin{aligned} y_{cg} &= \frac{1}{m}\sum ym \\ &= \frac{1}{m}\left(y_1m_1 + y_2m_2 + y_3m_3\right) \\ &= \frac{1}{10kg}\left(2,5m\cdot 3kg + 2,5m\cdot 3kg + 0,5m\cdot 4kg\right) \\ &= \frac{17kgm}{10kg} \\ &= 1,7m \end{aligned}$$

Le centre de masse est donc à la position (2 m, 1,7 m).

19. Nous avons les trois masses suivantes.

1) Une masse de 3 kg à (0,0).
2) Une masse de 2 kg à (10 m, 0 m).
3) Une masse de 1 kg à (5 m, 8,66 m).

(Cette dernière position est y_3 = 10 m sin (60°)).

La position de centre de masse en x est

$$\begin{aligned} x_{cg} &= \frac{1}{m}\sum xm \\ &= \frac{1}{m}\left(x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3\right) \\ &= \frac{1}{6kg}\left(0\cdot 3kg + 10m\cdot 2kg + 5m\cdot 1kg\right) \\ &= \frac{25kgm}{6kg} \\ &= 4,17m \end{aligned}$$

La position de centre de masse en y est

$$\begin{aligned} y_{cg} &= \frac{1}{m}\sum ym \\ &= \frac{1}{m}\left(y_1m_1 + y_2m_2 + y_3m_3\right) \\ &= \frac{1}{6kg}\left(0m\cdot 3kg + 0m\cdot 3kg + 8,66m\cdot 1kg\right) \\ &= \frac{8,66kgm}{6kg} \\ &= 1,44m \end{aligned}$$

Le centre de masse est donc à la position (4,17 m, 1,44 m).

20. La position de centre de masse en x est

$$x_{cg} = \frac{1}{m}\sum xm$$

$$x_{cg} = \frac{1}{m}\left(x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + x_4m_4\right)$$

$$4\text{m} = \frac{1}{7\text{kg} + m_4}\left(1\text{m}\cdot 1\text{kg} + 3\text{m}\cdot 4\text{kg} + 6\text{m}\cdot 2\text{kg} + 10\text{m}\cdot m_4\right)$$

$$4\text{m} = \frac{1}{7\text{kg} + m_4}\left(25\text{kgm} + 10\text{m}\cdot m_4\right)$$

Il ne reste qu'à isoler m_4.

$$4\text{m} = \frac{1}{7kg + m_4}\left(25\text{kgm} + 10\text{m} \cdot m_4\right)$$
$$4\text{m} \cdot \left(7kg + m_4\right) = 25\text{kgm} + 10\text{m} \cdot m_4$$
$$28\text{kgm} + 4\text{m} \cdot m_4 = 25\text{kgm} + 10\text{m} \cdot m_4$$
$$3\text{kgm} = 6\text{m} \cdot m_4$$
$$m_4 = 0,5\text{kg}$$

21. On remplace chacune des tiges par une masse située au centre de la tige. On a donc les masses suivantes (on prend un axe des *x* dont l'origine est au bout de gauche de la poutre).

1) Une masse de 30 kg à $x = 1$ m.
2) Une masse de 20 kg à $x = 3$ m.
3) Une masse de 10 kg à $x = 5$ m.

Le centre de masse est donc à

$$\begin{aligned} x_{cg} &= \frac{1}{m}\sum xm \\ &= \frac{1}{m}\left(x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3\right) \\ &= \frac{1}{60kg}\left(1m \cdot 30kg + 3m \cdot 20kg + 5m \cdot 10kg\right) \\ &= \frac{140kgm}{60kg} \\ &= 2,333m \end{aligned}$$

22. On remplace chacune des tiges par une masse située au centre de la tige. La masse de ces tiges est proportionnelle à la longueur de la tige. La longueur des tiges est

Tige 1 (tige horizontale) : $m_1 = \lambda \cdot longueur = 3\frac{kg}{m} \cdot 0,3\ m = 0,9kg$

Tige 2 (tige inclinée de gauche) : $m_2 = \lambda \cdot longueur = 3\frac{kg}{m} \cdot \sqrt{0,05\ m^2} = 0,67082kg$

Tige 3 (tige inclinée de droite) : $m_3 = \lambda \cdot longueur = 3\frac{kg}{m} \cdot \sqrt{0,08\ m^2} = 0,84853kg$.

On a donc les masses suivantes.

1) La masse de 0,9 kg à (15 cm, 0 cm).
2) La masse de 0,67082 kg à (5 cm, 10 cm).

3) La masse de 0,84853 kg à (20 cm, 10 cm).

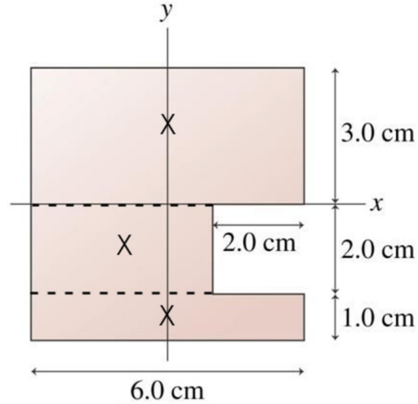
Le centre de masse en *x* est donc à

$$\begin{aligned}
x_{cg} &= \frac{1}{m}\sum xm \\
&= \frac{1}{m}\left(x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3\right) \\
&= \frac{0,15m\cdot 0,9kg + 0,05m\cdot 0,67082kg + 0,20m\cdot 0,84853kg}{0,9kg + 0,67082kg + 0,84853kg} \\
&= \frac{0,338247kgm}{2,41959kg} \\
&= 0,1398m
\end{aligned}$$

et le centre de masse en *y* est à

$$\begin{aligned}
y_{cg} &= \frac{1}{m}\sum ym \\
&= \frac{1}{m}\left(y_1m_1 + y_2m_2 + y_3m_3\right) \\
&= \frac{0m\cdot 0,9kg + 0,1m\cdot 0,67082kg + 0,1m\cdot 0,84853kg}{0,9kg + 0,67082kg + 0,84853kg} \\
&= \frac{0,151935kgm}{2,41959kg} \\
&= 0,0628m
\end{aligned}$$

23. On sépare la plaque en trois plaques rectangulaires (notez qu'il y a plusieurs façons de la faire) et on remplace chacune de ces plaques par une masse située au centre de la plaque. La masse de ces plaques est proportionnelle à la surface de la plaque. La surface des trois plaques est



Plaque 1 (celle du haut) : $m_1 = \sigma \cdot aire = 100\frac{kg}{m^2} \cdot (0,06m \cdot 0,03m) = 0,18kg$
Plaque 2 (celle du milieu) : $m_2 = \sigma \cdot aire = 100\frac{kg}{m^2} \cdot (0,04m \cdot 0,02m) = 0,08kg$
Plaque 3 (celle du bas) : $m_3 = \sigma \cdot aire = 100\frac{kg}{m^2} \cdot (0,06m \cdot 0,01m) = 0,06kg$

On a donc les masses suivantes :

1) La masse de 0,18 kg à (0 cm, 1,5 cm).
2) La masse de 0,08 kg à (-1 cm, -1 cm).
3) La masse 0,06 kg à (0 cm, -2,5 cm).

Le centre de masse en *x* est donc à

$$\begin{aligned}
x_{cg} &= \frac{1}{m}\sum xm \\
&= \frac{1}{m}\left(x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3\right) \\
&= \frac{0m \cdot 0,18kg + -0,01m \cdot 0,08kg + 0m \cdot 0,06kg}{0,18kg + 0,08kg + 0,06kg} \\
&= \frac{-0,0008kgm}{0,32kg} \\
&= -0,0025m \\
&= -0,25cm
\end{aligned}$$

et le centre de masse en *y* est à

$$\begin{aligned}
y_{cg} &= \frac{1}{m}\sum ym \\
&= \frac{1}{m}\left(y_1m_1 + y_2m_2 + y_3m_3\right) \\
&= \frac{0,015m \cdot 0,18kg + -0,01m \cdot 0,08kg + -0,025m \cdot 0,06kg}{0,18kg + 0,08kg + 0,06kg} \\
&= \frac{0,0004kgm}{0,32kg} \\
&= 0,00125m \\
&= 0,125cm
\end{aligned}$$

24. On sépare la plaque en deux plaques. Il y a une plaque carrée et une plaque triangulaire. On remplace ensuite chacune de ces plaques par une masse située au centre de la plaque.

La plaque triangulaire a une hauteur de 0,2 m tan(60°) = $\frac{\sqrt{3}}{5}$ m = 0,34641 m.

La masse de ces plaques est proportionnelle à la surface de la plaque. Les surfaces des plaques sont

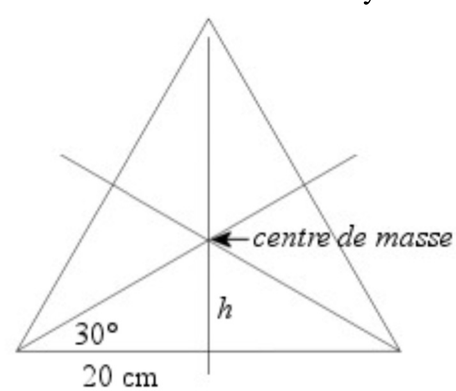
Plaque 1 (carré) : $m_1 = \sigma \cdot aire = 60\frac{kg}{m^2} \cdot (0,4m \cdot 0,4m) = 9,6kg$

Plaque 1 (triangle) : $m_2 = \sigma \cdot aire = 60\frac{kg}{m^2} \cdot \frac{1}{2}\left(0,4m \cdot \frac{\sqrt{3}}{5}m\right) = 4,157kg$

On va prendre un système d'axe dont l'origine est dans le coin inférieur gauche de la plaque carrée.

Inutile de faire de longs calculs pour trouver la position du centre de masse en *x* puisqu'il y a un axe de symétrie vertical à *x* = 20 cm. Le centre de masse en *x* doit donc être à *x* = 20 cm. Il faudra cependant faire un peu plus de calcul pour la position du centre de masse en *y*.

On remplace le triangle par une masse se situant au croisement des axes de symétrie du triangle.



La hauteur de ce centre de masse par rapport à la base de triangle est

$$h = 20cm \cdot \tan(30°) = 11,547cm$$

(ce qui est le tiers de la hauteur du triangle).

Une fois que les plaques sont remplacées par des masses ponctuelles, on a les masses suivantes.

1) Une masse de 9,6 kg à (20 cm, 20 cm).
2) Une masse de 4,157 kg à (20 cm, 51,547 cm).

Le centre de masse en *y* est donc à

$$\begin{aligned} y_{cg} &= \frac{1}{m}\sum ym \\ &= \frac{1}{m}(y_1 m_1 + y_2 m_2) \\ &= \frac{20cm \cdot 9,6kg + 51,547cm \cdot 4,157kg}{9,6kg + 4,157kg} \\ &= 29,53cm \end{aligned}$$

Le centre de masse est donc à (20 cm, 29,53 cm) avec nos axes.

25. a) La masse totale est

$$\begin{aligned} m &= 1136lbs + 300lbs + 90lbs \_ 50lbs + 50lbs \\ &= 1626lbs \end{aligned}$$

Tout va bien, la masse maximale n'est pas dépassée.

b) La position en x du centre de masse est donnée par

$$x_{cg} = \frac{1}{m}\sum x_i m_i$$

Pour trouver la masse totale et la somme des xm, on peut utiliser une table comme celle-ci.

	m (lbs)	x (po)	xm (lbs·po)
Avion	1136	34	38 624
Passagers avant	300	39	11 700
Carburant	90	40	3 600
Zone bagage 1	50	64	3 200
Zone bagage 2	50	84	4 200
Total	1626		61 324

La position du centre de masse est donc

$$\begin{aligned} x_{cg} &= \frac{\sum x_i m_i}{m} \\ &= \frac{61\,324}{1626} \\ &= 37,71po \end{aligned}$$

c) Comme la limite est à 36,5 pouces, le centre de masse est trop vers l'arrière (1,21 pouce trop vers l'arrière).

26. a) Le poids de l'avion est égal à la somme des valeurs indiquées par les balances, soit

$$436lbs + 449lbs + 56lbs = 941lbs$$

ce qui est 426,8 kg.

b) Il y a 3 forces sur l'avion.

1- Le poids ($426,8kg \cdot 9,8\frac{N}{kg} = 4183N$).
2- La normale faite par le train avant ($F_{N1} =$ $401,4kg \cdot 9,8\frac{N}{kg} = 3934N$).
3- La normale faite par le train arrière ($F_{N2} =$ $25,4kg \cdot 9,8\frac{N}{kg} = 249N$).

On va prendre le train avant comme axe de rotation.

Le moment de force fait par le poids est

$$\begin{aligned}\tau_1 &= F_1 r_{1\perp} \\ &= 4183N \cdot x\end{aligned}$$

Le moment de force fait par le train avant est nul puisque la force est appliquée à l'axe de rotation.

$$\tau_2 = 0$$

Le moment de force fait par le train arrière (à 179,25 pouces du train avant) est

$$\begin{aligned}\tau_3 &= F_3 r_{3\perp} \\ &= -249N \cdot 4,553m \\ &= -1134Nm\end{aligned}$$

À l'équilibre, la somme des moments de force doit être nulle. On doit donc avoir que

$$\sum \tau = 0$$
$$4183N \cdot x + 0Nm + -1134Nm = 0$$

Il ne reste qu'à isoler x.

$$4183N \cdot x = 1134Nm$$
$$x = 0,271m$$

Le centre de masse est donc à 27,1 cm du train avant. Comme le train avant est à 8,3 cm (3,25 pouces) du datum, le centre de masse est à 35,4 cm du datum (13,9 pouces).

c) La position en x du centre de masse est donnée par

$$x_{cg} = \frac{1}{m}\sum x_i m_i$$

Pour trouver la masse totale et la somme des *xm*, on peut utiliser une table comme celle-ci.

	m (lbs)	*x* (po)	*xm* (lbs·po)
Avion et carburant	941	13,9	13 080
Passagers avant	350	23	8 050
Bagage	60	43	2 580
Total	1351		23 710

La position du centre de masse est donc

$$\begin{aligned} x_{cg} &= \frac{\sum x_i m_i}{m} \\ &= \frac{23\,710}{1351} \\ &= 17{,}5\,po \end{aligned}$$

(Tout va bien, car le centre de masse de cet avion doit être entre 11 et 20 pouces du datum.)

27. On doit déplacer le centre de masse de 1 pouce vers l'avant. On a donc

$$\Delta x_{cg} = -1\,po$$

(C'est négatif quand on déplace vers l'avant et positif quand on déplace vers l'arrière.) Sachant cela, on a

$$\begin{aligned} \Delta x_{cg} &= \frac{m_A}{m}\Delta x_A \\ -1\,po &= \frac{410\,lbs}{1350\,lbs}\Delta x_A \\ \Delta x_A &= -3{,}3\,po \end{aligned}$$

Ils doivent avancer le siège de 3,3 pouces au moins.

28. a)

Avec une moyenne de 195 livres par passager, la masse des passagers de première classe dans le compartiment avant est 6 825 livres et la masse des passagers dans la classe économie est 44 850 livres.

À 6,7 livres par gallons, la masse de carburant dans les réservoirs 1 et 2 (dans les ailes) est de 71 000 livres (pour chaque réservoir) et la masse de carburant dans le réservoir central est 183 180 livres.

On a donc

	m (lbs)	*x* (po)	*xm*/1000
Avion vide	304 500	1243	378 494
Passagers 1re classe	6 825	557	3 802
Passagers économie	44 850	1400	62 790
Soute avant	50 000	703	35 150
Soute arrière	35 000	1662	58 170
Soute vrac	8 000	1965	15 720
Réservoir de carburant 1	53 600	1285	68 876
Réservoir de carburant 2	53 600	1285	68 876
Réservoir de carburant central	146 060	1149	167 823
Réservoir d'eau 1	1918	2090	4 009
Réservoir d'eau 2	959	2081	1 996
Total	705 312		865 706

La position du centre de masse est donc

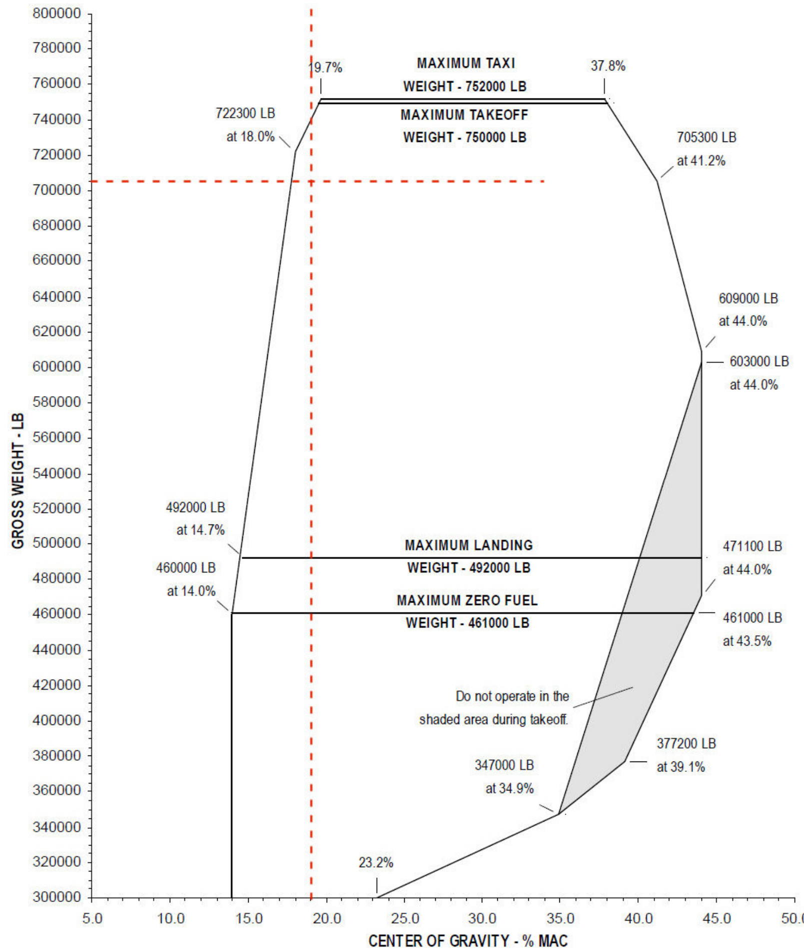
$$\begin{aligned} x_{cg} &= \frac{\sum xm}{m} \\ &= \frac{865\,706\,000}{705\,312} \\ &= 1227,4\,po \end{aligned}$$

Comme le début du MAC est à 1174,5 pouces, le centre de masse est 52,9 pouces derrière le bord d'attaque du MAC.

Puisque le MAC a une longueur de 278,5 pouces, la position du centre de masse en pourcentage du MAC est

$$\begin{aligned} \text{cm \% MAC} &= \frac{52,9}{278,5} \cdot 100 \\ &= 19,0\% \end{aligned}$$

b) Selon le graphique, on est à l'intérieur des limites.


MAXIMUM TAXI
WEIGHT - 752000 LB
MAXIMUM TAKEOFF
WEIGHT - 750000 LB
19.7%
37.8%
722300 LB
at 18.0%
705300 LB
at 41.2%
609000 LB
at 44.0%
603000 LB
at 44.0%
492000 LB
at 14.7%
MAXIMUM LANDING
WEIGHT - 492000 LB
471100 LB
at 44.0%
460000 LB
at 14.0%
MAXIMUM ZERO FUEL
WEIGHT - 461000 LB
461000 LB
at 43.5%
Do not operate in the
shaded area during takeoff.
377200 LB
at 39.1%
347000 LB
at 34.9%
23.2%
GROSS WEIGHT - LB
CENTER OF GRAVITY - % MAC