Solutionnaire du chapitre 9

1. En prenant un $y = 0$ à la surface de l'eau, les énergies gravitationnelles aux points A, B et C sont

$$
\begin{aligned}
U_{gA} &= mgy = 30kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot 2,8m = 823,2J \\
U_{gB} &= mgy = 30kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot 1,5m = 441J \\
U_{gC} &= mgy = 30kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot 0m = 0J
\end{aligned}
$$

a) En passant de A à B, la variation d'énergie est donc

$$
\begin{aligned}
\Delta U_g &= U_{gB} - U_{gA} \\
&= 441J - 823,2J \\
&= -382,2J
\end{aligned}
$$

b) En passant de A à C, la variation d'énergie est donc

$$
\begin{aligned}
\Delta U_g &= U_{gC} - U_{gA} \\
&= 0J - 823,2J \\
&= -823,2J
\end{aligned}
$$

Le travail est donc

$$
\begin{aligned}
W_g &= -\Delta U_g \\
&= --823,2J \\
&= 823,2J
\end{aligned}
$$

2. a) La formule de l'énergie potentielle est

$$
\begin{aligned}
U &= -\int F_x dx \\
&= -\int \left(2\tfrac{N}{m^3} \cdot x^3 + 2N\right) dx \\
&= -\frac{1}{2}\tfrac{N}{m^3} \cdot x^4 - 2N \cdot x + Cst
\end{aligned}
$$

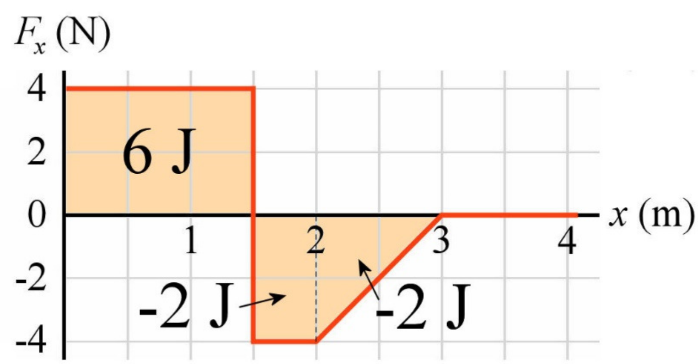
b) La différence d'énergie potentielle est

$$\begin{aligned}\Delta U &= \left(-\frac{1}{2}\tfrac{N}{m^3}\cdot(5m)^4 - 2N\cdot(5m)\right) - \left(-\frac{1}{2}\tfrac{N}{m^3}\cdot(-2m)^4 - 2N\cdot(-2m)\right)\\ &= (-322,5J) - (-4J)\\ &= -318,5J\end{aligned}$$

c) Le travail fait par la force est

$$\begin{aligned}W &= -\Delta U\\ &= -(-318,5J)\\ &= 318,5J\end{aligned}$$

3. La variation d'énergie potentielle est égale à – l'aire sous la courbe. Entre x = 0 m et x = 3 m, l'aire est



L'aire totale est de 2 J. La variation d'énergie potentielle est donc de -2 J.

4. La force est conservatrice si

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

a) Les dérivées sont

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial\left(3\frac{N}{m^2}\cdot y^2\right)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} == \frac{\partial\left(3\frac{N}{m^2}\cdot x^2\right)}{\partial y} = 0$$

Comme elles sont égales, la force est conservatrice.

b) Les dérivées sont

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial\left(3\frac{N}{m^3}\cdot xy^2 + 1\frac{N}{m}\cdot y\right)}{\partial x} = 3\frac{N}{m^3}\cdot y^2$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial\left(3\frac{N}{m^3}\cdot x^2 y + 1\frac{N}{m}\cdot x\right)}{\partial y} = 3\frac{N}{m^3}\cdot x^2$$

Comme elles ne sont pas égales, la force n'est pas conservatrice.

c) Les dérivées sont

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial\left(3\frac{N}{m^3}\cdot x^2 y + 1\frac{N}{m}\cdot x\right)}{\partial x} = 6\frac{N}{m^3}\cdot xy + 1\frac{N}{m}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial\left(3\frac{N}{m^3}\cdot xy^2 + 1\frac{N}{m}\cdot y\right)}{\partial y} = 6\frac{N}{m^3}\cdot xy + 1\frac{N}{m}$$

Comme elles sont égales, la force est conservatrice.

5. La force en x est

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial\left(4\frac{J}{m^2}\cdot x^2 + 2\frac{J}{m}\cdot(x+y) - 3\frac{J}{m^2}\cdot xy\right)}{\partial x} \\ &= -\left(8\frac{J}{m^2}\cdot x + 2\frac{J}{m} - 3\frac{J}{m^2}\cdot y\right) \end{aligned}$$

À x = 1 m et y = 2 m, cette composante de la force est

$$\begin{aligned}F_x &= -\left(8\tfrac{J}{m^2}\cdot 1m + 2\tfrac{J}{m} - 3\tfrac{J}{m^2}\cdot 2m\right)\\ &= -4N\end{aligned}$$

La force en *y* est

$$\begin{aligned}F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y}\\ &= -\frac{\partial\left(4\tfrac{J}{m^2}\cdot x^2 + 2\tfrac{J}{m}\cdot(x+y) - 3\tfrac{J}{m^2}\cdot xy\right)}{\partial y}\\ &= -\left(0 + 2\tfrac{J}{m} - 3\tfrac{J}{m^2}\cdot x\right)\end{aligned}$$

À x = 1 m et y = 2 m, cette composante de la force est

$$\begin{aligned}F_y &= -\left(2\tfrac{J}{m} - 3\tfrac{J}{m^2}\cdot 1m\right)\\ &= 1N\end{aligned}$$

La force est donc

$$\vec{F} = \left(-4\vec{i} + 1\vec{j}\right)N$$

6. a) Si on intègre F_x par rapport à x, on arrive

$$\begin{aligned}U &= -\int\left(-4\tfrac{N}{m^3}\cdot xy^2 + 2\tfrac{N}{m}\cdot x\right)dx\\ &= 2\tfrac{N}{m^3}\cdot x^2y^2 - 1\tfrac{N}{m}\cdot x^2 + C_1\end{aligned}$$

Si on intègre F_y par rapport à y, on arrive

$$\begin{aligned}U &= -\int\left(-4\tfrac{N}{m^3}\cdot x^2y + 4\tfrac{N}{m}\cdot y\right)dy\\ &= 2\tfrac{N}{m^3}\cdot x^2y^2 - 2\tfrac{N}{m}\cdot y^2 + C_2\end{aligned}$$

Le deuxième terme de la première intégrale est la partie de U qui dépend uniquement de x. Le deuxième terme de la deuxième intégrale est la partie de U qui dépend uniquement de y. Les premiers termes des deux intégrales donnent la partie de U qui dépend à la fois de x et y. On arrive donc à la conclusion que U est égal à

$$U = 2\tfrac{N}{m^3}\cdot x^2y^2 - 1\tfrac{N}{m}\cdot x^2 - 2\tfrac{N}{m}\cdot y^2 + Cst$$

b) Au point (2 m, 1 m), l'énergie potentielle est

$$\begin{aligned} U &= 2\tfrac{N}{m^3}\cdot(2m)^2\cdot(1m)^2 - 1\tfrac{N}{m}\cdot(2m)^2 - 2\tfrac{N}{m}\cdot(1m)^2 \\ &= 2J \end{aligned}$$

c) Au point (5 m, 2 m), l'énergie potentielle est

$$\begin{aligned} U &= 2\tfrac{N}{m^3}\cdot(5m)^2\cdot(2m)^2 - 1\tfrac{N}{m}\cdot(5m)^2 - 2\tfrac{N}{m}\cdot(2m)^2 \\ &= 167J \end{aligned}$$

d) Le travail est

$$\begin{aligned} W &= -\Delta U \\ &= -(167J - 2J) \\ &= -165J \end{aligned}$$

7. La composante en x de la force est

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial\left(4\tfrac{J}{m^2}\cdot x^2 + 2\tfrac{J}{m}\cdot(x+y+z) - 3\tfrac{J}{m^3}\cdot xyz\right)}{\partial x} \\ &= -\left(8\tfrac{J}{m^2}\cdot x + 2\tfrac{J}{m} - 3\tfrac{J}{m^3}\cdot yz\right) \end{aligned}$$

À x = 1 m, y = 2 m et z = - 4 m, cette composante est

$$\begin{aligned} F_x &= -\left(8\tfrac{J}{m^2}\cdot 1m + 2\tfrac{J}{m} - 3\tfrac{J}{m^3}\cdot 2m\cdot(-4m)\right) \\ &= -34N \end{aligned}$$

La composante en y de la force est

$$\begin{aligned}F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial\left(4\frac{J}{m^2}\cdot x^2 + 2\frac{J}{m}\cdot(x+y+z) - 3\frac{J}{m^3}\cdot xyz\right)}{\partial y} \\ &= -\left(0 + 2\frac{J}{m} - 3\frac{J}{m^3}\cdot xz\right)\end{aligned}$$

À x = 1 m, y = 2 m et z = - 4 m, cette composante est

$$\begin{aligned}F_y &= -\left(2\frac{J}{m} - 3\frac{J}{m^3}\cdot 1m\cdot(-4m)\right) \\ &= -14N\end{aligned}$$

La composante en z de la force est

$$\begin{aligned}F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial\left(4\frac{J}{m^2}\cdot x^2 + 2\frac{J}{m}\cdot(x+y+z) - 3\frac{J}{m^3}\cdot xyz\right)}{\partial z} \\ &= -\left(0 + 2\frac{J}{m} - 3\frac{J}{m^3}\cdot xy\right)\end{aligned}$$

À x = 1 m, y = 2 m et z = - 4 m, cette composante est

$$\begin{aligned}F_z &= -\left(2\frac{J}{m} - 3\frac{J}{m^3}\cdot 1m\cdot 2m\right) \\ &= 4N\end{aligned}$$

La force est donc

$$\vec{F} = \left(-34\vec{i} - 14\vec{j} + 4\vec{k}\right)N$$

8. a) À l'équilibre, la force faite par le ressort est égale à la force de gravitation.

$$kx = mg$$

L'élongation du ressort est donc

$$\begin{aligned} x &= \frac{mg}{k} \\ &= \frac{0,05kg \cdot 9,8\frac{N}{kg}}{50\frac{N}{m}} \\ &= 0,0098m \end{aligned}$$

L'énergie du ressort est donc

$$\begin{aligned} U_R &= \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 50\tfrac{N}{m} \cdot (0,0098m)^2 \\ &= 0,002401J \end{aligned}$$

b) À l'équilibre, la force faite par le ressort est égale à la force de gravitation.

$$kx' = mg$$

L'élongation du ressort est donc

$$\begin{aligned} x' &= \frac{mg}{k} \\ &= \frac{0,55kg \cdot 9,8\frac{N}{kg}}{50\frac{N}{m}} \\ &= 0,1078m \end{aligned}$$

L'énergie du ressort est donc

$$\begin{aligned} U_R' &= \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 50\tfrac{N}{m} \cdot (0,1078m)^2 \\ &= 0,290521J \end{aligned}$$

c) Le travail fait par le ressort est

$$\begin{aligned} W_R &= -\Delta U_R \\ &= -(0,290521J - 0,002401J) \\ &= -0,28812J \end{aligned}$$

9. a) *Formule de l'énergie*

Le système étant formé uniquement d'un objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (charriot au point A)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy \\ &= \frac{1}{2}2000kg \cdot v^2 + 2000kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg} \cdot 25m \\ &= 1000kg \cdot v^2 + 490\,000J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au point B.

Énergie mécanique à l'instant 2 (charriot au point B)

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2000kg \cdot \left(25\tfrac{m}{s}\right)^2 + 0J \\ &= 625\,000J \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$\begin{gathered} E = E' \\ 1000kg \cdot v^2 + 490\,000J = 625\,000J \\ v = 11{,}62\tfrac{m}{s} \end{gathered}$$

b) *Énergie mécanique à l'instant 2 (charriot au point C)*

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2000kg \cdot v'^2 + 2000kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg} \cdot 5m \\ &= 1000kg \cdot v'^2 + 98\,000J \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

En égalant les deux énergies mécaniques aux points A et C, on obtient

$$\begin{aligned} E' &= E' \\ 625\,000J &= 1000kg \cdot v'^2 + 98\,000J \\ v &= 22,96\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

10. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé d'un objet et d'un ressort, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (ressort comprimé)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 2000\tfrac{N}{m} \cdot (0,2m)^2 \\ &= 40J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au niveau du sol.

a) *Énergie mécanique à l'instant 2 (quand le ressort est comprimé de 5 cm)*

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10kg \cdot v'^2 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 2000\tfrac{N}{m} \cdot (0,05m)^2 \\ &= 5kg \cdot v'^2 + 2,5J \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 40J &= 5kg \cdot v'^2 + 2,5J \\ v' &= 2,739\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

b) *Énergie mécanique à l'instant 2 (quand le ressort n'est plus comprimé)*

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 10kg\cdot v'^2 + 0 + 0 \\ &= 5kg\cdot v'^2 \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 40J &= 5kg\cdot v'^2 \\ v' &= 2{,}828\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

11. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé d'un objet et d'un ressort, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (ressort comprimé)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2}\cdot 500\tfrac{N}{m}\cdot(0{,}2m)^2 \\ &= 10J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au niveau du sol.

Énergie mécanique à l'instant 2 (quand la masse est à sa hauteur maximale sur la pente)

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= 0 + 2kg\cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\cdot y' + 0 \\ &= 19{,}6N\cdot y' \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$E = E'$$
$$10J = 19,6N \cdot y'$$
$$y' = 0,5102m$$

On trouve le déplacement avec

$$\sin 45° = \frac{y'}{D}$$
$$D = \frac{y'}{\sin 45°}$$
$$D = \frac{0,5102m}{\sin 45°}$$
$$D = 0,7215m = 72,15cm$$

12. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé d'un objet et de deux ressorts, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2$$

Énergie mécanique à l'instant 1

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2}\cdot 100\tfrac{N}{m}\cdot(0,5m)^2 + \frac{1}{2}\cdot 200\tfrac{N}{m}\cdot(0,1m)^2 \\ &= 12,5J + 1J \\ &= 13,5J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au niveau du sol.

Énergie mécanique à l'instant 2

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}k_1x_1'^2 + \frac{1}{2}k_2x_2'^2 \\ &= 5kg \cdot v'^2 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 100\tfrac{N}{m} \cdot (0,25m)^2 + \frac{1}{2} \cdot 200\tfrac{N}{m} \cdot (0,15m)^2 \\ &= 2,5kg \cdot v'^2 + 3,125J + 2,25J \\ &= 2,5kg \cdot v^2 + 5,375J \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 13,5J &= 2,5kg \cdot v'^2 + 5,375J \\ v' &= 1,803\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

13. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé d'un objet et d'un ressort, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

Énergie mécanique à l'instant 1

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= 0 + 2kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot 0,5m + 0 \\ &= 9,8J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au bout du tube.

Énergie mécanique à l'instant 2

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= 0 + 2kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot (-d) + \frac{1}{2} \cdot 100\tfrac{N}{m} \cdot d^2 \\ &= -19,6N \cdot d + 50\tfrac{N}{m} \cdot d^2 \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$E = E'$$
$$9,8J = -19,6N \cdot d + 50\tfrac{N}{m} \cdot d^2$$
$$50\tfrac{N}{m} \cdot d^2 - 19,6N \cdot d - 9,8J = 0$$

La solution de cette équation est d = 0,6801 m.

(L'autre solution d = -0,2881 m doit être rejetée puisqu'elle correspond à un étirement du ressort, ce qui n'a pas de sens ici.)

14. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé d'un objet et d'un ressort, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

Énergie mécanique à l'instant 1

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 2000\tfrac{N}{m} \cdot (0,2m)^2 \\ &= 40J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le y = 0 au sol.

Énergie mécanique à l'instant 2 (ressort partiellement comprimé)

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= \frac{1}{2}mv'^2 + 0 + \frac{1}{2}kx'^2 \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$E = E'$$
$$40J = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}kx'^2$$

Puisque l'énergie cinétique est égale à l'énergie du ressort, on a

$$\frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}kx'^2$$

Notre équation devient donc

$$\begin{aligned}
40J &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}kx'^2 \\
40J &= \frac{1}{2}kx'^2 + \frac{1}{2}kx'^2 \\
40J &= kx'^2 \\
40J &= 2000\tfrac{N}{m}\cdot x'^2 \\
x' &= 0{,}1414m
\end{aligned}$$

15. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé d'un objet et d'un ressort, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (charriot au point 1)

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2 \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2000kg\cdot\left(10\tfrac{m}{s}\right)^2 + 2000kg\cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\cdot 30m + 0 \\
&= 100\,000J + 588\,000J \\
&= 688\,000J
\end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au point 2.

a) La vitesse maximale sera atteinte au point le plus bas, donc au point 2.

Énergie mécanique à l'instant 2 (charriot au point 2)

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2000kg\cdot v'^2 + 0 + 0 \\ &= 1000kg\cdot v'^2 \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 688\,000J &= 1000kg\cdot v'^2 \\ v' &= 26,23\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

b) *Énergie mécanique à l'instant 2 (compression au maximum)*

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= 0 + 2000kg\cdot 9,8\tfrac{N}{m}\cdot 15m + \frac{1}{2}\cdot 800\tfrac{N}{m}\cdot x'^2 \\ &= 294\,000J + 400\tfrac{N}{m}\cdot x'^2 \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 688\,000J &= 294\,000J + 400\tfrac{N}{m}\cdot x'^2 \\ x' &= 31,38m \end{aligned}$$

c) *Énergie mécanique à l'instant 2*

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= \frac{1}{2}mv'^2 + 2000kg\cdot 9,8\tfrac{N}{m}\cdot 15m + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= \frac{1}{2}mv'^2 + 294\,000J + \frac{1}{2}kx'^2 \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$E = E'$$
$$688\,000J = \frac{1}{2}mv'^2 + 294\,000J + \frac{1}{2}kx'^2$$
$$394\,000J = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}kx'^2$$

Puisque l'énergie cinétique est le double de l'énergie du ressort, on a

$$\frac{1}{2}mv'^2 = 2\cdot\frac{1}{2}kx'^2$$
$$\frac{1}{4}mv'^2 = \frac{1}{2}kx'^2$$

Notre équation devient donc

$$394\,000J = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}kx'^2$$
$$394\,000J = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{4}mv'^2$$
$$394\,000J = \frac{3}{4}mv'^2$$
$$394\,000J = \frac{3}{4}\cdot 2000kg \cdot v'^2$$
$$v' = 16,21\tfrac{m}{s}$$

16. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé de deux objets et d'un ressort, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_2gy_2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Énergie mécanique à l'instant 1

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_2gy_2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= 0+0+0+0+\frac{1}{2}\cdot 195\tfrac{N}{m}\cdot(0,15m)^2 \\ &= 2,19375J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ de chaque bloc à sa position à l'instant 1.

Énergie mécanique à l'instant 2 (quand le bloc de 30 kg a baissé de 10 cm alors que le bloc de 25 kg s'est déplacé de 10 cm vers le haut de la pente)

La variation de hauteur de ce bloc est donnée par

$$\sin 40° = \frac{y}{10cm}$$
$$y = 6,4279cm$$

L'énergie à l'instant 2 est donc

$$\begin{aligned}E' &= \frac{1}{2}m_1v'^2 + m_1gy_1' + \frac{1}{2}m_2v'^2 + m_2gy_2' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 30kg\cdot v'^2 + 30kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}\cdot(-0,1m) + \frac{1}{2}\cdot 25kg\cdot v'^2 \\ &\qquad + 25kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}\cdot 0,064279m + \frac{1}{2}\cdot 195\tfrac{N}{m}\cdot(0,05m)^2 \\ &= 15kg\cdot v'^2 - 29,4J + 12,5kg\cdot v'^2 + 15,748J + 0,24375J \\ &= 27,5kg\cdot v'^2 - 13,408J\end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$E = E'$$
$$2,19375J = 27,5kg\cdot v'^2 - 13,408J$$
$$v' = 0,7532\tfrac{m}{s}$$

17. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé d'un seul objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (pendule au point A)

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy \\ &= 0 + mgy\end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au point le plus bas du mouvement du pendule.

La hauteur du pendule au point A est

$$\begin{aligned} y &= L(1-\cos\theta) \\ &= 1,2m\cdot(1-\cos 35°) \\ &= 0,217m \end{aligned}$$

L'énergie mécanique est donc

$$\begin{aligned} E &= mgy \\ &= 4kg\cdot 9,8\tfrac{N}{m}\cdot 0,217m \\ &= 8,507J \end{aligned}$$

Énergie mécanique à l'instant 2 (pendule au point B)

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' \\ &= \frac{1}{2}\cdot 4kg\cdot v'^2 + 0 \\ &= 2kg\cdot v'^2 \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 8,507J &= 2kg\cdot v'^2 \\ v' &= 2,062\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

18. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé d'un seul objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (Radu au bout de la corde verticale avec une vitesse v)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$
$$= \frac{1}{2}mv^2$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au point le plus bas du mouvement du pendule.

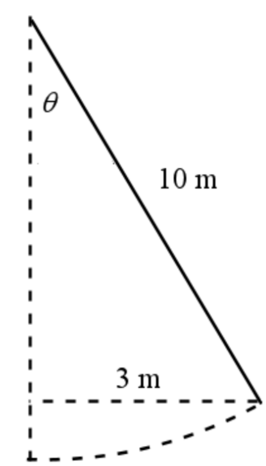
Énergie mécanique à l'instant 2 (Radu au point le plus haut du mouvement du pendule)

$$E' = \frac{1}{2}mv'^2 + mgy'$$
$$= mgy'$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$E = E'$$
$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy'$$
$$\frac{1}{2}v^2 = gy'$$

On doit alors trouver la valeur de y_{min} quand Radu traverse le ravin. On trouve premièrement l'angle minimum avec



$$\sin\theta = \frac{3m}{10m}$$
$$\theta = 17,46°$$

Cela correspond à une hauteur de

$$y'_{\min} = L(1-\cos\theta_{\min})$$
$$= 10m\cdot(1-\cos 17,46°)$$
$$= 0,4606m$$

Notre équation de l'énergie nous donne alors

$$\frac{1}{2}v_{\min}^2 = gy'_{\min}$$

$$\frac{1}{2}v_{\min}^2 = 9,8\tfrac{N}{kg}\cdot 0,4606m$$

$$v_{\min} = 3,005\tfrac{m}{s}$$

19. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé d'un seul objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (configuration montrée sur la figure)

La hauteur du pendule est

$$\begin{aligned} y &= L\left(1-\cos\theta\right) \\ &= 4m\cdot\left(1-\cos 25°\right) \\ &= 0,3748m \end{aligned}$$

L'énergie mécanique du pendule à l'instant 1 est donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2kg\cdot\left(2\tfrac{m}{s}\right)^2 + 2kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}\cdot 0,3748m \\ &= 11,345J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au point le plus bas du mouvement du pendule.

a) *Énergie mécanique à l'instant 2 (pendule vertical)*

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2kg\cdot v'^2 + 0 \\ &= 1kg\cdot v'^2 \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$E = E'$$
$$11,345J = 1kg \cdot v'^2$$
$$v' = 3,368 \tfrac{m}{s}$$

b) *Énergie mécanique à l'instant 2 (pendule à sa hauteur maximale)*

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' \\ &= 0 + 2kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot y' \\ &= 19,6N \cdot y' \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$E = E'$$
$$11,345J = 19,6N \cdot y'$$
$$y' = 0,57885m$$

Cela correspond à l'angle suivant.

$$\cos\theta = \frac{L - y'}{L}$$
$$\cos\theta = \frac{4m - 0,57885m}{4m}$$
$$\theta = 31,2°$$

20. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé d'un seul objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Énergie mécanique à l'instant 1

La hauteur du pendule est

$$y = L(1 - \cos\theta)$$

L'énergie mécanique du pendule à l'instant 1 est donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy \\ &= 0 + mgy \\ &= mgL(1-\cos 50°) \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au point le plus bas du mouvement du pendule.

Énergie mécanique à l'instant 2 (la longueur de la corde est maintenant L')

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' \\ &= 0J + mgy' \\ &= mgL'(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$\begin{aligned} E &= E' \\ mgL(1-\cos 50°) &= mgL'(1-\cos\theta) \\ L(1-\cos 50°) &= L'(1-\cos\theta) \\ 1,5m\cdot(1-\cos 50°) &= 0,5m\cdot(1-\cos\theta) \\ \cos\theta &= -0,0716 \\ \theta &= 94,1° \end{aligned}$$

21. Pour trouver le poids apparent, il nous faut l'accélération de la voiture. Or, cette accélération est une accélération centripète

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Pour la trouver, on doit connaitre la vitesse de la voiture. On va trouver cette vitesse avec la conservation de l'énergie mécanique.

Formule de l'énergie

Le système étant formé d'un seul objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}Mv^2 + Mgy$$

(On va utiliser M pour la masse pour éviter la confusion avec les mètres.)

Énergie mécanique à l'instant 1 (auto à la position A)

La hauteur de l'auto est

$$\begin{aligned} y &= L(1-\cos\theta) \\ &= 5m\cdot(1-\cos 80°) \\ &= 4{,}132m \end{aligned}$$

L'énergie mécanique de l'auto à l'instant 1 est donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}Mv^2 + Mgy \\ &= 0 + Mgy \\ &= Mg\cdot 4{,}132m \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au point le plus bas du mouvement de l'auto.

Énergie mécanique à l'instant 2 est (auto à la position B)

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}Mv'^2 + Mgy' \\ &= \frac{1}{2}Mv'^2 + 0 \\ &= \frac{1}{2}Mv'^2 \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$\begin{aligned} E &= E' \\ Mg\cdot 4{,}132m &= \frac{1}{2}Mv'^2 \\ g\cdot 4{,}132m &= \frac{1}{2}v'^2 \\ v' &= 8{,}999\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Une personne dans la voiture a donc une accélération centripète de

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{\left(8,999\frac{m}{s}\right)^2}{5m} \\ &= 16,1965\tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

vers le haut.

Les composantes du poids apparent d'une personne dans la voiture sont donc

$$\begin{aligned} P_{app\ x} &= -Ma_x \\ &\to P_{app\ x} = 0 \\ P_{app\ y} &= -Mg - Ma_y \\ &\to P_{app\ y} = -M \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} - M \cdot 16,1965\tfrac{m}{s^2} \\ &\to P_{app\ y} = -M \cdot 25,9965\tfrac{N}{kg} \end{aligned}$$

Le nombre de g est donc

$$n_g = \frac{\left|P_{app}\right|}{P_{\text{reel sur Terre}}} = \frac{M \cdot 25,9965\frac{N}{kg}}{M \cdot 9,8\frac{N}{kg}} = 2,653$$

22. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé d'un objet (la balle) et de deux ressorts, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (ressorts étirés)

À ce moment, la balle n'a pas de vitesse. En mettant notre $y = 0$ entre les deux ressorts (où est la balle), mgy sera 0. Toutefois, les ressorts sont étirés. La longueur des ressorts est égale à l'hypoténuse d'un triangle ayant des côtés adjacents à l'angle droit de 50 cm et 30 cm. La longueur des ressorts est donc

$$L = \sqrt{\left(50cm\right)^2 + \left(30cm\right)^2} = 58,31cm$$

Comme les ressorts étaient ni étirés ni compressés quand leur longueur était de 50 cm, alors ils sont étirés de 8,31 cm. Ainsi, l'énergie mécanique à l'instant 1 est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2}\cdot 500\tfrac{N}{m}\cdot\left(0,0831m\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 500\tfrac{N}{m}\cdot\left(0,0831m\right)^2 \\ &= 3,452J \end{aligned}$$

Énergie mécanique à l'instant 2

À ce moment, la balle a de la vitesse, les ressorts ne sont plus étirés et la balle est toujours à $y = 0$. L'énergie à l'instant 2 est donc

$$\begin{aligned} E'_{mec} &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}k_1x_1'^2 + \frac{1}{2}k_2x_2'^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 0,1kg\cdot v'^2 + 0 + 0 + 0 \\ &= 0,05kg\cdot v'^2 \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 3,452J &= 0,05kg\cdot v'^2 \\ v' &= 8,31\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

23. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé de deux blocs, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_2gy_2$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (configuration montrée sur la figure)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_2gy_2 \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ de chaque bloc à la position initiale des blocs.

On sait que les blocs se sont déplacés de 2 m, mais on ne sait pas dans quelle direction. On doit donc faire les deux solutions.

1re solution : le bloc de 6 kg monte de 2 m

Énergie mécanique à l'instant 2 (après le déplacement de 2 m)

$$\begin{aligned}
E' &= \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + m_1 g y_1' + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 + m_2 g y_2' \\
&= \frac{1}{2}\cdot 6kg \cdot v'^2 + 6kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg}\cdot 2m + \frac{1}{2}\cdot 10kg \cdot v'^2 + 10kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg}\cdot 0m \\
&= 3kg \cdot v'^2 + 117,6J + 5kg \cdot v'^2 \\
&= 8kg \cdot v'^2 + 117,6J
\end{aligned}$$

Travail des forces externes et non conservatrices

Comme il y a des forces externes, on doit aussi calculer le travail fait par ces forces.

$$\begin{aligned}
W_{10N} &= 10N \cdot 2m \cdot \cos(0°) = 20J \\
W_{20N} &= 20N \cdot 2m \cdot \cos(180°) = -40J
\end{aligned}$$

Ce qui donne un travail net de -20 J pour les forces externes.

Utilisation de $E_{mec} + W_{ext} + W_{n.cons.} = E'_{mec}$

$$\begin{aligned}
E + W_{ext} &= E' \\
0 + -20J &= 8kg \cdot v'^2 + 117,6J \\
v'^2 &= -17,2\tfrac{m^2}{s^2}
\end{aligned}$$

Ce qui n'a pas de solution. Il est donc impossible que le bloc de 6 kg monte de 2 m.

2e solution : le bloc de 6 kg descend de 2 m

Énergie mécanique à l'instant 2 (après le déplacement de 2 m)

$$\begin{aligned}E' &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + m_1gy_1' + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + m_2gy_2' \\ &= \frac{1}{2}\cdot 6kg\cdot v'^2 + 6kg\cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\cdot(-2m) + \frac{1}{2}\cdot 10kg\cdot v'^2 + 10kg\cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\cdot 0m \\ &= 3kg\cdot v'^2 - 117{,}6J + 5kg\cdot v'^2 \\ &= 8kg\cdot v'^2 - 117{,}6J\end{aligned}$$

Travail des forces externes et non conservatrices

Comme il y a des forces externes, on doit aussi calculer le travail fait par ces forces.

$$\begin{aligned}W_{10N} &= 10N\cdot 2m\cdot\cos(180°) = -20J \\ W_{20N} &= 20N\cdot 2m\cdot\cos(0°) = 40J\end{aligned}$$

Ce qui donne un travail net de 20 J pour les forces externes.

Utilisation de $E_{mec} + W_{ext} + W_{n.cons.} = E'_{mec}$

$$\begin{aligned}E + W_{ext} &= E' \\ 0 + 20J &= 8kg\cdot v'^2 - 117{,}6J \\ v'^2 &= 17{,}2\tfrac{m^2}{s^2} \\ v' &= 4{,}147\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

24. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé d'un objet et d'un ressort, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (configuration montrée sur la figure)

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2}\cdot 20\,000\tfrac{N}{m}\cdot(3m)^2 \\ &= 90\,000J\end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au sol.

Énergie mécanique à l'instant 2 (après le déplacement de 50 m)

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 500kg \cdot v'^2 + 0 + 0 \\ &= 250kg \cdot v'^2 \end{aligned}$$

Travail des forces externes et non conservatrices

Comme il y a une force non conservatrice, on doit aussi calculer le travail fait par cette force.

$$\begin{aligned} W_{nc} &= 2000N \cdot 50m \cdot \cos(0°) \\ &= 100\,000J \end{aligned}$$

Utilisation de $E_{mec} + W_{ext} + W_{n.cons.} = E'_{mec}$

$$\begin{aligned} E + W_{nc} &= E' \\ 90\,000J + 100\,000J &= 250kg \cdot v'^2 \\ v' &= 27{,}568 \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

25. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé d'un seul objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (configuration montrée sur la figure)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy \\ &= 0 + mg \cdot (62m) \\ &= mg \cdot (62m) \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au bas de la pente.

Énergie mécanique à l'instant 2 (après la descente et l'arrêt sur le plat)

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' \\ &= 0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Travail des forces externes et non conservatrices

Comme il y a une force non conservatrice, on doit aussi calculer le travail fait par cette force.

$$\begin{aligned} W_{non-cons} &= F_f \Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= \mu_c F_N \Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= \mu_c mg \Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= -\mu_c mg \Delta s \end{aligned}$$

Utilisation de $E_{mec} + W_{ext} + W_{n.cons.} = E'_{mec}$

$$\begin{gathered} E + W_{non-cons} = E' \\ mg \cdot (62m) + -\mu_c mg \Delta s = 0 \\ (62m) - \mu_c \Delta s = 0m \\ 62m - 0,2 \cdot \Delta s = 0m \\ \Delta s = 310m \end{gathered}$$

26. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé d'un objet et d'un ressort, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (configuration montrée sur la figure)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 2000\tfrac{N}{m} \cdot (0,5m)^2 \\ &= 250J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au sol.

Énergie mécanique à l'instant 2 (après l'arrêt sur le plat)

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= 0+0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Travail des forces externes et non conservatrices

Comme il y a une force non conservatrice, on doit aussi calculer le travail fait par cette force.

$$\begin{aligned} W_{non-cons} &= F_f \Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= \mu_c F_N \Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= \mu_c mg\Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= \mu_c \cdot 10kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot 42m \cdot \cos(180°) \\ &= -\mu_c \cdot 4116J \end{aligned}$$

Utilisation de $E_{mec} + W_{ext} + W_{n.cons.} = E'_{mec}$

$$\begin{aligned} E + W_{non-cons} &= E' \\ 250J + -\mu_c \cdot 4116J &= 0 \\ \mu_c &= 0,06074 \end{aligned}$$

27. a) *Formule de l'énergie*

Le système étant formé de deux blocs et d'un ressort, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_2gy_2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (configuration montrée sur la figure)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_2gy_2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= 0+0+0+0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ de chaque bloc à la position initiale des blocs.

Énergie mécanique à l'instant 2 (après le déplacement de 1 m)

On sait que les blocs se sont déplacés de 1 m et il est seulement possible que le bloc de 36 kg ait descendu.

$$\begin{aligned}
E' &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + m_1gy_1' + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + m_2gy_2' + \frac{1}{2}kx'^2 \\
&= \frac{1}{2}\cdot 36kg\cdot v'^2 + 36kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}\cdot(-1m) + \frac{1}{2}\cdot 12kg\cdot v'^2 + 10kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}\cdot 0m + \frac{1}{2}\cdot 200\tfrac{N}{m}\cdot(1m)^2 \\
&= 18kg\cdot v'^2 - 352,8J + 6kg\cdot v'^2 + 0J + 100J \\
&= 24kg\cdot v'^2 - 252,8J
\end{aligned}$$

Travail des forces externes et non conservatrices

Comme il y a une force non conservatrice, on doit aussi calculer le travail fait par cette force de friction agissant sur le bloc de 12 kg.

$$\begin{aligned}
W_{non-cons} &= F_f\Delta s\cdot\cos(180°) \\
&= \mu_c F_N\Delta s\cdot\cos(180°) \\
&= \mu_c mg\Delta s\cos(180°) \\
&= 0,4\cdot 12kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}\cdot 1m\cdot\cos 180° \\
&= -47,04J
\end{aligned}$$

Utilisation de $E_{mec} + W_{ext} + W_{n.cons.} = E'_{mec}$

$$\begin{aligned}
E + W_{non-cons} &= E' \\
0 + -47,04J &= 24kg\cdot v'^2 - 252,8J \\
205,76J &= 24kg\cdot v'^2 \\
v' &= 2,928\tfrac{m}{s}
\end{aligned}$$

b) *Énergie mécanique à l'instant 2 (après le déplacement de 3,2 m)*

$$\begin{aligned}E' &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + m_1gy_1' + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + m_2gy_2' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 36kg\cdot v'^2 + 36kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}\cdot(-3,2m) + \frac{1}{2}\cdot 12kg\cdot v'^2 + 10kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}\cdot 0m + \frac{1}{2}\cdot 200\tfrac{N}{m}\cdot(3,2m)^2 \\ &= 18kg\cdot v'^2 - 1128,96J + 6kg\cdot v'^2 + 0J + 1024J \\ &= 24kg\cdot v'^2 - 104,96J\end{aligned}$$

Travail des forces externes et non conservatrices

Comme il y a une force non conservatrice, on doit aussi calculer le travail fait par cette force de friction agissant sur le bloc de 12 kg.

$$\begin{aligned}W_{non-cons} &= F_f\Delta s\cdot\cos(180°) \\ &= \mu_c F_N\Delta s\cdot\cos(180°) \\ &= \mu_c mg\Delta s\cos(180°) \\ &= 0,4\cdot 12kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}\cdot 3,2m\cdot\cos 180° \\ &= -150,528J\end{aligned}$$

Utilisation de $E_{mec} + W_{ext} + W_{n.cons.} = E'_{mec}$

$$\begin{aligned}E + W_{non-cons} &= E' \\ 0 + -150,528J &= 24kg\cdot v'^2 - 104,96J \\ -45,568J &= 24kg\cdot v'^2\end{aligned}$$

Ce qui n'a pas de solution. Cela veut dire que le déplacement ne peut pas être de 3,2 m.

28. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé d'un objet et d'un ressort, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (configuration montrée sur la figure)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= 0J + 0J + 0J \\ &= 0J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ à la position initiale du bloc.

Énergie mécanique à l'instant 2 (après l'arrêt)

À ce moment, le ressort est maintenant comprimé d'une distance d et le bloc s'est déplacé de 3 m + d sur la pente. Cela correspond à une baisse de hauteur y donnée par

$$\begin{aligned} \sin 30° &= \frac{y}{3m + d} \\ y &= (3m + d)\sin 30° \\ y &= \tfrac{1}{2}(3m + d) \end{aligned}$$

(Elle sera toutefois négative puisque la masse descend.)

L'énergie à l'instant 2 est donc

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \frac{1}{2}kx'^2 \\ &= 0J + 3kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}(3m + d)\right) + \frac{1}{2} \cdot 400\tfrac{N}{m} \cdot d^2 \\ &= -14{,}7N \cdot (3m + d) + 200\tfrac{N}{m} \cdot d^2 \end{aligned}$$

Travail des forces externes et non conservatrices

Comme il y a une force non conservatrice, on doit aussi calculer le travail fait par cette force.

$$\begin{aligned} W_{non-cons} &= F_f \Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= \mu_c F_N \Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= \mu_c mg \sin(60°) \cdot (3m + d) \cdot \cos(180°) \\ &= 0{,}2 \cdot 3kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg} \cdot \sin(60°) \cdot (3m + d) \cdot \cos(180°) \\ &= -5{,}09223N \cdot (3m + d) \end{aligned}$$

Utilisation de $E_{mec} + W_{ext} + W_{n.cons.} = E'_{mec}$

$$E + W_{non-cons} = E'$$
$$0 + -5,09223N \cdot (3m + d) = -14,7N \cdot (3m + d) + 200\tfrac{N}{m} \cdot d^2$$
$$-15,2767J - 5,09223N \cdot d = -44,1J - 14,7N \cdot d + 200\tfrac{N}{m} d^2$$
$$-28,8233J - 9,60777N \cdot d + 200\tfrac{N}{m} d^2 = 0$$

La solution de cette équation est d = 0,4044 m.

(Il y a une autre solution négative qui correspondrait à un étirement du ressort, ce qui n'a pas de sens ici.)

29. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé de deux blocs, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + m_1 g y_1 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + m_2 g y_2$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (configuration montrée sur la figure)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + m_1 g y_1 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + m_2 g y_2 \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le y = 0 de chaque bloc à la position initiale des blocs.

Énergie mécanique à l'instant 2 (après le déplacement de 2 m)

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + m_1 g y_1' + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + m_2 g y_2' \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6kg \cdot v'^2 + 6kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot (-2m) + \frac{1}{2} \cdot 10kg \cdot v'^2 + 10kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot 0m \\ &= 3kg \cdot v'^2 - 117,6J + 5kg \cdot v'^2 \\ &= 8kg \cdot v'^2 - 117,6J \end{aligned}$$

Travail des forces externes et non conservatrices

Comme il y a une force externe, on doit aussi calculer le travail fait par cette force.

$$W_{ext} = 20N \cdot 2m \cdot \cos(0°) = 40J$$

Comme il y a une force non conservatrice, on doit aussi calculer le travail fait par cette force.

$$\begin{aligned} W_{non-cons} &= F_f \Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= \mu_c F_N \Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= \mu_c F_N \Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= 0,4 \cdot 10kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot 2m \cdot \cos(180°) \\ &= -78,4J \end{aligned}$$

Utilisation de $E_{mec} + W_{ext} + W_{n.cons.} = E'_{mec}$

$$\begin{aligned} E + W_{ext} + W_{non-cons} &= E' \\ 0 + 40J - 78,4J &= 8kg \cdot v'^2 - 117,6J \\ v'^2 &= 9,9\tfrac{m^2}{s^2} \\ v' &= 3,146\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

30. a) Il ne peut pas être aux endroits où U est plus grande que E, donc à

$$x < 4 \text{ m} \quad \text{et} \quad x > 26 \text{ m}$$

b) Au minimum de U, donc à $x = 10$ m.

c) À $x = 20$, on a $U = 2{,}6$ J. Puisque l'énergie mécanique est de 4 J, cela signifie que l'énergie cinétique est

$$\begin{aligned} E_{mec} &= E_k + U \\ 4J &= E_k + 2,6J \\ E_k &= 1,4J \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} E_K &= 1,4J \\ \frac{1}{2} m v^2 &= 1,4J \\ \frac{1}{2} \cdot 2kg \cdot v^2 &= 1,4J \\ v &= 1,1832\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Comme c'est un peu approximatif, on va dire 1,2 m/s.

d) Équilibre stable à x = 10 m. L'énergie mécanique devrait être de 0,2 J.
Équilibre stable à x = 22 m. L'énergie mécanique devrait être de 2 J.

e) Équilibre instable à x = 17 m. L'énergie mécanique devrait être de 3,4 J.

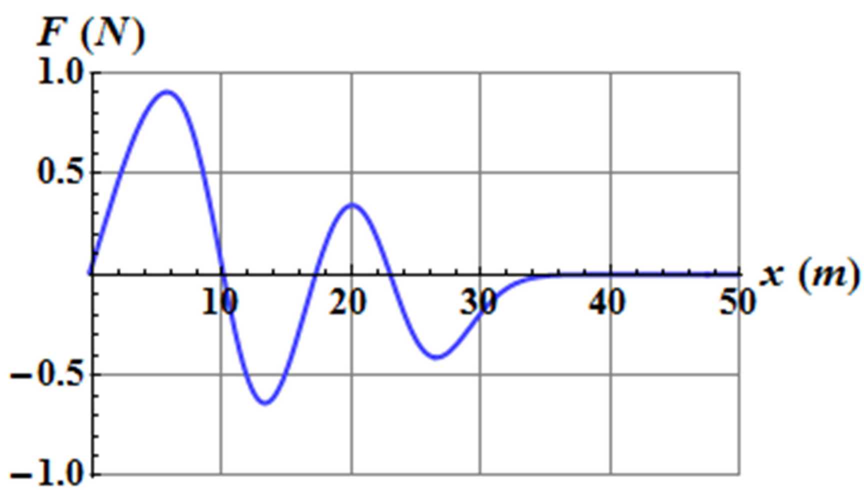
f) À x = 10 m, on a U = 0,2 J et à x = 20 m, on a U = 2,6 J. On a donc

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_2 - U_1 \\ &= 2,6J - 0,2J \\ &= 2,4J\end{aligned}$$

Le travail est donc

$$\begin{aligned}W &= -\Delta U \\ &= -2,4J\end{aligned}$$

g)



31. On sait que la pente est nulle aux endroits où il y a équilibre. On va donc résoudre l'équation

$$\frac{dU}{dx} = 0$$

pour trouver les positions d'équilibre. En faisant la dérivée de l'énergie potentielle, on arrive à

$$6\tfrac{J}{m^3}\cdot x^2+6\tfrac{J}{m^2}\cdot x-72\tfrac{J}{m}=0$$
$$x^2+1m\cdot x-12m^2=0$$

Les solutions de cette équation quadratique sont x = 3 m et x = – 4 m. Ce sont nos 2 positions d'équilibre.

On doit ensuite remarquer que le type d'équilibre est lié à la concavité de la fonction à la position d'équilibre. Avec une concavité positive, on a un équilibre stable, avec une concavité négative, on a un équilibre instable et avec une concavité nulle, on a un équilibre indifférent.

La concavité se trouve avec la 2e dérivée. La deuxième dérivée est

$$\frac{d^2U}{dx^2}=12\tfrac{J}{m^3}\cdot x+6\tfrac{J}{m^2}$$

À x = 3 m, la concavité est

$$\left[\frac{d^2U}{dx^2}\right]_{x=3}=12\tfrac{J}{m^3}\cdot 3m+6\tfrac{J}{m^2}=42\tfrac{J}{m^2}$$

On a donc un équilibre stable à x = 3 m.

À x = – 4 m, la concavité est

$$\left[\frac{d^2U}{dx^2}\right]_{x=-4m}=12\tfrac{J}{m^3}\cdot(-4m)+6\tfrac{J}{m^2}=-42\tfrac{J}{m^2}$$

On a donc un équilibre instable à x = – 4 m.

32. Avec les valeurs données, l'équation

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_{mec}-U\right)}$$

devient

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{2kg}\left(144J - 9\tfrac{N}{m^3}\cdot x^4\right)}$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{144\tfrac{m^2}{s^2} - 9\tfrac{1}{m^2 s^2}\cdot x^4}$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm 3\tfrac{1}{s}\cdot\sqrt{16m^2 - 1\tfrac{1}{m^2}\cdot x^4}$$

$$3\tfrac{1}{s}\cdot dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{16m^2 - 1\tfrac{1}{m^2}\cdot x^4}}$$

(On a pris le signe positif, car le signe devant la racine est le signe de la vitesse. Comme l'objet se déplace de $x = 0$ à $x = 2$ m, la vitesse est positive.)

On intègre ensuite en prenant le début et la fin comme bornes d'intégration. Cela signifie que du côté gauche, les bornes seront le temps à la position $x = 0$ (qu'on va appeler t_1) et le temps à la position $x = 1$ m (qu'on va appeler t_2). Du côté droit, les bornes seront la position initiale ($x = 0$) et la position finale ($x = 1$ m). On a alors

$$\int_{t_1}^{t_2} 3\tfrac{1}{s}\cdot dt = \int_0^{1m}\frac{dx}{\sqrt{16m^2 - 1\tfrac{1}{m^2}\cdot x^4}}$$

Avec Wolfram, on obtient

$$3\tfrac{1}{s}\cdot(t_2 - t_1) = 0,251605$$

$$\Delta t = \frac{0,251605}{3\tfrac{1}{s}}$$

$$\Delta t = 0,08387s$$

33. Avec les valeurs données, l'équation

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_{mec} - U\right)}$$

devient

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{2kg}\left(16J - 2N \cdot x\right)}$$
$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{16\tfrac{m^2}{s^2} - 2\tfrac{m}{s^2} \cdot x}$$
$$dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{16\tfrac{m^2}{s^2} - 2\tfrac{m}{s^2} \cdot x}}$$

Si on intègre de chaque côté, on a

$$\int dt = \pm\int \frac{dx}{\sqrt{16\tfrac{m^2}{s^2} - 2\tfrac{m}{s^2} \cdot x}}$$
$$\int dt = \frac{\pm 1}{2\tfrac{m}{s^2}}\int \frac{\left(-2\tfrac{m}{s^2}\right)dx}{\sqrt{16\tfrac{m^2}{s^2} - 2\tfrac{m}{s^2} \cdot x}}$$
$$\int dt = \frac{\pm 1}{2\tfrac{m}{s^2}}\int \frac{du}{\sqrt{u}}$$
$$t + C = \frac{\pm 1}{2\tfrac{m}{s^2}}\frac{\sqrt{u}}{\tfrac{1}{2}}$$
$$t + C = \frac{\pm 1}{1\tfrac{m}{s^2}}\sqrt{16\tfrac{m^2}{s^2} - 2\tfrac{m}{s^2} \cdot x}$$
$$t + C = \pm\sqrt{16s^2 - 2\tfrac{s^2}{m} \cdot x}$$

Si l'objet est à $x = 0$ quand $t = 0$, alors la constante d'intégration est

$$0 + C = \pm\sqrt{16s^2 - 0}$$
$$C = \pm 4s$$

On a donc

$$t \pm 4s = \pm\sqrt{16s^2 - 2\tfrac{s^2}{m} \cdot x}$$

Si on isole x, on arrive à

$$\left(t \pm 4s\right)^2 = 16s^2 - 2\tfrac{s^2}{m} \cdot x$$
$$2\tfrac{s^2}{m} \cdot x = 16s^2 - \left(t \pm 4s\right)^2$$
$$x = 8m - \tfrac{1}{2}\tfrac{m}{s^2} \cdot \left(t \pm 4s\right)^2$$

Finalement, on peut trouver le signe puisqu'on sait que la vitesse initiale est positive. La vitesse est

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} \\ &= -1\tfrac{m}{s^2} \cdot (t \pm 4s) \end{aligned}$$

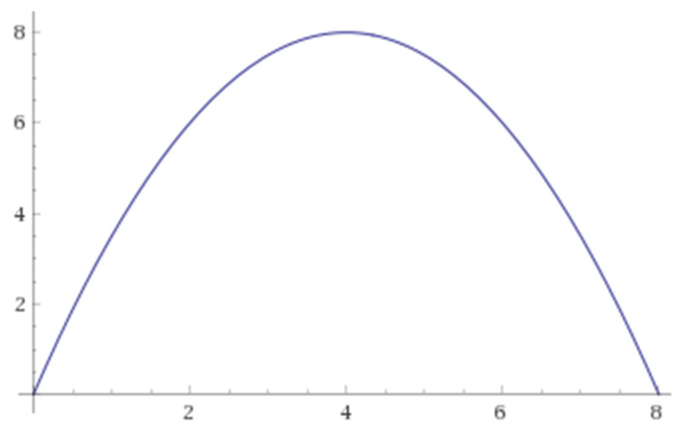
À $t = 0$, on a

$$v_0 = -1\tfrac{m}{s^2} \cdot (\pm 4s)$$

Puisqu'on sait que la vitesse est positive, on doit garder le signe négatif. La position en fonction du temps est

$$x = 8m - \tfrac{1}{2}\tfrac{m}{s^2} \cdot (t - 4s)^2$$

Voici d'ailleurs un graphique de la position en fonction du temps.



34. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé d'un seul objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_T m}{r}$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (Neil au repos à 400 000 km de la surface de la Terre)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_T m}{r} \\ &= 0 + \frac{-6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\times10^{24}\,kg\cdot 100kg}{406\,371\times10^3\,m} \\ &= -9,80806\times10^7\,J \end{aligned}$$

a) *Énergie mécanique à l'instant 2 (quand la vitesse est de 5000 m/s)*

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_T m}{r} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 100kg\cdot\left(5000\,\tfrac{m}{s}\right)^2 + \frac{-6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\times10^{24}\,kg\cdot 100kg}{r'} \\ &= 1,25\times10^9\,J - \frac{3,991\times10^{16}\,Jm}{r'} \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$\begin{aligned} E &= E' \\ -9,80806\times10^7\,J &= 1,25\times10^9\,J - \frac{3,991\times10^{16}\,Jm}{r'} \\ -1,3481\times10^9\,J &= -\frac{3,991\times10^{16}\,Jm}{r'} \\ r' &= 2,9566\times10^7\,m \\ r' &= 29\,566 km \end{aligned}$$

La distance à partir de la surface de la Terre est donc

29 566 km – 6371 km = 23 195 km

b) *Énergie mécanique à l'instant 2 (arrivée sur Terre)*

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{-GM_T m}{r} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 100kg\cdot v'^2 + \frac{-6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\times10^{24}\,kg\cdot 100kg}{6\,371\times10^3\,m} \\ &= 50kg\cdot v'^2 - 6,2560\times10^9\,J \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$E = E'$$
$$-9,80806\times 10^{7}\,J = 50kg\cdot v'^{2} - 6,2556\times 10^{9}\,J$$
$$6,1579\times 10^{9}\,J = 50kg\cdot v'^{2}$$
$$v' = 11\,098\,\tfrac{m}{s} = 11,098\,\tfrac{km}{s}$$

35. La vitesse de libération est

$$\begin{aligned} v_{lib} &= \sqrt{\frac{2GM}{R}} \\ &= \sqrt{\frac{2\cdot 6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,34\times 10^{22}\,kg}{1737\times 10^{3}\,m}} \\ &= 2375\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

36. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé d'un seul objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^{2} + \frac{-GM_{L}m}{r}$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (objet qui part de la surface de la Lune)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^{2} + \frac{-GM_{L}m}{r} \\ &= \frac{1}{2}mv^{2} + \frac{-6,674\times 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,34\times 10^{22}\,kg\cdot m}{1737\times 10^{3}\,m} \\ &= \frac{1}{2}mv^{2} - 2,8202\times 10^{6}\,\tfrac{J}{kg}\cdot m \end{aligned}$$

Énergie mécanique à l'instant 2 (quand l'objet atteint sa hauteur maximale de 3000 km et que sa vitesse est nulle)

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{-GM_L m}{r'} \\ &= 0 + \frac{-6{,}674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7{,}34\times10^{22}\,kg\cdot m}{4737\times10^3\,m} \\ &= -1{,}0341\times10^6\,\tfrac{J}{kg}\cdot m \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$E = E'$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - 2{,}8202\times10^6\,\tfrac{J}{kg}\cdot m = -1{,}0341\times10^6\,\tfrac{J}{kg}\cdot m$$

$$\frac{1}{2}v^2 - 2{,}8202\times10^6\,\tfrac{J}{kg} = -1{,}0341\times10^6\,\tfrac{J}{kg}$$

$$\frac{1}{2}v^2 = 1{,}786\times10^6\,\tfrac{J}{kg}$$

$$v = 1890\,\tfrac{m}{s}$$

37. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé d'un seul objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_T m}{r}$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (objet au repos à la surface de la Terre)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_T m}{R_T} \\ &= 0 + \frac{-6{,}674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5{,}972\times10^{24}\,kg\cdot 350kg}{6371\times10^3\,m} \\ &= -2{,}1896\times10^{10}\,J \end{aligned}$$

Énergie mécanique à l'instant 2 (quand l'objet est en orbite)

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{-GM_T m}{r'} \\ &= \frac{-GM_T m}{2r'} \\ &= \frac{-6,674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\times10^{24}kg\cdot 350kg}{2\cdot 6871\times10^3 m} \\ &= -1,0151\times10^{10}J \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$\begin{aligned} E + W_{non-cons} &= E' \\ -2,1896\times10^{10}J + W_{non-con} &= -1,0151\times10^{10}J \\ W_{non-cons} &= 1,174\times10^{10}J \end{aligned}$$

38. a) *Formule de l'énergie*

Le système étant formé d'un seul objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_T m}{r}$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (objet au repos à la surface de la Terre)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_T m}{R_T} \\ &= 0 + \frac{-GM_T m}{R_T} \end{aligned}$$

Énergie mécanique à l'instant 2 (quand l'objet est en orbite)

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{-GM_T m}{r'} \\ &= \frac{-GM_T m}{2r'} \end{aligned}$$

Utilisation de $E_{mec} + W_{ext} + W_{n.cons.} = E'_{mec}$

L'énergie donnée au satellite est donc

$$\begin{aligned}
E + W_{non-cons} &= E' \\
\frac{-GM_T m}{R_T} + W_{non-con} &= \frac{-GM_T m}{2r'} \\
W_{non-cons} &= \frac{-GM_T m}{2r'} + \frac{GM_T m}{R_T} \\
W_{non-cons} &= GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r'}\right)
\end{aligned}$$

L'énergie cinétique du satellite est ½mv². Or, la vitesse du satellite en orbite est

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

Ce qui signifie que l'énergie cinétique sur l'orbite de rayon *r'* est

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{GmM_T}{r'}$$

Ainsi, la proportion d'énergie cinétique donnée par rapport à l'énergie totale donnée est

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{2}mv^2}{W_{non-cons}} &= \frac{\frac{1}{2}\frac{GM_T m}{r'}}{GM_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r'}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{2r'}}{\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r'}\right)} \\
&= \frac{R_T}{2r' - R_T} \\
&= \frac{6371km}{2\cdot(6371km + 150km) - 6371km} \\
&= 0,9550
\end{aligned}$$

Ainsi, 95,5 % de l'énergie donnée à ce satellite en orbite basse est sous forme d'énergie cinétique.

b) Si on veut que 50 % de l'énergie donnée soit sous forme d'énergie cinétique, on doit avoir

$$0,5=\frac{R_T}{2r'-R_T}$$
$$0,5=\frac{6371km}{2r'-6371km}$$
$$r'=9556,5km$$

39. a) *Formule de l'énergie*

Le système étant formé d'un seul objet (la Lune), l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec}=\frac{1}{2}M_Lv^2+\frac{-GM_TM_L}{r}$$

Énergie mécanique à l'instant 1 (Lune en orbite autour de la Terre)

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{2}M_Lv^2+\frac{-GM_TM_L}{r}\\&=\frac{-GM_TM_L}{2r}\\&=\frac{-6,674\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot5,972\times10^{24}kg\cdot7,34\times10^{22}kg}{2\cdot384\,400\times10^3m}\\&=-3,8053\times10^{28}J\end{aligned}$$

Énergie mécanique à l'instant 2 (quand la Lune est très loin de la Terre)

$$\begin{aligned}E'&=\frac{1}{2}M_Lv'^2+\frac{-GM_TM_L}{r'}\\&=\frac{1}{2}M_Lv'^2+0\end{aligned}$$

Utilisation de $E_{mec}+W_{ext}+W_{n.cons.}=E'_{mec}$

$$E+W_{ext}=E'$$
$$-3,8053\times10^{28}J+W_{ext}=\frac{1}{2}M_Lv'^2$$
$$W_{ext}=3,8053\times10^{28}J+\frac{1}{2}M_Lv'^2$$

L'énergie minimale est donc de 3,8053 x 10^{28} J.

b) Cette énergie correspond à

$$\frac{3,8053\times10^{28}\,J}{6,3\times10^{13}\,J}=6,04\times10^{14}$$

fois la bombe atomique d'Hiroshima. C'est 604 000 milliards de fois la bombe d'Hiroshima. Méchante explosion !

40. *Formule de l'énergie*

Le système étant formé d'un seul objet (la sonde), l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{-GM_Tm}{r_T}+\frac{-GM_Lm}{r_L}$$

Il y a deux énergies gravitationnelles, car ici on doit tenir compte des énergies gravitationnelles faites par la Terre et par la Lune.

Énergie mécanique à l'instant 1 (sonde au repos à la surface de la Terre)

Quand la sonde est à la surface de la Terre, elle est à 6317 km du centre de la Terre et à 378 029 km du centre de la Lune. L'énergie est donc

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{2}mv^2+\frac{-GM_Tm}{r_T}+\frac{-GM_Lm}{r_L}\\&=0-\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot5,972\times10^{24}\,kg\cdot100kg}{6371\times10^3\,m}-\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot7,34\times10^{22}\,kg\cdot100kg}{378\,029\times10^3\,m}\\&=-6,2560\times10^9\,J-1,2959\times10^6\,J\\&=-6,2573\times10^9\,J\end{aligned}$$

Énergie mécanique à l'instant 2 (quand la sonde est au repos sur la surface de la Lune)

Quand la sonde est à la surface de la Lune, elle est à 382 663 km du centre de la Terre et à 1737 km du centre de la Lune. L'énergie est donc

$$E' = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{-GM_T m}{r_T'} + \frac{-GM_L m}{r_L'}$$
$$= 0 - \frac{6,674\times10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\times10^{24}kg\cdot 100kg}{382\,663\times10^3 m} - \frac{6,674\times10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 7,34\times10^{22}kg\cdot 100kg}{1737\times10^3 m}$$
$$= -1,0416\times10^8 J - 2,8202\times10^8 J$$
$$= -3,8618\times10^8 J$$

Utilisation de $E_{mec} + W_{ext} + W_{n.cons.} = E'_{mec}$

$$E + W_{nc} = E'$$
$$-6,2573\times10^9 J + W_{nc} = -3,8618\times10^8 J$$
$$W_{nc} = 5,871\times10^9 J$$

41. a) L’énergie mécanique est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_T m}{r}$$
$$= \frac{-GM_T m}{2r}$$
$$= \frac{-6,674\times10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\times10^{24}kg\cdot 500kg}{2\cdot 7371\times10^3 m}$$
$$= -1,3518\times10^{10} J$$

b) L’énergie gravitationnelle est

$$U_g = \frac{-GM_T m}{r}$$
$$= \frac{-6,674\times10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\times10^{24}kg\cdot 500kg}{7371\times10^3 m}$$
$$= -2,7036\times10^{10} J$$

c) L’énergie cinétique est

$$E_{mec} = E_k + U_g$$
$$-1,3518\times10^{10} J = E_k + -2,7036\times10^{10} J$$
$$E_k = 1,3518\times10^{10} J$$

Autre solution possible

La vitesse du satellite est

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{GM_T}{r}} \\ &= \sqrt{\frac{6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,972\times10^{24}\,kg}{7371\times10^3\,m}} \\ &= 7353\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

L'énergie cinétique est donc

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 500kg\cdot\left(7353\,\tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= 1,3518\times10^{10}\,J \end{aligned}$$

d) Pour qu'il se libère de la Terre, son énergie doit être positive. Au minimum, elle doit donc être nulle. On aura alors

$$\begin{aligned} E + W_{ext} &= E' \\ -1,3518\times10^{10}\,J + W_{ext} &= 0 \\ W_{ext} &= 1,3518\times10^{10}\,J \end{aligned}$$

(On a supposé que ce travail était fait par une force externe, mais on aurait pu aussi supposer que ce travail provient d'une force non conservatrice.)

42. a) Vérifions si la force respecte les 3 conditions. La première condition est

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Les dérivées sont

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial\left(5\frac{N}{m^2}\cdot yz-2\frac{N}{m}\cdot x+2\frac{N}{m}\cdot y\right)}{\partial y}=5\frac{N}{m^2}\cdot z+2\frac{N}{m}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial\left(5\frac{N}{m^2}\cdot xz-4\frac{N}{m}\cdot y+2\frac{N}{m}\cdot x\right)}{\partial x}=5\frac{N}{m^2}\cdot z+2\frac{N}{m}$$

Puisque les dérivées sont égales, la première condition est respectée.

La deuxième condition est

$$\frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial x}$$

Les dérivées sont

$$\frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial\left(5\frac{N}{m^2}\cdot yz-2\frac{N}{m}\cdot x+2\frac{N}{m}\cdot y\right)}{\partial z}=5\frac{N}{m^2}\cdot y$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x}=\frac{\partial\left(5\frac{N}{m^2}\cdot xy+6\frac{N}{m}\cdot z\right)}{\partial x}=5\frac{N}{m^2}\cdot y$$

Puisque les dérivées sont égales, la deuxième condition est respectée.

La troisième condition est

$$\frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial y}$$

Les dérivées sont

$$\frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial\left(5\frac{N}{m^2}\cdot xz-4\frac{N}{m}\cdot y+2\frac{N}{m}\cdot x\right)}{\partial z}=5\frac{N}{m^2}\cdot x$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial\left(5\frac{N}{m^2}\cdot xy+6\frac{N}{m}\cdot z\right)}{\partial y}=5\frac{N}{m^2}\cdot x$$

Puisque les dérivées sont égales, la troisième condition est respectée.

Puisque les trois conditions sont respectées, la force est conservatrice.

b) Pour trouver U, on doit faire les intégrales partielles.

L'intégrale partielle par rapport à x va nous donner tous les termes dans lesquelles il y a x seulement, x et y en même temps, x et z en même temps et x, y, et z en même temps.

$$\begin{aligned} U &= -\int F_x dx \\ &= -\int \left(5\tfrac{N}{m^2}\cdot yx - 2\tfrac{N}{m}\cdot x + 2\tfrac{N}{m}\cdot y\right)dx \\ &= -5\tfrac{N}{m^2}\cdot xyx + 1\tfrac{N}{m}\cdot x^2 - 2\tfrac{N}{m}\cdot xy + C_1 \end{aligned}$$

L'intégrale partielle par rapport à y va nous donner tous les termes dans lesquelles il y a y seulement, x et y en même temps, y et z en même temps et x, y, et z en même temps.

$$\begin{aligned} U &= -\int F_y dy \\ &= -\int \left(5\tfrac{N}{m^2}\cdot yx - 4\tfrac{N}{m}\cdot y + 2\tfrac{N}{m}\cdot x\right)dx \\ &= -5\tfrac{N}{m^2}\cdot xyx + 2\tfrac{N}{m}\cdot y^2 - 2\tfrac{N}{m}\cdot xy + C_2 \end{aligned}$$

L'intégrale partielle par rapport à z va nous donner tous les termes dans lesquelles il y a z seulement, z et x en même temps, z et y en même temps et x, y, et z en même temps.

$$\begin{aligned} U &= -\int F_z dz \\ &= -\int \left(5\tfrac{N}{m^2}\cdot xy + 6\tfrac{N}{m}\cdot z\right)dx \\ &= -5\tfrac{N}{m^2}\cdot xyx + 3\tfrac{N}{m}\cdot z^2 + C_3 \end{aligned}$$

En combinant ces résultats, on trouve que

$$U = -5\tfrac{N}{m^2}\cdot xyx + 1\tfrac{N}{m}\cdot x^2 + 2\tfrac{N}{m}\cdot y^2 + 3\tfrac{N}{m}\cdot z^2 - 2\tfrac{N}{m}\cdot xy + Cst$$

Ici, on va choisir une constante nulle.

Au point de départ (1 m, 1 m, 0 m), l'énergie potentielle est

$$\begin{aligned} U &= -5\tfrac{N}{m^2}\cdot 1m\cdot 1m\cdot 0m + 1\tfrac{N}{m}\cdot(1m)^2 + 2\tfrac{N}{m}\cdot(1m)^2 + 3\tfrac{N}{m}\cdot(0m)^2 - 2\tfrac{N}{m}\cdot 1m\cdot 1m \\ &= 0J + 1J + 2J + 0J - 2J \\ &= 1J \end{aligned}$$

Au point d'arrivée (4 m, -2 m, 3 m), l'énergie potentielle est

$$\begin{aligned} U &= -5\tfrac{N}{m^2}\cdot 4m\cdot(-2m)\cdot 3m + 1\tfrac{N}{m}\cdot(4m)^2 + 2\tfrac{N}{m}\cdot(-2m)^2 + 3\tfrac{N}{m}\cdot(3m)^2 - 2\tfrac{N}{m}\cdot 4m\cdot(-2m) \\ &= 120J + 16J + 8J + 27J + 16J \\ &= 187J \end{aligned}$$

Ainsi, le travail est

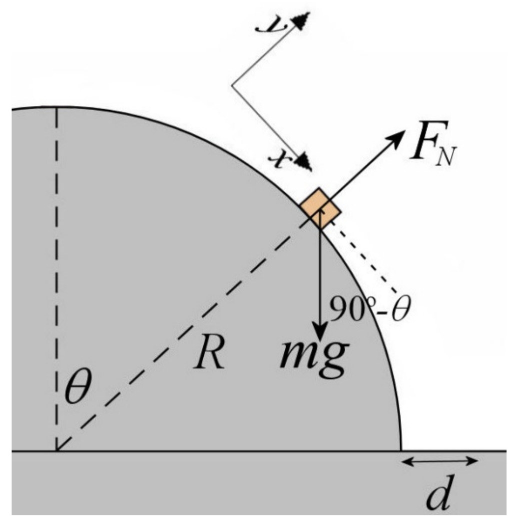
$$\begin{aligned} W &= -\Delta U \\ &= -(187J - 1J) \\ &= -186J \end{aligned}$$

43. a)

Quand la personne est en contact avec la sphère, il y a une normale. On doit donc trouver l'angle qu'il y a quand la normale devient nulle.

Il y a deux forces sur la personne.

1) La gravitation
2) La normale



En utilisant les axes montrés sur la figure, les équations des forces sont :

$$\sum F_x = mg\cos-(90°-\theta) = ma_t$$

$$\sum F_x = mg\sin-(90°-\theta) + N = -\frac{mv^2}{R}$$

La deuxième équation nous donne

$$\begin{aligned} mg\sin-(90°-\theta) + N &= -\frac{mv^2}{R} \\ -mg\cos\theta + N &= -\frac{mv^2}{R} \\ N &= mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R} \end{aligned}$$

Au départ (angle petit), le premier terme est plus grand que le deuxième et il y a une normale. À mesure que la personne glisse, l'angle augmente (ce qui fait diminuer le premier terme) et la vitesse augmente (ce qui fait augmenter le deuxième terme). À un certain angle, la normale devient nulle et le contact se perd. Quand la normale est nulle, on a

$$0 = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{r}$$

$$g\cos\theta = \frac{v^2}{r}$$

Pour trouver l'angle, on doit maintenant connaitre la vitesse en fonction de l'angle. On va trouver cette vitesse avec la conservation de l'énergie mécanique.

<u>Formule de l'énergie</u>

Comme il n'y a qu'un seul objet (la personne qui glisse), la formule de l'énergie mécanique est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

<u>Énergie mécanique à l'instant 1 (la personne est au sommet du dôme)</u>

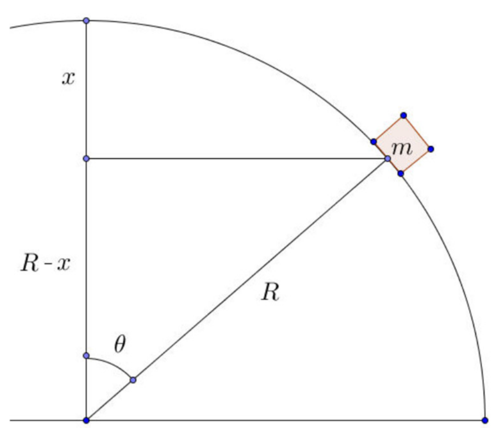
$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{1}{2}mv^2 + mgy \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(On a mis le $y = 0$ au sommet du dôme.)

<u>Énergie mécanique à l'instant 2 (la personne est à l'angle θ)</u>

$$E'_{mec} = \frac{1}{2}mv'^2 + mgy'$$

Il y a un lien entre la hauteur et l'angle. Ce lien se trouve avec la figure suivante.



La hauteur est –*x*. Sur la figure, on a

$$\cos\theta = \frac{R-x}{R}$$

On a donc

$$R\cos\theta = R - x$$
$$x = R - R\cos\theta$$
$$x = R(1-\cos\theta)$$

Ainsi, la hauteur est

$$y' = -R(1-\cos\theta)$$

L'énergie mécanique à l'instant 2 est donc

$$E'_{mec} = \frac{1}{2}mv'^2 - mgR(1-\cos\theta)$$

Conservation de l'énergie mécanique

$$E_{mec} = E'_{mec}$$
$$0 = \frac{1}{2}mv'^2 - mgR(1-\cos\theta)$$
$$\frac{1}{2}mv'^2 = mgR(1-\cos\theta)$$
$$v'^2 = 2gR(1-\cos\theta)$$

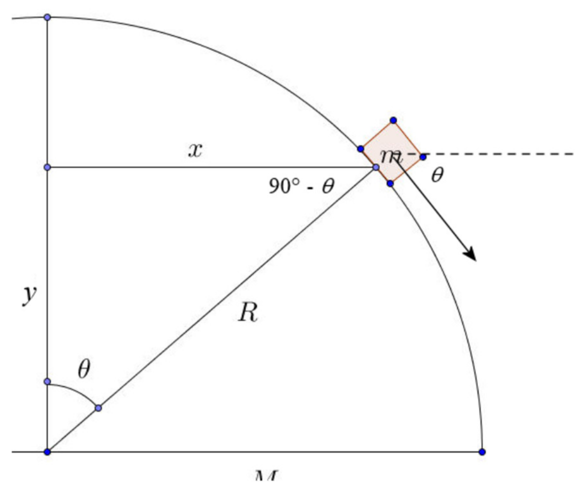
La condition pour avoir une normale nulle devient donc

$$g\cos\theta = \frac{v^2}{R}$$
$$g\cos\theta = \frac{2gR(1-\cos\theta)}{R}$$

Ce qui donne

$$
\begin{aligned}
g\cos\theta &= \frac{2gR\left(1-\cos\theta\right)}{R} \\
g\cos\theta &= 2g\left(1-\cos\theta\right) \\
\cos\theta &= 2\left(1-\cos\theta\right) \\
\cos\theta &= 2-2\cos\theta \\
3\cos\theta &= 2 \\
\cos\theta &= 2/3 \\
\theta &= 48{,}19°
\end{aligned}
$$

b) Au moment où la personne quitte la surface, la direction de la vitesse est tangente au cercle. À partir de là, c'est un projectile qui suit une trajectoire parabolique.



En prenant une origine au centre de l'hémisphère, la position initiale de l'objet est

$$
\begin{aligned}
x &= R\sin\left(48{,}19°\right) = 6m\cdot\sin\left(48{,}19°\right) = 4{,}472m \\
y &= R\cos\left(48{,}19°\right) = 6m\cdot\cos\left(48{,}19°\right) = 4m
\end{aligned}
$$

La vitesse initiale du mouvement de projectile se trouve avec

$$
\begin{aligned}
v'^2 &= 2gR\left(1-\cos\theta\right) \\
&= 2\cdot 9{,}8\tfrac{m}{s^2}\cdot 6m\cdot\left(1-\tfrac{2}{3}\right) \\
&= 39{,}2\tfrac{m^2}{s^3} \\
v' &= 6{,}261\tfrac{m}{s}
\end{aligned}
$$

Les composantes de cette vitesse (avec un axe des x vers la droite et un axe des y vers le haut) sont

$$v_x = 6,261\tfrac{m}{s} \cdot \cos\left(-48,19°\right) = 4,174\tfrac{m}{s}$$
$$v_y = 6,261\tfrac{m}{s} \cdot \sin\left(-48,19°\right) = -4,667\tfrac{m}{s}$$

Le temps d'arriver au sol est donc

$$y = y_0 + v_{0y}t - 4,9\tfrac{m}{s^2}t^2$$
$$0 = 4m - 4,667\tfrac{m}{s} \cdot t - 4,9\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2$$
$$t = 1,09025s$$

La position en x à la fin de la période de chute libre est donc

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t \\ &= 4,472m + 4,174\tfrac{m}{s} \cdot 1,09025s \\ &= 9,023m \end{aligned}$$

Comme le bord de l'hémisphère est à x = 6 m, la personne frappe le sol à 3,023 m de la sphère.