9 L'ÉNERGIE MÉCANIQUE

Un charriot de montagnes russes initialement au repos au sommet d'une pente descend la pente pour ensuite passer dans une boucle telle qu'illustrée sur la figure. Le rayon de la boucle est de 25 m. Si la hauteur initiale du charriot est de 100 m, quelle est la vitesse du charriot au point le plus haut de la boucle ?

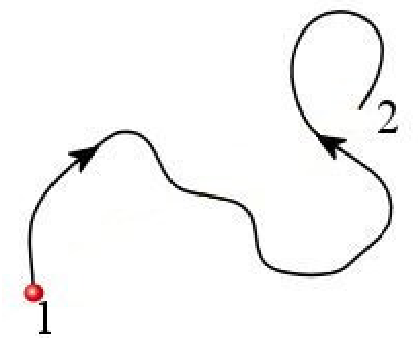
moon.com/2011/05/summertime-thrills-part-2/

Découvrez la réponse à cette question dans ce chapitre.

9.1 L'ÉNERGIE GRAVITATIONNELLE

Le travail fait par la force de gravitation

Supposons qu'on déplace un objet d'une position 1 à une position 2 comme illustré sur la figure.



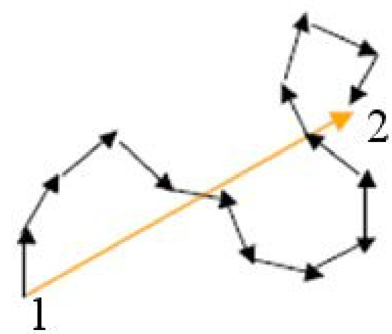
On va trouver le travail fait par la force de gravitation sur l'objet. Comme l'angle entre le déplacement et la force change sans cesse, il faut calculer ce travail avec une intégrale.

$$W_g = \int_1^2 \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds}$$

Puisque la force est constante, on peut la sortir de l'intégrale pour obtenir

$$W_g = \vec{F} \cdot \int_1^2 \overrightarrow{ds}$$

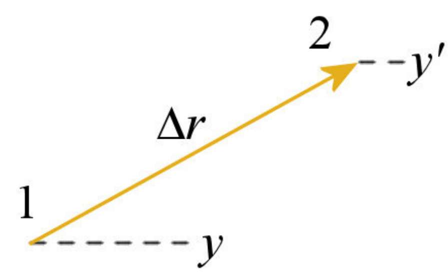
Or, cette intégrale est la somme des vecteurs déplacements infinitésimaux le long de la trajectoire. Cette somme ressemble à ce qu'on peut voir sur cette figure (quoiqu'il y aurait beaucoup plus de vecteurs en réalité).



On remarque alors que cette somme est simplement un vecteur allant directement du point 1 au point 2. Le travail devient donc

$$W_g = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r}$$

où le vecteur Δr est un vecteur allant directement du point 1 au point 2. Le travail est donc



$$\begin{aligned} W_g &= \vec{F}_g \cdot \overrightarrow{\Delta r} \\ &= F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z \end{aligned}$$

Avec des axes orientés de façon conventionnelle (y vers le haut), les composantes x et z de la force sont nulles. Il ne reste que

$$\begin{aligned} W_g &= F_y \Delta y \\ &= -mg\Delta y \\ &= -mg\left(y' - y\right) \\ &= -\left(mgy' - mgy\right) \end{aligned}$$

On remarque que le travail fait par la force de gravitation entre les points 1 et 2 est lié à la variation de mgy. On a donné le nom d'*énergie gravitationnelle* à cette quantité et on la note U_g.

Énergie gravitationnelle

$$U_g = mgy$$

On peut aussi appeler cette énergie *l'énergie potentielle gravitationnelle*. On peut alléger un peu en laissant tomber le terme *potentielle*. (Nous verrons pourquoi plus loin.)

Le travail fait par la force gravitationnelle devient donc

$$\begin{aligned} W_g &= -\left(mgy' - mgy\right) \\ &= -\left(U_g' - U_g\right) \end{aligned}$$

Pour obtenir finalement

Le travail fait par la force de gravitation

$$W_g = -\Delta U_g$$

On obtient ainsi une façon très rapide de calculer le travail fait par la force de gravitation.

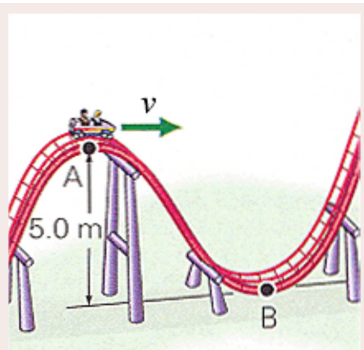
Remarquez qu'on aurait très bien pu définir une énergie gravitationnelle valant

$$U_g = mgy + \text{constante}$$

ce qui aurait donné exactement les mêmes résultats, car la seule chose qui importe pour calculer le travail, c'est la variation de l'énergie. En calculant la variation, les constantes se seraient annulées et on aurait obtenu les mêmes résultats. Or, l'ajout de cette constante a exactement le même effet que de rendre le choix de $y = 0$ arbitraire. Nous devrons donc choisir, à chaque problème, où on place le $y = 0$.

Exemple 9.1.1

Un charriot de montagnes russes (ayant une masse de 1000 kg, incluant les occupants) descend une pente telle qu'illustrée sur la figure. Quel est le travail fait par la force de gravitation sur le charriot quand il passe du point A au point B ?



morkphysics.wordpress.com/question-3

On va calculer le travail avec

$$W_g = -\Delta U_g$$

Pour calculer les U_g, on doit choisir notre $y = 0$. Disons qu'on le met au sol.

L'énergie gravitationnelle au point A est

$$\begin{aligned} U_g &= mgy \\ &= 1000kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg} \cdot 5m \\ &= 49\,000J \end{aligned}$$

L'énergie gravitationnelle au point B est

$$\begin{aligned} U_g' &= mgy' \\ &= 1000kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg} \cdot 0m \\ &= 0J \end{aligned}$$

Le travail est donc

$$\begin{aligned} W_g &= -\Delta U_g \\ &= -\left(U_g' - U_g\right) \\ &= -\left(0J - 49\,000J\right) \\ &= 49\,000J \end{aligned}$$

Si on avait mis le $y = 0$ au point A, on aurait eu $U_g = 0$ J et $U_g' = -49\,000$ J et la variation d'énergie gravitationnelle aurait été la même.

Ce calcul, relativement facile, aurait été assez compliqué avec $W = F\Delta s \cos\theta$ parce que l'angle entre la force et le déplacement change continuellement durant la descente. En effet, la descente ne se fait pas en ligne droite, mais plutôt en suivant une courbe d'inclinaison variable, ce qui fait que l'angle change constamment. Le calcul du travail avec $W = F\,\Delta s \cos\theta$ aurait donc dû être fait avec une intégrale alors qu'une simple soustraction a suffi ici avec les énergies.

9.2 LES FORCES CONSERVATIVES

Peut-on trouver l'énergie U pour d'autres forces ?

Si on est parvenu à simplifier grandement le calcul du travail fait par la force gravitationnelle en définissant une énergie gravitationnelle, on peut se demander si c'est possible de le faire pour d'autres forces. Cela nous permettrait de trouver le travail fait avec l'énergie potentielle à partir de la formule suivante.

Le travail à partir de l'énergie potentielle

$$W = -\Delta U$$

Nous verrons un peu plus loin pourquoi U porte le nom d'*énergie potentielle*, même s'il n'y a rien de potentielle dans l'énergie potentielle.

Malheureusement, U existe seulement pour quelques forces. Pour beaucoup de forces, U n'existe pas et il est impossible de calculer le travail à l'aide de U. Il existe donc deux types de forces.

1) Les forces conservatives : forces pour lesquelles on peut calculer le travail avec U.
2) Les forces non conservatives : forces pour lesquelles on ne peut pas calculer le travail avec U.

Comme U ne dépend que de la position, il faut, pour que le U d'une force existe, que la force ne dépende elle aussi que de la position. Il faut donc que la force soit toujours la même quand l'objet est à une certaine position. Si un objet se déplace pour finalement revenir à la même position, la force sur l'objet doit toujours être la même, peu importe ce qui s'est produit précédemment.

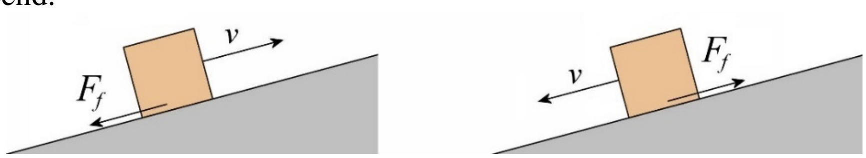
Pour ce qu'on fait ici, cette condition sera suffisante pour déterminer si une force est conservative. Sachez cependant qu'il y a certaines forces qui dépendent uniquement de la position et qui ne sont pas conservative. Si vous voulez plus de détails sur les conditions à respecter pour qu'une force soit conservative, vous pouvez consulter ce document.
https://physique.merici.ca/mecanique/Epot2D3D.pdf

Quelles forces sont conservatives ?

Si vous avez affaire à une force qui ne dépend pas uniquement de la position, la force n'est pas conservative et il n'y a pas d'énergie potentielle U associée à cette force. À partir de cette simple information, on peut déterminer quelles sont les forces conservatives.

La force de friction

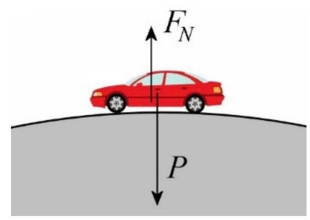
Imaginons qu'un bloc glisse sur une pente et qu'il y a de la friction. Le bloc monte la pente puis redescend.



Quand le bloc revient à la même place sur la pente en redescendant, la force n'est pas la même puisque la direction de la force est différente. Cela signifie que la force ne dépend pas uniquement de la position puisqu'elle est différente quand l'objet est à la même position. Cette force dépend aussi de la direction de la vitesse. La force n'est donc pas conservative et il n'existe pas d'énergie potentielle associée à la force de friction.

La normale

Prenons l'exemple d'une voiture passant sur une bosse pour déterminer si cette force est conservative. Si la vitesse de la voiture est v, la normale est donnée par

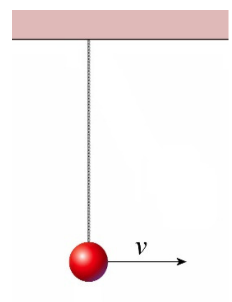


$$F_N = mg - \frac{mv^2}{r}$$

On voit que la normale dépend de la vitesse de la voiture. Plus la voiture va vite, plus la normale est petite. Comme la normale peut être différente même si la voiture est à la même position, elle n'est pas une force conservative.

La tension

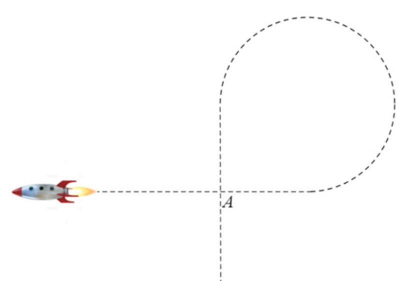
Prenons l'exemple d'un pendule oscillant au bout d'une corde pour déterminer si cette force est conservative. Si la vitesse du pendule est v au point le plus bas, la tension est donnée par



$$T = mg + \frac{mv^2}{r}$$

La tension dépend de la vitesse du pendule. Plus la pendule va vite, plus la tension est grande. Comme la tension peut être différente même si le pendule est à la même position, elle n'est pas une force conservative.

La force faite par une fusée



Imaginons que la fusée ait la trajectoire montrée sur la figure. Quand la fusée est passée au point A pour la première fois, la force faite par le moteur était vers le haut. Quand la fusée est passée au point A pour la deuxième fois, la force était vers la gauche. Ainsi, la force était différente même si la position était la même, ce qui montre que la force ne dépend pas uniquement de la position. La force faite par le moteur de la fusée n'est pas conservative.

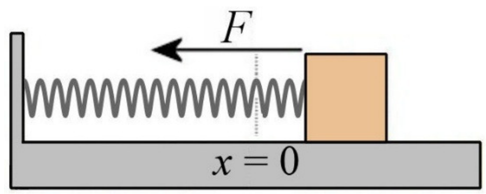
La gravitation

La force de gravitation est conservative puisqu'elle ne dépend que de la position de l'objet. Quand un objet revient à la même position, la force est toujours la même : mg vers le bas.

Il existe donc une énergie potentielle gravitationnelle. On avait d'ailleurs trouvé cette énergie dans la première section de ce chapitre.

Le ressort

La force faite par un ressort est une force qui ne dépend que de la position.



Si la force ne dépend que de la position, alors la force doit toujours être la même quand l'objet revient à la même position. C'est effectivement ce qui se passe ici. Si le ressort est étiré de 2 cm quand on place la masse à un certain endroit, la force faite par le ressort sera toujours la même à cet endroit, peu importe la situation. Comme cette force ne dépend que de la position, c'est une force conservative et il existe donc une énergie potentielle du ressort.

Les liens entre *U* et *F* quand *U* existe

On sait que U existe quand F dépend uniquement de la position. Reste à trouver quel est le lien entre U et F. Cela nous permettra, entres autres, de trouver la formule de U à partir de la formule de F.

On va trouver ce lien quand il n'y a qu'une seule composante à la force et que cette composante ne dépend que de la variable associée à cette composante (par exemple, on aurait que la composante F_x et cette composante ne dépendrait que de x.) On trouve la formule de l'énergie potentielle en supposant que l'objet fait un tout petit déplacement Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} \\ &= F_x dx \end{aligned}$$

(Les autres composantes sont absentes puisque la force n'a pas de composantes en y ou z.) Mais puisque le travail est égal à $-dU$ pour un très petit déplacement quand U existe, on a

$$-dU = F_x dx$$

Si on intègre, on arrive à

Calcul de U à partir de F_x (en une dimension)

$$U = -\int F_x dx$$

On peut aussi trouver F à partir de U. Si on isole F_x dans l'équation $-dU = F_x dx$, on obtient

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

Si on avait fait des déplacements en y ou z, on aurait la même équation, mais avec des y et des z à la place de x. On a donc les équations suivantes.

Calcul des composantes de *F* à partir de *U*

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

(Les dérivées deviennent des dérivées partielles en plusieurs dimensions parce qu'on dérive par rapport à une seule variable alors qu'il y a 3 variables de position.)

Exemple 9.2.1

Trouver la force (grandeur et direction) qui s'exerce sur un objet à la position x = 1 m et y = 2 m si l'énergie potentielle de l'objet est donnée par

$$U = -1\tfrac{N}{m^2}x^3 + 1\tfrac{N}{m^2}y^2 - 1\tfrac{N}{m}xy + 2J$$

La composante en x de la force est

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ &= 3\tfrac{N}{m^2}x^2 + 1\tfrac{N}{m}y \end{aligned}$$

À x = 1 m et y = 2 m, cette force est

$$\begin{aligned} F_x &= 3\tfrac{N}{m^2}\cdot(1m)^2 + 1\tfrac{N}{m}\cdot 2m \\ &= 5N \end{aligned}$$

La composante en y de la force est

$$\begin{aligned} F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\ &= -2\tfrac{N}{m^2}y + 1\tfrac{N}{m}x \end{aligned}$$

À x = 1 m et y = 2 m, cette force est

$$\begin{aligned} F_y &= -2\tfrac{N}{m^2}\cdot 2m + 1\tfrac{N}{m}\cdot 1m \\ &= -3N \end{aligned}$$

La grandeur de la force est donc

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$= \sqrt{(5N)^2 + (3N)^2}$$
$$= 5{,}831N$$

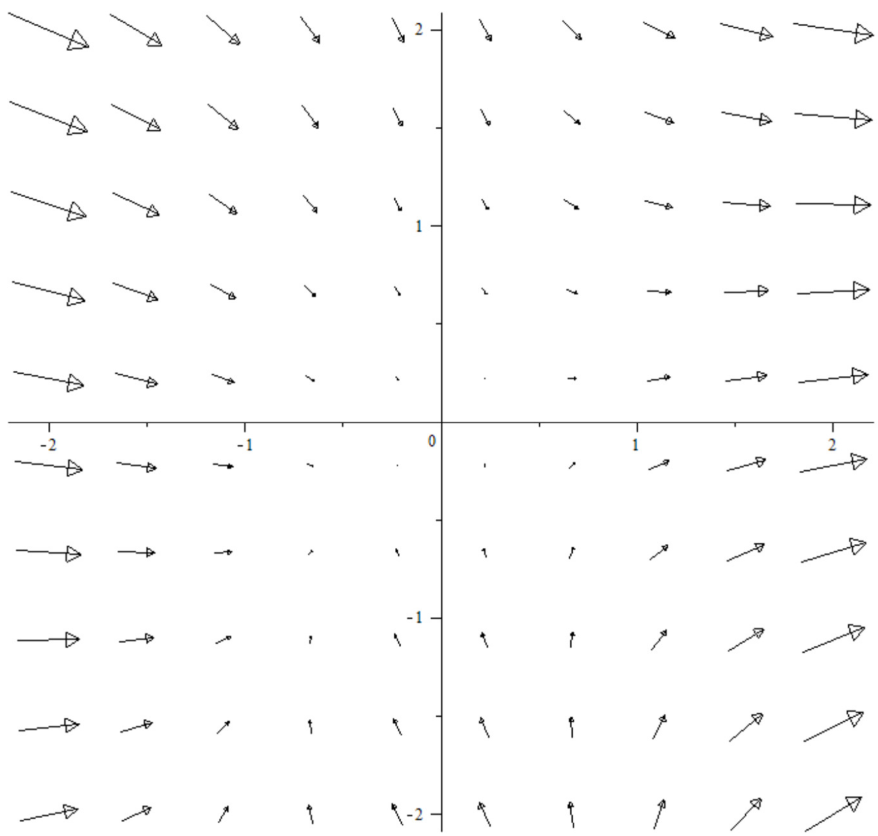
et la direction de la force est

$$\theta = \arctan \tfrac{F_y}{F_x}$$
$$= \arctan \tfrac{-3N}{5N}$$
$$= -30{,}96°$$

En fait, on peut s'amuser et trouver la force à plusieurs endroits dans le plan *xy*. Voici un graphique montrant la force associée à l'énergie potentielle

$$U = -1\tfrac{N}{m^2}x^3 + 1\tfrac{N}{m^2}y^2 - 1\tfrac{N}{m}xy + 2J$$

à différents endroits.



On voit alors facilement que la force est dans la direction calculée dans l'exemple au point (1 m, 2 m).

Exemple 9.2.2

La force exercée sur un objet pouvant uniquement se déplacer le long de l'axe des x est donnée par la formule suivante.

$$F_x = 8\tfrac{N}{m^3}x^3$$

a) Quelle est la formule de l'énergie potentielle U associée à cette force ?

La formule de U est

$$\begin{aligned} U &= -\int F_x dx \\ &= -\int 8\tfrac{N}{m^3}x^3 dx \\ &= -2\tfrac{N}{m^3}x^4 + cst \end{aligned}$$

La valeur de la constante est arbitraire, on peut utiliser n'importe quelle valeur.

b) Quelle est la différence d'énergie potentielle de cet objet s'il se déplace de x = -1 m à x = 3 m ?

La variation de l'énergie potentielle est

$$\begin{aligned} \Delta U &= \left(-2\tfrac{N}{m^3}\cdot(3m)^4 + cst\right) - \left(-2\tfrac{N}{m^3}\cdot(-1m)^4 + cst\right) \\ &= -162J - -2J \\ &= -160J \end{aligned}$$

L'énergie potentielle a donc baissé de 160 J. (On voit également que la valeur de la constante s'annule. C'est pour cela que sa valeur n'a pas d'importance.)

c) Quel est le travail fait sur cet objet par cette force s'il se déplace de x = -1 m à x = 3 m ?

Puisque W = -ΔU, on a

$$W = 160J$$

Le calcul du U à partir de F pour un mouvement en 2 ou 3 dimensions est beaucoup plus compliqué. Pour voir comment ce calcul se fait, vous pouvez examiner ce document (dont le lien avait déjà été donné un peu plus tôt dans cette section).
https://physique.merici.ca/mecanique/Epot2D3D.pdf

Il y a cependant un cas simple en 3 dimensions. Dans le document suivant,
https://physique.merici.ca/mecanique/Force-r.pdf
on montre que s'il y a une force d'attraction ou répulsion entre 2 objets et que la grandeur de cette force dépend uniquement de la distance r entre les objets, alors la force est conservative. On y montre également que le lien entre la F et U dans ce cas est

$$F = -\frac{dU}{dr} \qquad \text{et} \qquad U = -\int F dr$$

Ce sont essentiellement les mêmes formules que les formules données précédemment, mais pour la composante r de la force. Notez que ces formules ont été faites avec un axe des r positif en s'éloignant de l'objet qui fait la force. F est donc positive s'il y a une repulsion entre les objets et négative s'il y a une attraction entre les objets.

Exemple 9.2.3

L'énergie potentielle d'une charge électrique près d'une tige chargée est donnée par

$$U = 60J \cdot \ln\left(\frac{r}{5m}\right)$$

où r est la distance entre la charge et la tige. Quelle est la force qui s'exerce sur la charge quand elle est à 2 m de la tige ?

La formule de la force sur la charge est

$$\begin{aligned} F &= -\frac{dU}{dr} \\ &= -\frac{d}{dr}\left(60J \cdot \ln\left(\frac{r}{5m}\right)\right) \\ &= -60J \cdot \frac{\frac{1}{5m}}{\frac{r}{5m}} \\ &= -\frac{60J}{r} \end{aligned}$$

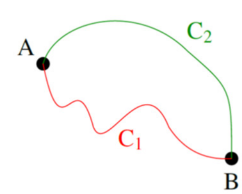
À $r = 2$ m, la force est

$$\begin{aligned} F &= -\frac{60J}{2m} \\ &= -30N \end{aligned}$$

Comme la force est négative, il s'agit d'une force d'attraction.

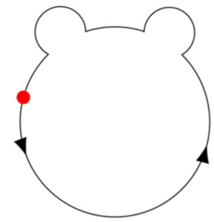
Le travail ne dépend pas du trajet pour une force conservative

Quand U existe, le travail dépend uniquement de la différence d'énergie potentielle entre la position de départ et de la position d'arrivée.



Cela signifie que, pour une force conservative, le travail fait par la force sur un objet allant d'un endroit à un autre est le même pour toutes les trajectoires (comme les trajectoires C_1 et C_2 sur la figure) si ces trajectoires ont toutes le même point de départ et le même point d'arrivée. Si la force n'est pas conservative, le travail peut dépendre du trajet emprunté pour aller d'un point à l'autre.

(Cela signifie aussi que le travail fait par une force conservative est nul si on déplace un objet le long d'une trajectoire fermée, comme sur la figure de gauche.)



La formule de l'énergie potentielle totale

Ainsi, parmi les forces vues dans ce cours, les seules forces conservatives sont la force de gravitation et la force faite par un ressort. On peut donc trouver l'énergie potentielle U pour chacune de ces forces conservatives. Ces énergies sont notées ainsi :

U_g : Énergie gravitationnelle
U_R : Énergie du ressort

La formule de l'énergie potentielle totale est donc

Énergie potentielle d'un système

$$U = U_g + U_R$$

L'énergie gravitationnelle

On connait déjà la formule pour l'énergie gravitationnelle. On peut toutefois la démontrer à nouveau. On sait que la force est

$$F_y = -mg$$

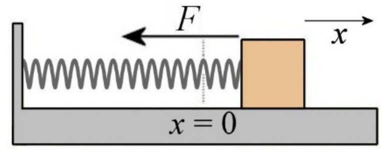
L'énergie potentielle gravitationnelle est donc

$$\begin{aligned} U_g &= -\int F_y dy \\ &= -\int (-mg)\, dy \\ &= mgy + cst \end{aligned}$$

C'est ce qu'on avait obtenu à la section 9.1.

L'énergie du ressort

On va trouver la formule de l'énergie du ressort en examinant le mouvement horizontal d'une masse fixée à un ressort. Avec un axe des x vers la droite et un $x = 0$ à la position de



la masse quand le ressort n'est ni étiré ni comprimé, la force sur l'objet est $F = -kx$ (le signe négatif est là pour indiquer la direction de la force). L'énergie potentielle du ressort est donc

$$\begin{aligned} U &= -\int F_x dx \\ &= -\int -kx dx \\ &= \tfrac{1}{2} kx^2 + Cst \end{aligned}$$

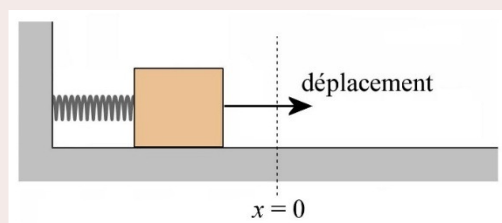
Puisque la constante est arbitraire, on va lui donner une valeur nulle. On a donc

Énergie d'un ressort

$$U_R = \frac{1}{2} kx^2$$

Avec l'énergie gravitationnelle *mgy*, la constante d'intégration nous permet de changer la position de l'origine $y = 0$. La constante permet de faire cela uniquement si l'énergie est une fonction linéaire de la position. Avec le ressort, la constante ne sert à rien puisqu'elle ne permet pas de changer la position de l'origine $x = 0$ quand x est au carré dans la fonction. Le $x = 0$ doit donc être à la position où le ressort n'est ni étiré ni comprimé.

Exemple 9.2.2



Un ressort ayant une constante de 120 N/m est fixé à un bloc de 5 kg. Quel est le travail fait par le ressort sur le bloc quand le ressort passe d'une compression de 3 cm à un étirement de 1 cm ?

Dans ce problème, on doit calculer le travail fait entre ces deux instants :

Instant 1 : ressort comprimé de 3 cm.
Instant 2 : ressort étiré de 1 cm.

L'énergie du ressort à l'instant 1 est

$$\begin{aligned} U_R &= \frac{1}{2} kx^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 120 \tfrac{N}{m} \cdot (0,03m)^2 \\ &= 0,054J \end{aligned}$$

L'énergie du ressort à l'instant 2 est

$$U_R' = \frac{1}{2} kx'^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 120 \tfrac{N}{m} \cdot (0,01m)^2$$
$$= 0,006J$$

Le travail fait par le ressort est donc

$$\begin{aligned} W_R &= -\Delta U_R \\ &= -(0,006J - 0,054J) \\ &= 0,048J \end{aligned}$$

9.3 LA CONSERVATION DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE

Principe de conservation de l'énergie mécanique

Examinons ce qui arrive s'il n'y a que des forces conservatives qui font un travail sur un objet. Nous aurons alors

$$W_{net} = -\Delta U$$

où U représente la somme de toutes les énergies potentielles.

On obtient le travail net, car les travaux faits par toutes les forces qui font une force sur l'objet sont inclus dans notre énergie potentielle.

On sait aussi, selon le chapitre précédent, que

$$W_{net} = \Delta E_k$$

En jumelant ces deux équations, on trouve que

$$-\Delta U = \Delta E_k$$

pour arriver à

$$\begin{aligned} \Delta E_k + \Delta U &= 0 \\ E'_k - E_k + U' - U &= 0 \\ (E'_k + U') - (E_k + U) &= 0 \\ \Delta(E_k + U) &= 0 \end{aligned}$$

Avec la définition suivante,

Énergie mécanique

$$E_{mec} = E_k + U$$

on arrive à

$$\Delta E_{mec} = 0$$

ou encore à

$$E'_{mec} - E_{mec} = 0$$
$$E_{mec} = E'_{mec}$$

Ce qui nous donne le principe suivant.

Principe de conservation de l'énergie mécanique

$$\Delta E_{mec} = 0$$

ou

$$E_{mec} = E'_{mec}$$

ou

$$E_{mec} = \text{constante}$$

On parle de conservation quand quelque chose reste identique. C'est le cas ici, puisqu'on peut voir, selon la deuxième équation, que la valeur de l'énergie mécanique reste la même. La première équation nous dit que la variation de l'énergie mécanique est nulle, ce qui est une autre façon de dire qu'elle ne change pas.

Rappelez-vous cependant cette restriction :

Le principe de conservation de l'énergie mécanique n'est valide que si le travail est fait uniquement par des forces conservatives.

Il peut y avoir des forces non conservatives, mais elles ne doivent pas faire de travail.

On comprend tout à coup d'où vient l'expression *forces non conservatives*. S'il y a une force non conservative qui fait un travail, l'énergie mécanique n'est pas conservée.

Galilée est le premier à utiliser le principe de conservation de l'énergie mécanique dans une forme primitive. L'idée est ensuite développée par Leibniz en 1686, mais il faut attendre 1750 avant d'avoir une formulation complète. Si vous voulez connaitre l'histoire de la découverte de la loi de la conservation de l'énergie, cliquez sur ce lien.
https://physique.merici.ca/mecanique/decouverteEmec.pdf

Méthode de résolution

On peut maintenant appliquer le principe de conservation de l'énergie mécanique pour résoudre des problèmes. La méthode est relativement simple.

1) On fait la formule de l'énergie mécanique (voir section suivante).

2) On trouve l'énergie mécanique à un certain moment (instant 1). On va noter cette énergie E.

3) On trouve l'énergie mécanique à un autre moment (instant 2). On va noter cette énergie E'.

4) On égalise ces deux énergies mécaniques puisque l'énergie mécanique est conservée.

$$E = E'$$

5) On résout cette équation.

La formule de l'énergie mécanique d'un système

Pour faire la formule de l'énergie, les règles sont assez simples, car il n'y a pas énormément de forces conservatives dans ces notes. L'énergie mécanique est simplement la somme des énergies cinétiques, des énergies gravitationnelles et des énergies des ressorts. Les règles pour faire la formule de l'énergie mécanique sont donc :

1) $\frac{1}{2}mv^2$ pour chaque objet du système.

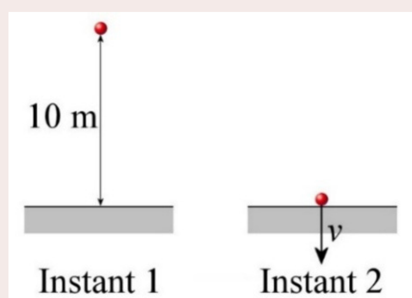
2) mgy pour chaque objet du système.

3) $\frac{1}{2}kx^2$ pour chaque ressort dans le système.

Comme le nombre d'objets et de ressorts ne change pas d'un moment à l'autre, la formule de l'énergie mécanique à l'instant 1 est exactement la même que la formule de l'énergie mécanique à l'instant 2.

Exemple 9.3.1

Un objet de 4 kg tombe en chute d'une hauteur de 10 m avec une vitesse initiale nulle. À quelle vitesse va-t-il frapper le sol ?



Formule de l'énergie mécanique

Le système étant formé uniquement d'un objet, l'énergie mécanique du système est

$$E_{mec} = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Énergie à l'instant 1

L'énergie à l'instant 1 est

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}mv^2 + mgy \\ &= 0 + 4kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot 10m \\ &= 392J \end{aligned}$$

Nous avons choisi de mettre le $y = 0$ au niveau du sol. On ne peut plus le changer par la suite.

Énergie à l'instant 2

À l'instant 2 (juste avant que la balle frappe le sol), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E' &= \tfrac{1}{2}mv'^2 + mgy' \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot 4kg \cdot v'^2 + 0 \\ &= 2kg \cdot v'^2 \end{aligned}$$

L'instant 2 doit être juste avant que la balle frappe le sol parce que la force normale va faire un travail sur la balle dès qu'elle frappe le sol. Comme la normale n'est pas une force conservative, l'énergie mécanique de la balle cessera d'être conservée à partir du moment où la balle touche le sol.

Conservation de l'énergie mécanique

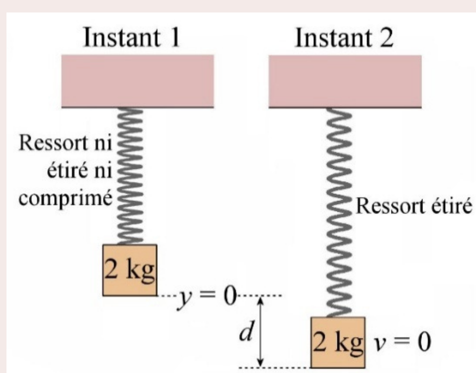
En égalant les deux énergies mécaniques trouvées, on obtient

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 392J &= 2kg \cdot v'^2 \\ v' &= 14\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

La balle frappe donc le sol à 14 m/s. Notez qu'on obtient toujours la grandeur de la vitesse. La conservation de l'énergie ne donne pas la direction de la vitesse.

Remarquez aussi que ce n'est pas la seule façon de faire ce problème. On aurait pu le faire avec ce qu'on a appris au chapitre 1 et on aurait obtenu le même résultat.

Exemple 9.3.2



Un bloc de 2 kg est suspendu au plafond par un ressort ayant une constante de 10 N/m. Initialement, le ressort n'est pas étiré ni comprimé et le bloc a une vitesse nulle. On laisse alors tomber le bloc.

a) Quel sera l'étirement maximal du ressort ?

Formule de l'énergie mécanique

Comme le système est composé d'une masse et d'un ressort, l'énergie du système est

$$E_{mec} = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgy + \tfrac{1}{2}kx^2$$

Énergie à l'instant 1

À l'instant 1, l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}mv^2 + mgy + \tfrac{1}{2}kx^2 \\ &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a placé notre $y = 0$ à la position initiale de la masse.

Énergie à l'instant 2

Dans la configuration à l'instant 2, la masse est descendue d'une distance d. Comme la vitesse de la masse est nulle quand on est à l'étirement maximal, l'énergie à ce moment est

$$\begin{aligned} E' &= \tfrac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \tfrac{1}{2}kx'^2 \\ &= 0 + 2kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg} \cdot (-d) + \tfrac{1}{2} \cdot 10\tfrac{N}{m} \cdot d^2 \\ &= -19{,}6N \cdot d + 5\tfrac{N}{m} \cdot d^2 \end{aligned}$$

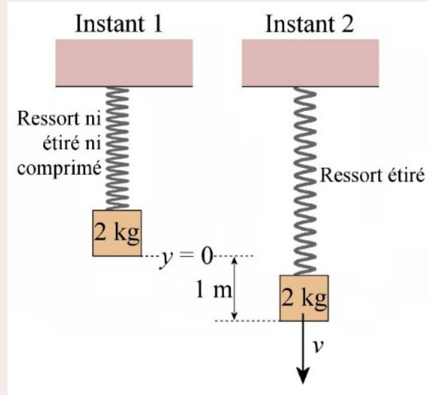
Conservation de l'énergie mécanique

En égalant les énergies, on obtient

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 0 &= -19{,}6N \cdot d + 5\tfrac{N}{m} \cdot d^2 \end{aligned}$$

On peut résoudre cette équation pour obtenir $d = 0$ et $d = 3{,}92$ m. En fait, on obtient un peu plus que ce qu'on voulait. Comme on a imposé que la vitesse est nulle pour *E'*, nous avons trouvé tous les endroits où la vitesse est nulle. C'est pour ça qu'on retrouve la position initiale ($d = 0$) puisque la masse avait alors une vitesse nulle. Notre autre réponse est la réponse qu'on cherche : un étirement du ressort de 3,92 m.

b) Quelle sera la vitesse du bloc quand le ressort est étiré de 1 m ?



Énergie à l'instant 1

À l'instant 1, l'énergie est la même qu'en a) et on a donc E = 0 J.

Énergie à l'instant 2

Quand le ressort est étiré d'un mètre, l'énergie du système est

$$\begin{aligned} E' &= \tfrac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \tfrac{1}{2}kx'^2 \\ &= \tfrac{1}{2}2kg \cdot v'^2 + 2kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot (-1m) + \tfrac{1}{2} \cdot 10\tfrac{N}{m} \cdot (1m)^2 \\ &= 1kg \cdot v'^2 - 19,6J + 5J \\ &= 1kg \cdot v'^2 - 14,6J \end{aligned}$$

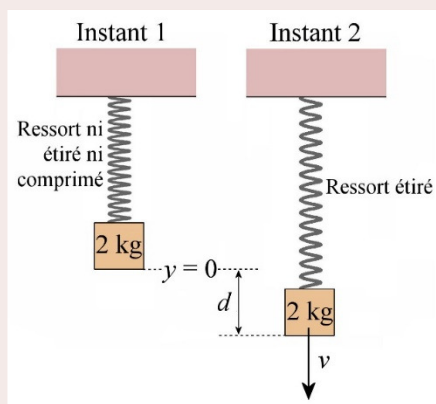
Conservation de l'énergie mécanique

En égalant cette énergie à l'énergie à l'instant 1, on a

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 0 &= 1kg \cdot v'^2 - 14,6J \\ v' &= 3,82\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Notez que cette vitesse peut être vers le haut ou vers le bas puisque la masse oscillera après qu'on l'aura relâché. Des fois, elle ira vers le haut, des fois, elle ira vers le bas quand le ressort sera étiré de 1 m.

c) Quel sera l'étirement du ressort quand l'énergie du ressort est égale à l'énergie cinétique du bloc ?



Énergie à l'instant 1

À l'instant 1, l'énergie est la même qu'en a) et on a donc E = 0 J.

Énergie à l'instant 2

À l'instant 2, le ressort est étiré de d et le bloc est à une hauteur de $-d$. L'énergie du système est donc

$$\begin{aligned} E' &= \tfrac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \tfrac{1}{2}kx'^2 \\ &= \tfrac{1}{2}mv'^2 + mg(-d) + \tfrac{1}{2}kd^2 \end{aligned}$$

$$= \tfrac{1}{2}mv'^2 - mgd + \tfrac{1}{2}kd^2$$

Puisqu'à l'instant 2 l'énergie du ressort est égale à l'énergie cinétique du bloc

$$\tfrac{1}{2}kd^2 = \tfrac{1}{2}mv'^2$$

on a

$$\begin{aligned} E' &= \tfrac{1}{2}mv'^2 - mgd + \tfrac{1}{2}kd^2 \\ &= \tfrac{1}{2}kd^2 - mgd + \tfrac{1}{2}kd^2 \\ &= kd^2 - mgd \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

En égalant les énergies aux instants 1 et 2, on a

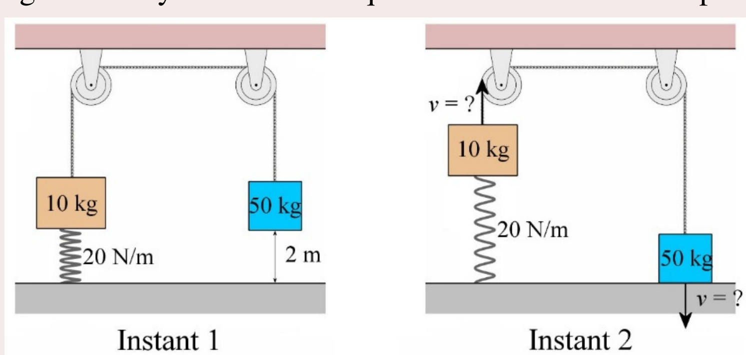
$$E = E'$$
$$0 = kd^2 - mgd$$

Une solution de cette équation est $d = 0$. Effectivement, l'énergie cinétique et l'énergie du ressort sont égales à l'instant 1 puisqu'elles sont toutes deux égales à 0. L'autre solution est

$$0 = kd^2 - mgd$$
$$kd^2 = mgd$$
$$kd = mg$$
$$d = \frac{mg}{k}$$
$$d = \frac{2kg \cdot 9{,}8\frac{N}{kg}}{10\frac{N}{m}}$$
$$d = 1{,}96m$$

Exemple 9.3.3

On laisse tomber le bloc de 50 kg dans le système suivant qui était initialement au repos. Au départ, le ressort n'est ni étiré ni comprimé. Quelle sera la vitesse du bloc de 50 kg juste avant de frapper le sol ?



Formule de l'énergie mécanique

Ce système est composé de 2 blocs et de 1 ressort. La formule de l'énergie mécanique est donc

$$E_{mec} = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + m_1 g y_1 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 + m_2 g y_2 + \tfrac{1}{2} k x^2$$

Pour calculer l'énergie gravitationnelle, on doit choisir un $y = 0$. On pourrait choisir de le placer au sol, mais il semble que ce sera difficile de déterminer la hauteur du bloc de 10 kg par rapport à ce $y = 0$ parce qu'on ne sait pas la hauteur initiale de ce bloc par rapport au sol. La beauté de l'énergie gravitationnelle, c'est qu'**on peut choisir un $y = 0$ différent pour chaque bloc !** Nous allons ici prendre des $y = 0$ correspondant à la position initiale de chaque bloc.

Énergie à l'instant 1

L'énergie à l'instant 1 est donc

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + m_1 g y_1 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 + m_2 g y_2 + \tfrac{1}{2} k x^2 \\ &= \tfrac{1}{2} m_1 \left(0 \tfrac{m}{s}\right)^2 + m_1 g \left(0m\right) + \tfrac{1}{2} m_2 \left(0 \tfrac{m}{s}\right)^2 + m_2 g \left(0m\right) + \tfrac{1}{2} k \left(0m\right)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Énergie à l'instant 2

L'énergie juste avant que le bloc de 50 kg ne frappe le sol (instant 2) est

$$\begin{aligned} E' &= \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + m_1 g y_1' + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2 + m_2 g y_2' + \tfrac{1}{2} k x'^2 \\ &= \tfrac{1}{2} m_1 v'^2 + m_1 g \left(2m\right) + \tfrac{1}{2} m_2 v'^2 + m_2 g \left(-2m\right) + \tfrac{1}{2} k \left(2m\right)^2 \end{aligned}$$

La hauteur du bloc 1 (celui de 10 kg) est maintenant de 2 m, car il monte de 2 m si le bloc 2 (celui de 50 kg) descend de 2 m. L'étirement du ressort est aussi de 2 m si le bloc 1 monte de 2 m. Les deux blocs ont aussi la même vitesse puisqu'ils sont reliés par une corde. On a donc

$$\begin{aligned} E' &= \tfrac{1}{2} m_1 v'^2 + m_1 g \left(2m\right) + \tfrac{1}{2} m_2 v'^2 + m_2 g \left(-2m\right) + \tfrac{1}{2} k \left(2m\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot 10kg \cdot v'^2 + 10kg \cdot 9{,}8 \tfrac{N}{kg} \cdot \left(2m\right) + \tfrac{1}{2} \cdot 50kg \cdot v'^2 \\ &\qquad + 50kg \cdot 9{,}8 \tfrac{N}{kg} \cdot \left(-2m\right) + \tfrac{1}{2} \cdot 20 \tfrac{N}{m} \cdot \left(2m\right)^2 \\ &= 5kg \cdot v'^2 + 196J + 25kg \cdot v'^2 + -980J + 40J \\ &= 30kg \cdot v'^2 - 744J \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

En égalant les deux énergies, on a

$$E = E'$$
$$0 = 30kg \cdot v'^2 - 744J$$
$$v' = 4,98 \tfrac{m}{s}$$

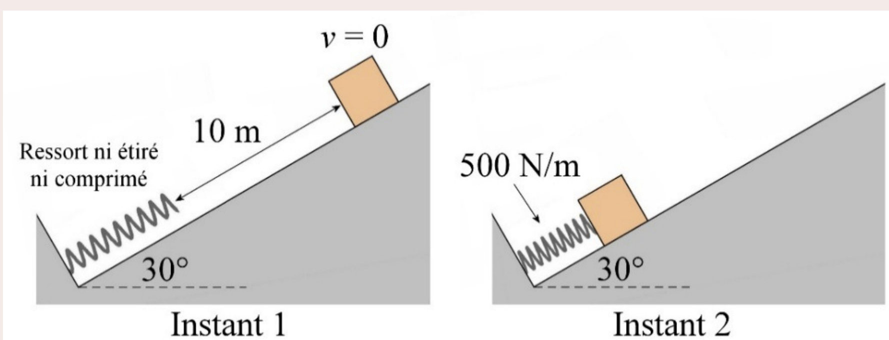
Il est important de remarquer qu'il y a des forces non conservatives ici. Ce sont les forces de tension sur les blocs. On peut donc se demander s'il était légitime d'utiliser le principe de conservation de l'énergie mécanique ici.

Ici, c'était correct, car le travail net fait par les forces de tension est nul. La tension tire sur le bloc de 10 kg vers le haut et le bloc se déplace vers le haut sur une distance de 2 m. La tension tire également sur le bloc de 50 kg vers le haut et le bloc se déplace vers le bas sur une distance de 2 m. Comme les tensions et les distances sont les mêmes, les travaux ont la même grandeur sauf que celui sur le bloc de 10 kg est positif et celui sur le bloc de 50 kg est négatif. Quand on additionne ces deux travaux pour obtenir le travail net fait par la force de tension, le résultat est nul et on peut donc appliquer le principe de conservation de l'énergie mécanique.

En fait, dès qu'il y a une corde qui relie deux objets du système et que la corde n'étire pas, les travaux faits par la tension s'annulent toujours. La présence de tension dans ces cas ne vient donc pas invalider l'application du principe de conservation de l'énergie mécanique.

Exemple 9.3.4

Un bloc de 50 kg initialement au repos glisse le long d'une pente inclinée de 30°. Il n'y a pas de friction entre le bloc et la pente. 10 m plus bas, il y a un ressort ayant une constante de 500 N/m. Quelle sera la compression maximale du ressort quand le bloc va foncer dans le ressort ?



<u>Formule de l'énergie mécanique</u>

Comme ce système est composé d'une masse et d'un ressort, l'énergie mécanique est

$$E_{mec} = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgy + \tfrac{1}{2}kx^2$$

Pour calculer l'énergie gravitationnelle, il faut choisir notre $y = 0$. Prenons la position initiale du bloc comme $y = 0$.

Énergie à l'instant 1

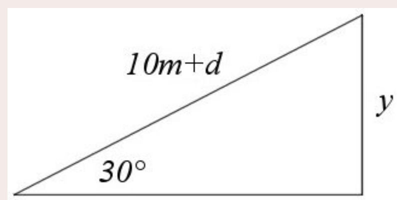
L'énergie mécanique à l'instant 1 est

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}mv^2 + mgy + \tfrac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(0\tfrac{m}{s}\right)^2 + mg\left(0m\right) + \frac{1}{2}k\left(0m\right)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Énergie à l'instant 2

À l'instant 2, le ressort est comprimé au maximum. On appellera *d* cette distance de compression maximale. On sait alors que la vitesse du bloc sera nulle à la compression maximale. Il ne reste qu'à trouver la hauteur du bloc à ce moment. Le bloc a alors parcouru 10 m + *d* le long de la pente et on trouve de combien il a descendu avec le triangle montré à droite. La descente est donc de

$$\begin{aligned} \sin 30° &= \frac{y}{10m+d} \\ \frac{1}{2} &= \frac{y}{10m+d} \\ y &= \frac{10m+d}{2} \end{aligned}$$



L'énergie quand le ressort est comprimé au maximum est donc

$$\begin{aligned} E' &= \tfrac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \tfrac{1}{2}kx'^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot\left(0\tfrac{m}{s}\right)^2 + 50kg\cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\cdot\left(-\frac{10m+d}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\cdot 500\tfrac{N}{m}\cdot\left(d\right)^2 \\ &= -50kg\cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\cdot 5m - 50kg\cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\cdot\frac{d}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot 500\tfrac{N}{m}\cdot\left(d\right)^2 \\ &= -2450J - 245N\cdot d + 250\tfrac{N}{m}\cdot d^2 \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

En égalant cette énergie avec l'énergie initiale, on obtient l'équation suivante.

$$\begin{aligned} E &= E' \\ 0 &= -2450J - 245N\cdot d + 250\tfrac{N}{m}\cdot d^2 \end{aligned}$$

Quand on résout cette équation quadratique, on obtient d = 3,659 m.

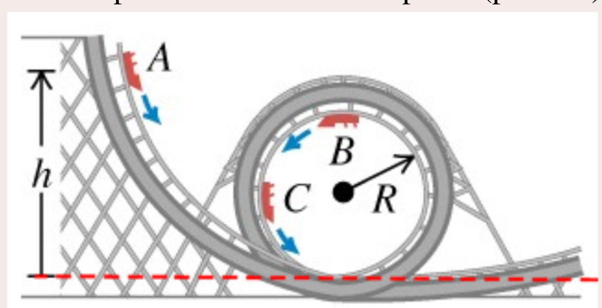
(Il y a une autre réponse, qui est négative, qu'on rejette ici, car elle correspond à un étirement du ressort. Cette réponse a quand même une signification : elle nous donne l'allongement maximal qu'aura le ressort quand la masse va rebondir sur le ressort si la masse reste toujours fixée au ressort. Si la masse ne reste pas fixée au ressort, la masse remonte jusqu'à sa position initiale.)

Encore une fois, il y a une force non conservative dans cet exemple puisqu'il y a une normale qui agit sur le bloc. Toutefois, cette normale ne fait aucun travail parce qu'elle agit perpendiculairement à la pente pendant que le bloc se déplace parallèlement à la pente. Cela veut dire qu'il y a 90° entre la force et le déplacement et que la force ne fait aucun travail. On peut donc appliquer le principe de conservation de l'énergie mécanique puisqu'aucune force non conservative ne fait de travail.

Exemple 9.3.5

Un charriot de montagnes russes initialement au repos au sommet d'une pente (point A) descend la pente pour ensuite passer dans une boucle telle qu'illustrée sur la figure. Le rayon de la boucle est de $R = 25$ m.

a) Si la hauteur initiale h du charriot est de 100 m, quelle est la vitesse du charriot au point le plus haut de la boucle (B) ?



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/physics-archive-2011-december-14

Les deux instants qu'on considère sont :

Instant 1 : charriot au point A.
Instant 2 : charriot au point B.

Formule de l'énergie mécanique

Comme il y a un seul objet (le charriot) dans cet exemple, la formule de l'énergie mécanique est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Notre $y = 0$ est à la ligne pointillée sur la figure.

Énergie à l'instant 1

Quand le charriot est au sommet de la pente, l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}mv^2 + mgy \\ &= 0 + m \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg} \cdot 100m \end{aligned}$$

Énergie à l'instant 2

Quand le charriot est au sommet de la boucle, l'énergie mécanique est

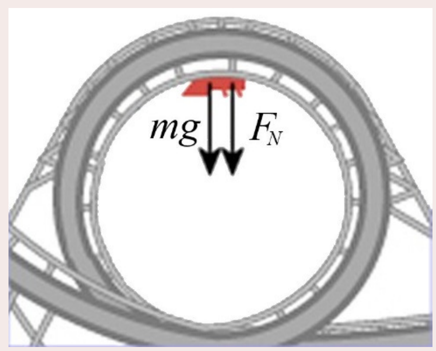
$$\begin{aligned} E' &= \tfrac{1}{2}mv'^2 + mgy' \\ &= \tfrac{1}{2}mv'^2 + m\cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\cdot 50m \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

Avec la conservation de l'énergie mécanique, on a donc

$$\begin{gathered} E = E' \\ \cancel{m}\cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\cdot 100m = \tfrac{1}{2}\cancel{m}v'^2 + \cancel{m}\cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\cdot 50m \\ 980\tfrac{J}{kg} = \tfrac{1}{2}v'^2 + 490\tfrac{J}{kg} \\ v' = 31{,}3\tfrac{m}{s} \end{gathered}$$

b) Quelle doit être la hauteur h minimale pour que le charriot reste en contact avec les rails au point le plus haut de la boucle ?



Supposons que le charriot est en contact avec les rails. On a alors les forces montrées sur la figure s'appliquant sur le charriot. La somme des forces en y est donc

$$\begin{gathered} \sum F_y = ma \\ -mg - F_N = -\frac{mv'^2}{r} \end{gathered}$$

L'accélération est égale à l'accélération centripète. Cette accélération est vers le bas ici puisque le centre du cercle est vers le bas quand on est au sommet de la boucle. La normale est alors

$$F_N = \frac{mv'^2}{r} - mg$$

On est en contact avec la boucle tant que la normale est positive. Cela nous donne donc

$$\begin{gathered} \frac{mv'^2}{r} > mg \\ v'^2 > rg \end{gathered}$$

Reprenons maintenant l'équation de la conservation de l'énergie mécanique obtenue en a), mais en mettant h à la place du 100 m initial.

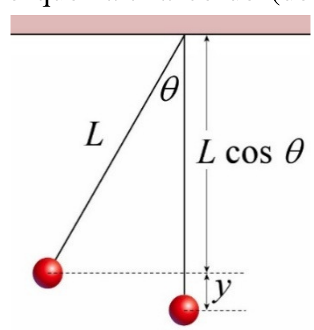
$$E = E'$$
$$\cancel{m}gh = \tfrac{1}{2}\cancel{m}v'^2 + \cancel{m}g \cdot 50m$$
$$g \cdot h = \tfrac{1}{2}v'^2 + g \cdot 50m$$
$$h = \frac{1}{2g}v'^2 + 50m$$

Comme on doit avoir $v'^2 > rg$, on a alors

$$h = \frac{1}{2g}v'^2 + 50m > \frac{1}{2g}rg + 50m$$
$$h > \frac{1}{2\cancel{g}}r\cancel{g} + 50m$$
$$h > \frac{1}{2} \cdot 25m + 50m$$
$$h > 62,5m$$

Application du principe de conservation avec un pendule

Appliquons maintenant le principe au pendule. Mais avant de le faire, on va trouver immédiatement le lien entre la hauteur du pendule (y) et l'angle que fait la corde (de longueur L) avec la verticale. Remarquez que le $y = 0$ est souvent à la position la plus basse pour un pendule.



La ligne verticale sur ce dessin correspond à la longueur de la corde. On a donc que

$$L = y + L\cos\theta$$

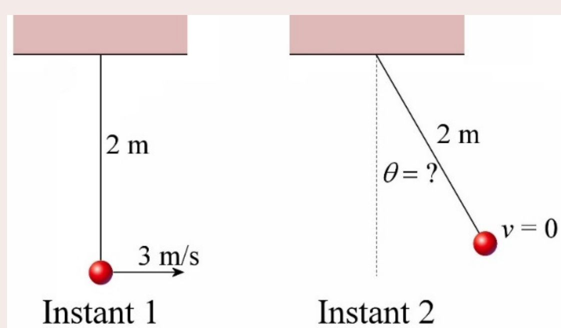
On peut alors isoler y ou $\cos\theta$ pour obtenir

Lien entre l'angle et la hauteur pour un pendule

$$y = L(1-\cos\theta) \qquad \cos\theta = \frac{L-y}{L}$$

Exemple 9.3.6

Jusqu'à quel angle maximal s'élèvera ce pendule si la vitesse du pendule est de 3 m/s quand la corde est verticale ?



Formule de l'énergie mécanique

Il n'y a qu'une masse dans ce problème. L'énergie mécanique est donc

$$E_{mec} = \tfrac{1}{2} m v^2 + mgy$$

Énergie à l'instant 1

Quand la corde est verticale, cette énergie est

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2} m v^2 + mgy \\ &= \tfrac{1}{2} m v^2 + mg \cdot (0m) \\ &= \tfrac{1}{2} m v^2 \end{aligned}$$

Énergie à l'instant 2

Quand l'angle est maximal, l'énergie est

$$\begin{aligned} E' &= \tfrac{1}{2} m v'^2 + mgy' \\ &= \tfrac{1}{2} m \cdot \left(0 \tfrac{m}{s}\right)^2 + mgy' \\ &= mgy' \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

En égalant les deux énergies, on a

$$E = E'$$

$$\tfrac{1}{2} \cancel{m} v^2 = \cancel{m} g y'$$

$$y' = \frac{v^2}{2g}$$

$$y' = \frac{\left(3 \tfrac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9,8 \tfrac{N}{kg}}$$

$$y' = 0,459m$$

L'angle est donc

$$\cos\theta = \frac{L - y'}{L}$$

$$\cos\theta = \frac{2m - 0,459m}{2m}$$

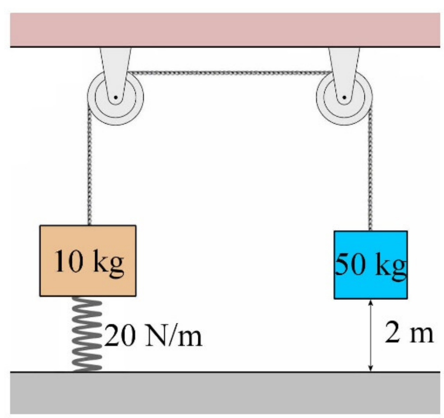
$$\theta = 39,6°$$

Une démonstration expérimentale

En s'inspirant de l'exemple précédent, on peut maintenant présenter une démonstration expérimentale du principe de conservation de l'énergie mécanique. Selon ce principe, si une masse descend d'une certaine hauteur, l'énergie gravitationnelle baisse, ce qui va faire monter l'énergie cinétique. La trajectoire de l'objet n'a, en fait, aucune importance. Si un objet de 1 kg descend de 1 m, l'énergie gravitationnelle baisse de 9,8 J et l'énergie cinétique augmente de 9,8 J, peu importe la trajectoire. Cela veut dire que, peu importe la trajectoire, un objet initialement au repos gagnera la même vitesse s'il descend d'une certaine distance.

Dans l'expérience présentée ici, on laisse premièrement tomber une boule directement vers le bas et on mesure sa vitesse au point le plus bas à l'aide d'un laser. En fait, l'appareil mesure le temps que prend la boule pour traverser le laser. Plus ce temps est petit, plus la boule va vite. Ensuite, on laisse descendre une autre boule identique en suivant un arc de cercle, comme un pendule. On s'assure que la masse est descendue de la même hauteur que la balle qu'on a laissé tomber directement vers le bas. Avec le même appareil, on mesure alors sa vitesse au point le plus bas. Sera-t-elle identique comme le prévoit le principe de conservation de l'énergie mécanique ?
https://www.youtube.com/watch?v=L2mdAvdPhT4

Une formulation plus précise du principe de conservation de l'énergie mécanique

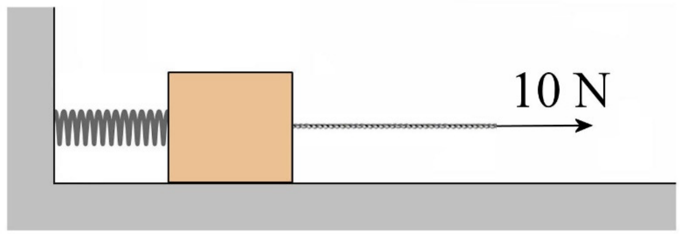


Un **<u>système</u>** est l'ensemble des objets que l'on considère dans le problème. Ainsi, dans l'exemple des deux blocs, notre système était composé de deux blocs et d'un ressort. Ce choix se reflétait dans notre formule de l'énergie dans laquelle il y avait deux énergies cinétiques (une pour chaque bloc), deux énergies gravitationnelles (une pour chaque bloc) et une énergie du ressort. Notez que la Terre fait aussi partie de notre système puisque l'énergie gravitationnelle d'un objet est en réalité l'énergie gravitationnelle de la Terre et de l'objet. La Terre est donc incluse dans le système. Il n'est cependant pas nécessaire d'écrire l'énergie cinétique de la Terre dans la formule de l'énergie puisque nous allons la considérer au repos dans toutes nos applications.

<u>L'énergie mécanique du système</u> est simplement la somme des énergies mécaniques de tous les objets de notre système. Avec le système de deux blocs et d'un ressort, l'énergie mécanique était donc l'énergie mécanique du bloc de 10 kg (cinétique et gravitationnelle) additionnée de l'énergie mécanique du bloc de 50 kg (cinétique et gravitationnelle) et additionnée de l'énergie du ressort.

Une **force interne** est une force entre les objets inclus dans le système. Dans l'exemple des deux blocs et le ressort, la force faite par le ressort sur le bloc de 10 kg est une force interne puisque les deux objets (le bloc de 10 kg et le ressort) font tous deux partie du système. Les forces gravitationnelles qui s'exercent sur les blocs sont aussi des forces internes puisque la Terre et les blocs font tous partie du système.

Une **force externe** est une force faite sur un objet du système par un objet qui n'est pas dans le système. Si quelqu'un tire sur la corde de la figure de droite avec une force de 10 N et que le système a été choisi pour qu'il soit formé du bloc et du ressort, la force de 10 N est une force externe.



S'il n'y a pas de force externe, alors on dit qu'on a un **système isolé.**

Avec ce vocabulaire un peu plus exact, on peut énoncer plus précisément le principe de conservation de l'énergie mécanique.

Principe de conservation de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un système isolé est conservée, c'est-à-dire que

$$\Delta E_{mec} = 0$$

ou

$$E_{mec} = E'_{mec}$$

ou

$$E_{mec} = \text{constante}$$

si le travail fait sur le système est fait uniquement par des forces conservatives.

Il y a donc deux restrictions pour appliquer correctement le principe de conservation de l'énergie mécanique.

1) Il n'y a pas de force externe (ce doit être un système isolé).
2) Il n'y a pas de travail fait par des forces non conservatives.

9.4 L'ÉNERGIE MÉCANIQUE EN PRÉSENCE DE FORCES EXTERNES OU DE FORCES INTERNES NON CONSERVATIVES

Preuve que les forces internes non conservatives et les forces externes changent l'énergie mécanique d'un système

Montrons premièrement que les forces externes et les forces internes non conservatives brisent la conservation de l'énergie mécanique d'un système.

Commençons avec le théorème de l'énergie cinétique.

$$\Delta E_k = W_{net}$$

Comme le travail est fait par des forces internes conservatives, des forces internes non conservatives et des forces externes, on peut séparer le travail en trois parties : le travail fait par les forces internes conservatives (W_c), le travail fait par des forces internes non conservatives (W_{nc}) et le travail fait par les forces externes (W_{ext}).

$$\Delta E_k = W_c + W_{nc} + W_{ext}$$

Le travail fait par les forces internes conservatives peut être calculé avec l'énergie potentielle avec $W_c = -\Delta U$. On a alors

$$\begin{aligned}
\Delta E_k &= -\Delta U + W_{nc} + W_{ext} \\
\Delta E_k + \Delta U &= W_{nc} + W_{ext} \\
\Delta\left(E_k + U\right) &= W_{nc} + W_{ext} \\
\Delta E_{mec} &= W_{nc} + W_{ext}
\end{aligned}$$

Autrement dit, l'énergie mécanique n'est plus conservée dans ce cas puisqu'une force interne non conservative ou une force externe peut ajouter ou enlever de l'énergie mécanique au système. Le changement d'énergie mécanique correspond au travail qui a été fait par ces forces.

Calculs utilisant l'énergie mécanique quand il y a des forces internes non conservatives ou des forces externes qui font un travail

La formule obtenue précédemment nous indique comment on peut utiliser l'énergie mécanique même s'il y a un travail fait par une force interne non conservative ou une force externe. Voici deux versions équivalentes de cette formule.

L'énergie mécanique avec des forces non conservatives et des forces externes

$$\Delta E_{mec} = W_{nc} + W_{ext}$$

ou

$$E_{mec} + W_{nc} + W_{ext} = E'_{mec}$$

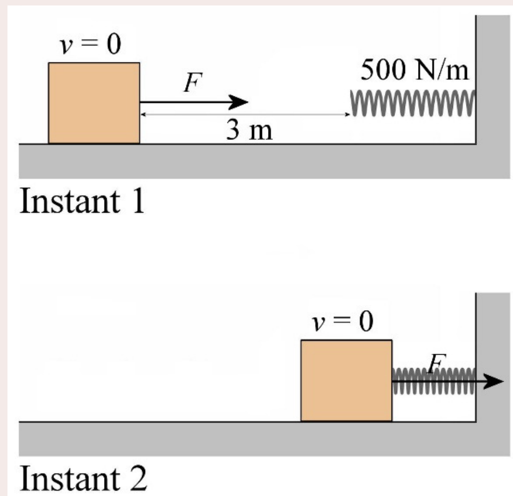
Pour résoudre, on calcule encore les énergies mécaniques à l'instant 1 et à l'instant 2, mais maintenant on doit aussi calculer le travail fait par les forces non conservatives et externes. Ensuite, on utilise ces trois résultats dans l'équation suivante et on résout.

$$E_{mec} + W_{nc} + W_{ext} = E'_{mec}$$

Dans ce premier exemple, il y a une force externe.

Exemple 9.4.1

Un bloc initialement au repos est poussé par une force constante. Le bloc glisse sur une surface horizontale sans frottement sur une distance de 3 m et fonce ensuite dans un ressort ayant une constante de 500 N/m. Si le ressort se comprime de 15 cm au maximum, quelle est la grandeur de la force ?



Formule de l'énergie mécanique

Comme il y a un bloc et un ressort dans ce système, l'énergie mécanique est

$$E_{mec} = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgy + \tfrac{1}{2}kx^2$$

Énergie à l'instant 1

À l'instant 1 (bloc initialement au repos). L'énergie est

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}mv^2 + mgy + \tfrac{1}{2}kx^2 \\ &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'énergie cinétique est nulle puisque le bloc est arrêté au départ. L'énergie gravitationnelle est nulle, car le bloc est à une hauteur nulle (on a placé le $y = 0$ à la hauteur initiale du bloc). L'énergie du ressort est nulle, car il n'est pas comprimé ni étiré au départ.

Énergie à l'instant 2

À l'instant 2 (ressort comprimé au maximum), l'énergie est

$$\begin{aligned} E' &= \tfrac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \tfrac{1}{2}kx'^2 \\ &= 0 + 0 + \tfrac{1}{2}\cdot 500\tfrac{N}{m}\cdot(0{,}15m)^2 \\ &= 5{,}625J \end{aligned}$$

On voit que l'énergie mécanique a changé. Ce n'est pas surprenant puisque c'est le résultat de l'action de la force externe.

Travail fait par la force externe

Le travail est

$$\begin{aligned} W_{ext} &= F_{ext}\Delta s\cos\theta \\ &= F_{ext}\cdot 3{,}15m\cdot\cos 0° \\ &= F_{ext}\cdot 3{,}15m \end{aligned}$$

Utilisation de $E_{mec} + W_{ext} + W_{nc} = E'_{mec}$

Avec les énergies mécaniques et le travail trouvés, on a

$$\begin{gathered} E_{mec} + W_{ext} = E'_{mec} \\ 0 + F_{ext}\cdot 3{,}15m = 5{,}625J \end{gathered}$$

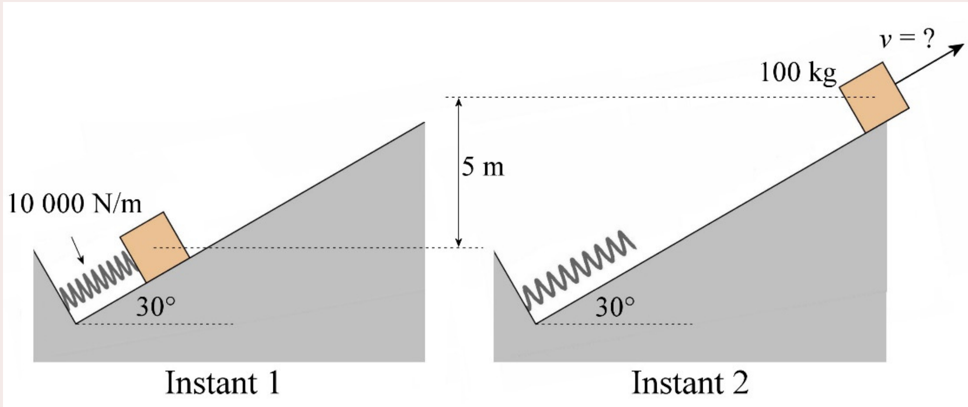
La force externe est donc

$$F_{ext} = 1{,}7857N$$

Dans ce deuxième exemple, il y a une force non conservative.

Exemple 9.4.2

Un bloc de 100 kg initialement au repos sur une pente inclinée de 30° sera poussé par un ressort (k = 10 000 N/m) comprimé de 2 m. Si le bout de la rampe est 5 m plus haut que le point de départ du bloc et que le coefficient de friction entre le bloc et la pente est de 0,2, quelle sera la vitesse du bloc en haut de la pente ?



Formule de l'énergie mécanique

Comme il y a un bloc et un ressort dans ce système, l'énergie mécanique est

$$E_{mec} = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgy + \tfrac{1}{2}kx^2$$

Énergie à l'instant 1

À l'instant 1 (le bloc est au repos accoté sur le ressort comprimé), l'énergie est

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}mv^2 + mgy + \tfrac{1}{2}kx^2 \\ &= 0 + 0 + \tfrac{1}{2}\cdot 10\,000\tfrac{N}{m}\cdot(2m)^2 \\ &= 20\,000J \end{aligned}$$

L'énergie cinétique est nulle puisque le bloc est initialement arrêté. L'énergie gravitationnelle est nulle, car le bloc est à une hauteur nulle (on a placé le $y = 0$ à la hauteur initiale du bloc).

Énergie à l'instant 2

À l'instant 2 (la masse est en haut de la rampe), l'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E' &= \tfrac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \tfrac{1}{2}kx'^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot 100kg\cdot v'^2 + 100kg\cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}\cdot 5m + 0 \\ &= 50kg\cdot v'^2 + 4900J \end{aligned}$$

L'énergie du ressort est maintenant nulle parce que le ressort s'est décomprimé en poussant le bloc. Il est maintenant au repos (ni étiré ni comprimé).

Travail fait par la force non conservative

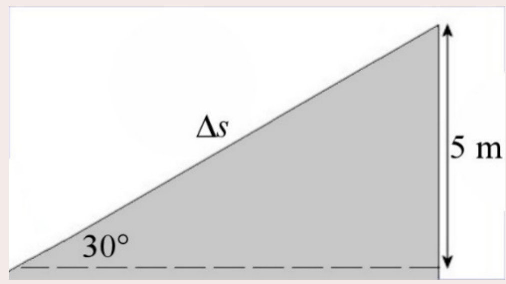
Le travail fait par la friction est

$$\begin{aligned} W_{nc} &= F_f \Delta s \cos\theta \\ &= \mu_c F_N \Delta s \cos 180° \\ &= -\mu_c F_N \Delta s \end{aligned}$$

L'angle est de 180°, car la force est directement opposée au mouvement. On trouve la normale avec la somme des forces en y sur le bloc. (On a pris un axe des x vers le haut de la pente.)

$$\begin{aligned} \sum F_y &= ma_y \\ mg\sin(-120°) + F_N &= 0 \\ F_N &= mg\sin(120°) \\ F_N &= 848,7N \end{aligned}$$

Le déplacement se trouve avec un peu de trigonométrie.



$$\begin{aligned} \frac{5m}{\Delta s} &= \sin 30° \\ \Delta s &= 10m \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} W_{nc} &= -\mu_c F_N \Delta s \\ &= -0,2 \cdot 848,7N \cdot 10m \\ &= -1697,4J \end{aligned}$$

<u>Utilisation de $E_{mec} + W_{ext} + W_{nc} = E'_{mec}$</u>

On a donc

$$\begin{aligned} E + W_{nc} &= E' \\ 20\,000J + -1697,4J &= 50kg \cdot v'^2 + 4900J \\ 13\,402,6J &= 50kg \cdot v'^2 \\ v' &= 16,37\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Souvent, la force non conservative sera la friction qui s'oppose au mouvement, comme dans cet exemple. Dans ce cas, le travail fait par la friction est

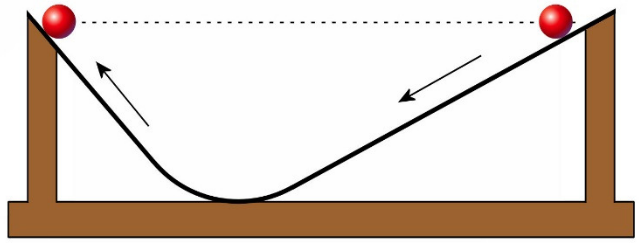
$$\begin{aligned} W_{nc} &= F_f \Delta s \cos 180° \\ &= -F_f \Delta s \end{aligned}$$

On obtient donc le résultat suivant :

$$\Delta E_{mec} = -F_f \Delta s$$

Cette équation nous indique que l'énergie mécanique baisse. En effet, elle nous dit que la variation de l'énergie mécanique est négative, donc qu'elle baisse.

Cette conclusion correspond mieux à notre compréhension du monde qui nous entoure. Même si le principe de conservation de l'énergie mécanique nous dit que la bille dans cette expérience devrait remonter à la même hauteur que celle où elle a été lâchée, on sait que ce n'est pas comme ça que ça va se passer.

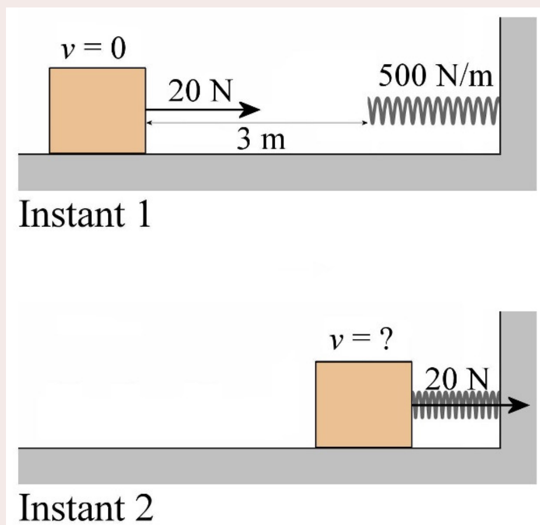


On se doute bien que la bille va remonter et s'arrêtera un peu avant d'atteindre la même hauteur. Cela se produit parce que la friction enlève lentement de l'énergie mécanique. Ainsi, la bille ne pourra plus monter aussi haut parce qu'une baisse d'énergie mécanique signifie moins de hauteur quand toute l'énergie est sous forme d'énergie gravitationnelle.

Dans ce dernier exemple, nous avons une force externe et une force non conservative.

Exemple 9.4.3

Un bloc de 6 kg initialement au repos est poussé par une force constante de F = 20 N. Le bloc glisse sur une surface horizontale sur une distance de 3 m et fonce ensuite dans un ressort ayant une constante de 500 N/m. Le coefficient de friction entre le sol et le bloc est de 0,25. Quelle est la vitesse du bloc quand le ressort est comprimé de 20 cm ?



Formule de l'énergie mécanique

Comme il y a un bloc et un ressort dans ce système, l'énergie mécanique est

$$E_{mec} = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgy + \tfrac{1}{2}kx^2$$

Énergie à l'instant 1

À l'instant 1 (bloc initialement au repos), l'énergie est

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}mv^2 + mgy + \tfrac{1}{2}kx^2 \\ &= 0+0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'énergie cinétique est nulle puisque le bloc est arrêté au départ. L'énergie gravitationnelle est nulle, car le bloc est à une hauteur nulle (on a placé le $y = 0$ à la hauteur initiale du bloc). L'énergie du ressort est nulle, car il n'est pas comprimé ni étiré au départ.

Énergie à l'instant 2

À l'instant 2 (ressort comprimé de 20 cm), l'énergie est

$$\begin{aligned} E' &= \tfrac{1}{2}mv'^2 + mgy' + \tfrac{1}{2}kx'^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot 6kg \cdot v'^2 + 0 + \tfrac{1}{2}\cdot 500\tfrac{N}{m}\cdot(0,2m)^2 \\ &= 3kg\cdot v'^2 + 10J \end{aligned}$$

Travaux faits par les forces externes et les forces non conservatives

Comme il y a une force externe et une force interne non conservative (la friction), on doit aussi trouver le travail fait par ces 2 forces.

Le travail fait par la force externe est

$$\begin{aligned} W_{ext} &= F\Delta s\cos\theta \\ &= 20N\cdot 3,2m\cdot\cos(0°) \\ &= 64J \end{aligned}$$

Le travail fait par la force non conservative est

$$\begin{aligned} W_{nc} &= F_f\Delta s\cos\theta \\ &= (\mu_c F_N)\cdot 3,2m\cdot\cos(180°) \\ &= \left(0,25\cdot 6kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}\right)\cdot 3,2m\cdot\cos(180°) \\ &= -47,04J \end{aligned}$$

Utilisation de $E_{mec} + W_{ext} + W_{nc} = E'_{mec}$

On a donc que

$$\begin{aligned} E + W_{ext} + W_{nc} &= E' \\ 0J + 64J + -47,04J &= 3kg\cdot v'^2 + 10J \end{aligned}$$

$$3kg \cdot v'^2 = 6,96J$$
$$v' = 1,523 \tfrac{m}{s}$$

9.5 LES MACHINES SIMPLES

La conservation de l'énergie mécanique permet de comprendre facilement pourquoi il est avantageux d'utiliser des machines simples.

Supposons qu'on veuille monter un objet de masse m d'une certaine hauteur y. Peu importe la façon de procéder, il faut augmenter l'énergie de l'objet de mgy. Pour donner cette énergie, on doit faire un travail externe. On a donc que

$$W_{ext} = mgy$$
$$F\Delta s\cos\theta = mgy$$
$$F = \frac{mgy}{\Delta s\cos\theta}$$

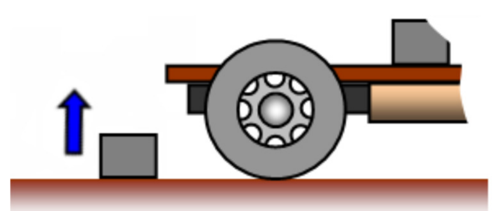
Supposons que la force appliquée sur l'objet est dans le sens du déplacement (c'est souvent le cas avec le plan incliné et la poulie). L'angle est alors nul et on a

$$F = \frac{mgy}{\Delta s\cos 0°}$$
$$F = \frac{mgy}{\Delta s}$$

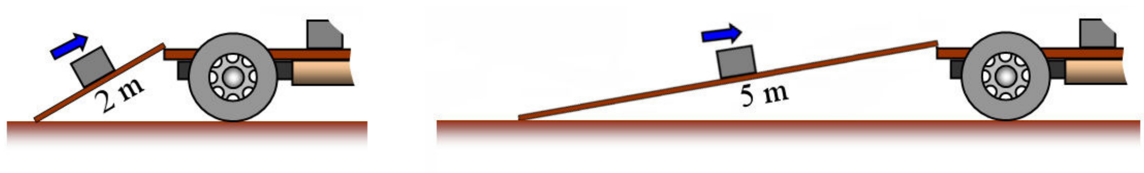
Pour diminuer la force nécessaire pour amener l'objet à la hauteur y, on doit donc augmenter la distance. C'est ce concept qui se cache derrière l'utilisation du plan incliné et des poulies.

Plan incliné

Dans le cas du plan incliné, on diminue la force en prenant une rampe plus longue. Supposons qu'on veuille monter une boite de 50 kg d'une hauteur de 1 m pour la mettre sur un camion. Pour y arriver, on doit fournir 490 J (mgy). Sans plan incliné (on monte directement la boite), il faut une force de 490 N sur une distance de 1 m.



Avec un plan incliné, on augmente la distance à parcourir et on diminue la force nécessaire.



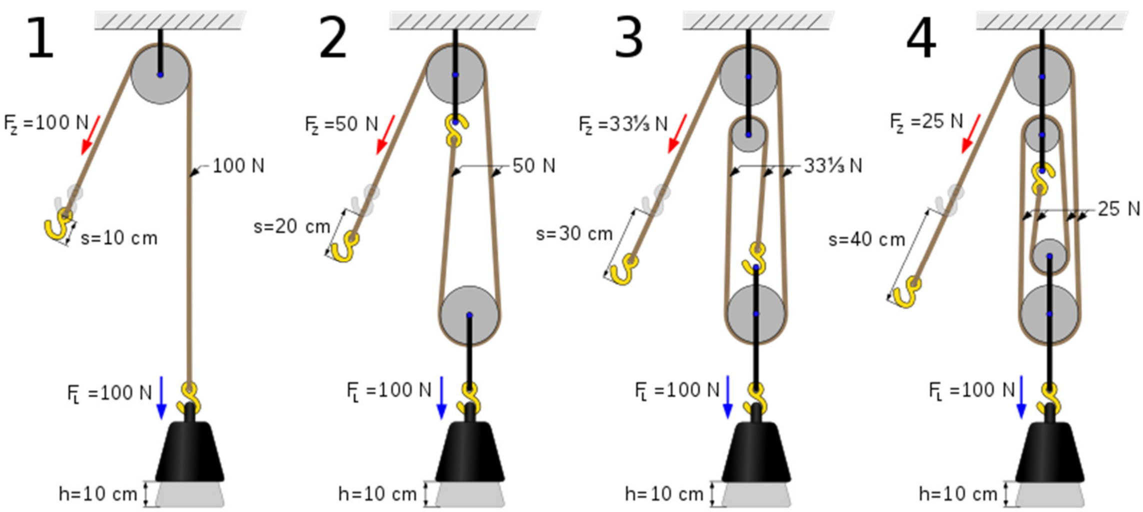
www.schoolphysics.co.uk/age11-14/Mechanics/Forces%20in%20motion/text/Machines_/index.html

Avec un plan incliné de 30° (à gauche), une force de 245 N suffira. Par contre, il faudra exercer la force sur une distance de 2 m. Avec une inclinaison de 11,5°, une force de 98 N est suffisante, mais il faudra pousser la boite sur une distance de 5 m.

Poulies

Supposons qu'on veuille maintenant monter un objet ayant un poids de 100 N sur une distance de 10 cm. Pour y arriver, on doit fournir une énergie de mgy = 10 J.

En prenant le système de poulie 1 montré sur la figure, on doit tirer la corde de 10 cm pour que l'objet monte de 10 cm. Comme la distance est la même, la force est encore de 100 N.



en.wikipedia.org/wiki/File:Four_pulleys.svg

Avec le système de poulie 2, on doit tirer 20 cm de corde pour que la masse monte de 10 cm. En effet, la corde supporte 2 fois l'objet fixé à la poulie et il faut diminuer la longueur de la corde 2 fois de 10 cm pour que la masse monte de 10 cm. En multipliant la distance de corde à tirer par 2, on divise la force par 2.

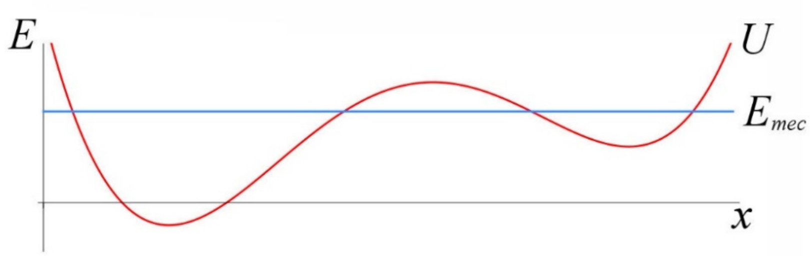
Avec le système de poulie 3, on doit tirer 30 cm de corde pour que la masse monte de 10 cm. En effet, la corde supporte 3 fois l'objet fixé à la poulie et il faut diminuer la longueur de la corde 3 fois de 10 cm pour que la masse monte de 10 cm. En multipliant la distance de corde à tirer par 3, on divise la force par 3.

Avec le système de poulie 4, on doit tirer 40 cm de corde pour que la masse monte de 10 cm. En effet, la corde supporte 4 fois l'objet fixé à la poulie et il faut diminuer la longueur de la corde 4 fois de 10 cm pour que la masse monte de 10 cm. En multipliant la distance de corde à tirer par 4, on divise la force par 4.

Ces résultats sont en accord avec nos calculs de tension faits au chapitre 4.

9.6 LE GRAPHIQUE DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE EN FONCTION DE LA POSITION

Il y a plusieurs informations qu'on peut tirer du graphique de l'énergie potentielle en fonction de la position si l'énergie mécanique est conservée. On va travailler ici avec une seule dimension (x). À titre d'exemple, nous utiliserons ce graphique pour illustrer les résultats obtenus.



On voit que l'énergie potentielle change selon la position de l'objet. La ligne de l'énergie mécanique en fonction de la position est évidemment une ligne droite horizontale puisque l'énergie est conservée et qu'elle garde donc toujours la même valeur même si l'objet change de position. Cette ligne horizontale pour E_{mec} monte si on ajoute de l'énergie au système et elle baisse si on enlève de l'énergie au système.

1) La force sur l'objet

Comme on sait que

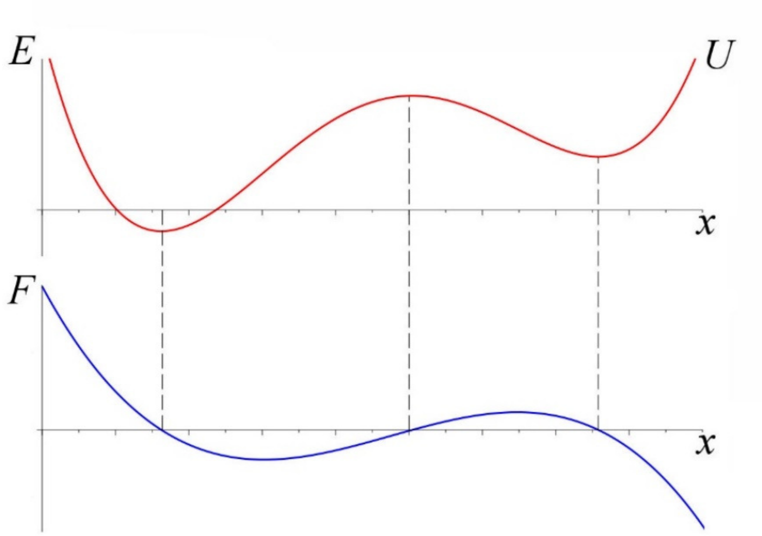
$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

Cela amène l'interprétation graphique suivante.

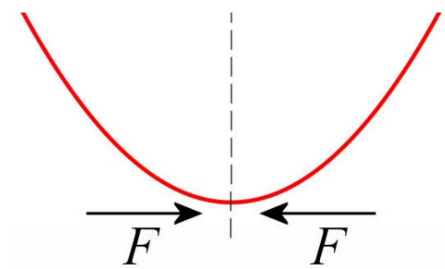
Force sur un objet

La force est –(pente) sur un graphique de l'énergie potentielle en fonction de la position.

On peut donc obtenir le graphique de la force sur l'objet en traçant le graphique de moins la dérivée de l'énergie potentielle. Voici ce que ça donne pour notre exemple.



Au départ, la pente est négative et la force est positive. Par la suite, la pente est de moins en moins négative et la force diminue lentement. Ensuite, la pente devient positive et la force est donc négative. Au maximum de *U*, la pente et la force sont zéro. La pente redevient ensuite négative (la force est donc positive) pour redevenir positive (force négative) après le minimum relatif.



Cela signifie aussi que si la pente est positive, la force est négative et si la pente est négative, la force est positive.

On arrive donc à la conclusion suivante.

La force sur un objet

La force sur un objet est toujours vers l'endroit où l'énergie potentielle est plus basse.

2) Les régions où l'objet peut être et l'endroit où l'objet a sa vitesse maximale

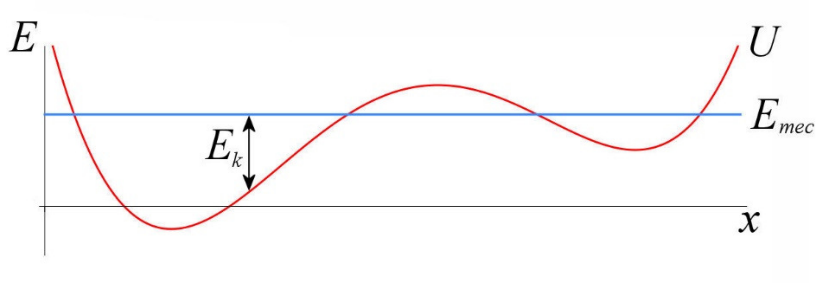
Comme l'énergie mécanique est la somme

$$E_{mec} = E_k + U$$

On a que

$$E_k = E_{mec} - U$$

L'énergie cinétique est donc l'écart entre l'énergie mécanique et l'énergie potentielle. Graphiquement, l'énergie cinétique est l'écart entre la ligne de E_{mec} et la courbe de *U*.

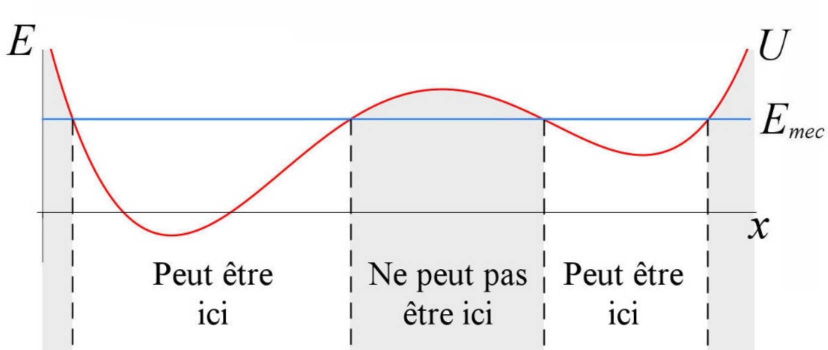


L'objet ne peut donc pas être aux endroits où la courbe de U est au-dessus de la ligne de E_{mec}, car l'énergie cinétique deviendrait négative, ce qui est impossible.

Endroits où l'objet ne peut pas être

L'objet ne peut pas être aux endroits où la courbe de U est au-dessus de la ligne de E_{mec}.

Dans notre cas, on a donc



Dans ce cas, cela signifie que l'objet reste toujours dans la région permise à droite ou reste toujours dans la région permise à gauche. Il est tout à fait impossible qu'elle passe d'une à l'autre, car il faudrait pour cela qu'elle passe par la région interdite entre les deux régions permises.

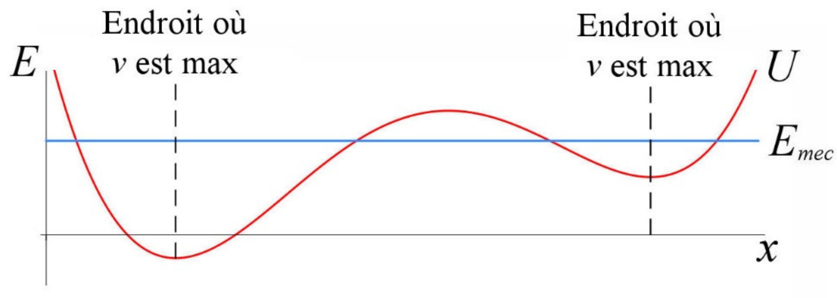
Par contre, on change les endroits où il est possible que l'objet soit si on change l'énergie mécanique de l'objet. Si on augmente l'énergie mécanique (en ajoutant de l'énergie à l'objet) jusqu'à ce que la ligne de E_{mec} dépasse le maximum au centre de la courbe de U, l'objet pourra alors passer d'une région permise à l'autre, car il n'y aura plus de zone interdite entre les deux.

On peut aussi trouver l'endroit où la vitesse est maximale. Il faut simplement trouver l'endroit où l'énergie cinétique est maximale. Comme cette énergie est l'écart entre E_{mec} et U, il faut trouver l'endroit où l'écart est maximum. Bien, sûr, cela va se produire quand U est à son minimum.

Endroit où la vitesse est maximale

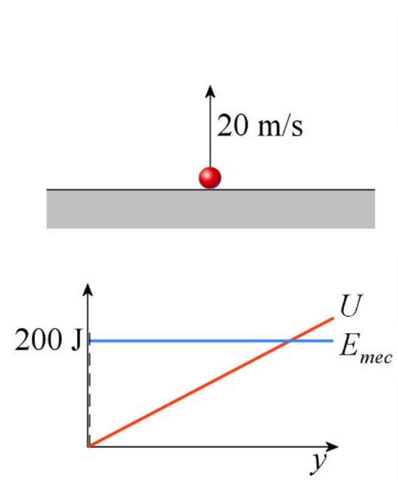
La vitesse de l'objet est maximale quand l'écart entre E_{mec} et U est maximal
(et que E_{mec} est au-dessus de U).

Dans notre cas, on a donc



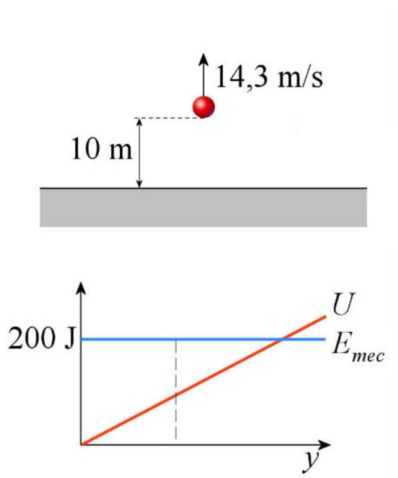
Il y a deux endroits, car il y a deux régions où l'objet peut être. Si l'objet est dans la région permise de gauche, sa vitesse est maximale à la position indiquée la plus à gauche sur le graphique. Si l'objet est dans la région permise de droite, sa vitesse est maximale quand il est la position indiquée sur le graphique le plus à droite.

<u>Une pierre lancée vers le haut</u>



Par exemple, examinons le graphique de l'énergie d'un objet de 1 kg qu'on lance directement vers le haut avec une énergie cinétique de 200 J. Avec la gravitation, on a $U = mgy$, qui correspond à une droite.

Au départ, l'objet est à $y = 0$ m et son énergie potentielle est nulle. Toute l'énergie mécanique est sous forme d'énergie cinétique. On peut voir sur le graphique que l'objet est à $y = 0\,\mathrm{m}$ et que l'écart entre l'énergie mécanique (E_{mec}) et l'énergie potentielle (U) à cette position est de 200 J. Cet écart est l'énergie cinétique de l'objet. Cela correspond à une vitesse de 20 m/s.

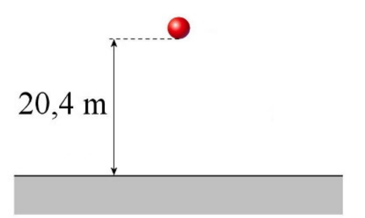


Un peu plus tard, l'objet est à une hauteur de 10 m. À ce moment, la vitesse de l'objet est de 14,3 m/s.

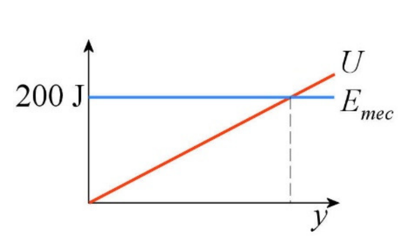
Sur le graphique de l'énergie, on peut voir ce qu'on obtient à $y = 10$ m. À cette position, l'énergie potentielle est de 98 J de sorte que l'écart entre E_{mec} et U est de 102 J. Cela correspond à l'énergie cinétique de l'objet.

On remarque que plus la valeur de y augmente, plus l'écart entre E_{mec} et U diminue ce qui signifie que l'énergie cinétique diminue à mesure que y augmente. C'est effectivement ce qui se passe avec un objet qu'on lance vers le haut.

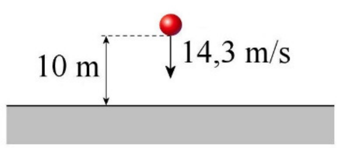
Encore plus tard, l'objet atteint sa hauteur maximale, qui est de 20,4 m.

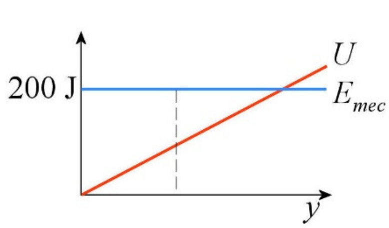


Sur le graphique, la hauteur maximale correspond au point de croisement des courbes de U et de E_{mec}. L'objet ne peut pas aller plus haut, car cela le ferait entrer dans une région où $U > E_{mec}$ et cette région est une zone interdite.



Si on augmentait l'énergie mécanique, la région interdite se déplacerait vers la droite sur le graphique, ce qui signifie que la région interdite commencera à une plus grande valeur de y. L'objet pourrait donc monter plus haut s'il a plus d'énergie mécanique au départ.

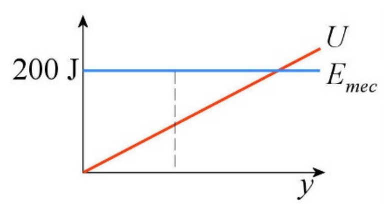




Finalement, l'objet recommence à descendre. Quand il revient à une hauteur de 10 m, sa vitesse est encore de 14,3 m/s puisque l'écart entre E_{mec} et U est encore de 102 J à cette position.

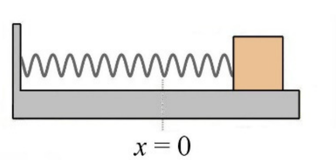
Avec y qui diminue, l'écart entre E_{mec} et U augmente à nouveau, ce qui signifie que la vitesse de l'objet augmente à mesure qu'il se dirige vers le sol.

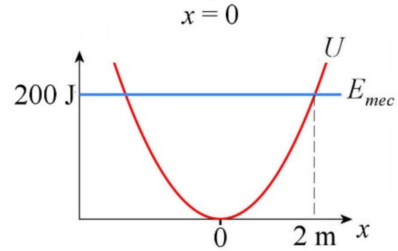
Remarquez aussi que la pente de l'énergie potentielle est constante et positive. Cela signifie que la force, qui est égale à – (pente), est constante et négative (donc dirigée vers le bas). Cela correspond bien à ce qu'on sait concernant la force gravitationnelle.



<u>Une masse fixée au bout d'un ressort</u>

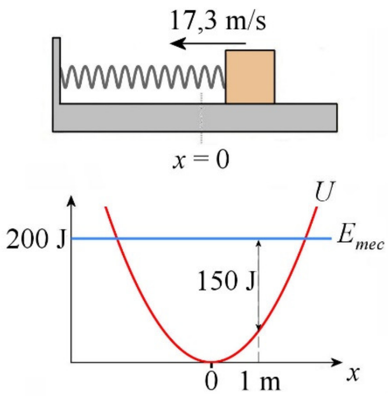
Examinons maintenant le graphique de l'énergie d'un objet de 1 kg fixé à un ressort ayant une constante de 100 N/m. Au départ, le ressort est étiré de 2 m et la vitesse de la masse est nulle, ce qui donne une énergie mécanique de 200 J au système. Avec un ressort, on a $U = ½kx^2$, qui est une parabole.



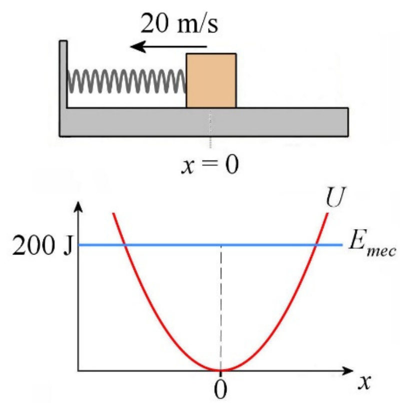


Au début de ce mouvement, l'objet est à la position où E_{mec} et U se croisent. Comme il n'y a pas d'écart entre les deux courbes à cet endroit, l'énergie cinétique est nulle.

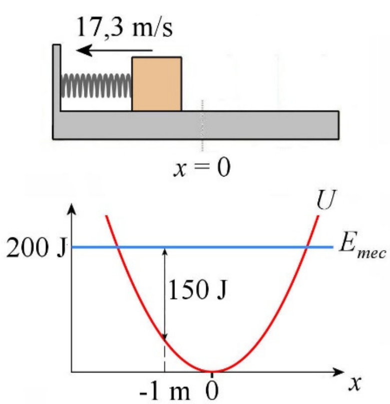
De plus, l'objet ne pourrait pas aller plus loin que $x = 2$ m puisque la région $x > 2$ m est interdite. En fait, cette masse de 1 kg va toujours être entre $x = -2$ m et $x = 2$ m. Pour aller plus loin de $x = 2$ m, il faudrait ajouter de l'énergie au système pour faire monter la ligne de E_{mec}.



Un peu plus tard, l'objet, tiré par le ressort, arrive à la position $x = 1$ m. À cette position, l'énergie potentielle du ressort n'est plus que de 50 J et l'écart entre E_{mec} et U est donc de 150 J. L'énergie cinétique de l'objet est donc de 150 J, ce qui signifie que sa vitesse est de 17,3 m/s.



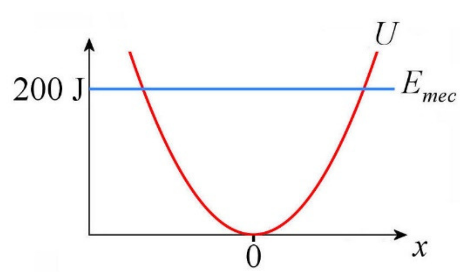
Un peu plus tard, l'objet arrive à la position $x = 0$ m. À cette position, l'énergie potentielle est à sa valeur minimale (0 J) et l'énergie cinétique atteint sa valeur maximale de 200 J. Ce minimum de l'énergie potentielle correspond à la position où la vitesse de l'objet est la plus grande.



Finalement, l'objet continue son mouvement vers les x négatifs. À $x = -1$ m, la vitesse de l'objet n'est plus que de 17,3 m/s puisque l'écart entre E_{mec} et U n'est plus que de 150 J. La vitesse va continuer à diminuer à mesure que l'objet va vers les x négatifs puisque l'écart entre E_{mec} et U continuera à diminuer. L'objet s'arrêtera à $x = -2$ m puisque l'écart entre E_{mec} et U devient nul à cet endroit. L'objet ne peut pas dépasser $x = -2$ m puisque cette zone est interdite quand l'énergie mécanique est de 200 J.

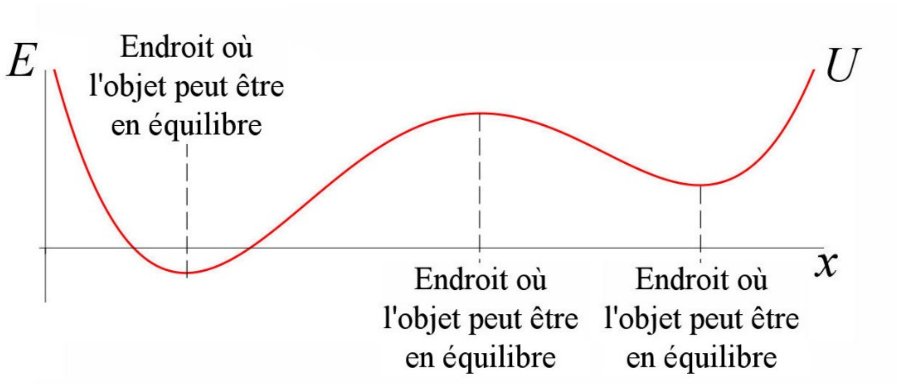
À partir de $x = -2$ m, l'objet repartira vers $x = 0$. Il ne peut pas rester à $x = -2$ puisqu'il y a une force qui agit sur l'objet (la pente de U n'est pas nulle).

Remarquez finalement comment la pente de l'énergie potentielle change. À droite de $x = 0$, la pente est positive et est de plus en plus grande. Cela indique que la force faite par le ressort est de plus en plus grande et qu'elle est dirigée vers les x négatifs, donc vers $x = 0$. À gauche de $x = 0$, la pente est négative et est de plus en plus négative. Cela indique que la force faite par le ressort est de plus en plus grande et qu'elle est dirigée vers les x positifs, donc vers $x = 0$. Cela correspond bien à ce qu'on sait d'une force faite par un ressort.



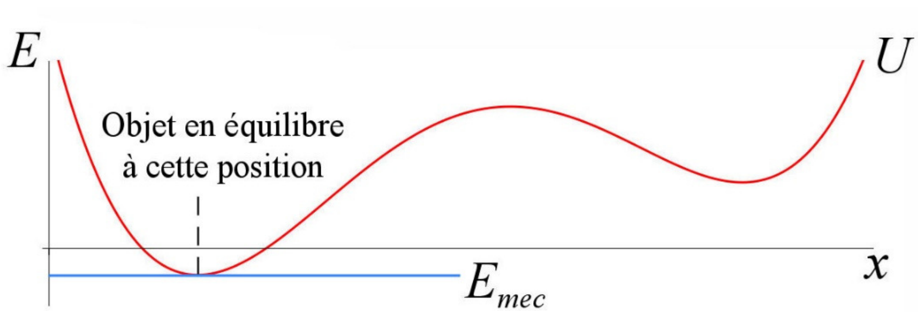
3) Les points d'équilibre

Si l'objet est en équilibre, c'est qu'il n'y a aucune force qui s'exerce sur ce dernier. S'il y a une force, alors il y aura une accélération et l'objet ne pourra rester en place. Puisque la force est -(pente de *U*), la force est nulle si la pente est nulle. Ainsi, dans notre exemple, il y a trois endroits où l'objet peut être à équilibre.

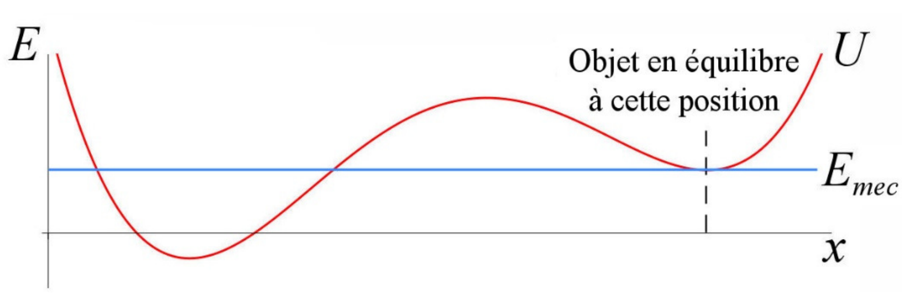


Évidemment, l'énergie mécanique doit être exactement égale à *U* au point d'équilibre pour que l'objet soit en équilibre. Si l'énergie mécanique était supérieure à *U*, il y aurait de l'énergie cinétique et l'objet s'éloignerait de la position d'équilibre.

Le graphique suivant est le graphique d'un objet à l'équilibre à la position d'équilibre la plus à gauche.

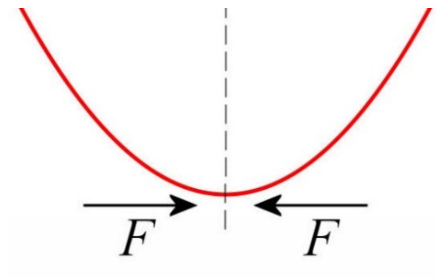


Il est clair dans cette situation que l'objet doit absolument rester à la position d'équilibre puisque l'objet ne peut être aux endroits où *U* est plus grand que E_{mec}. Il ne peut être qu'à la position d'équilibre. Il se produit la même chose si l'objet est à la position d'équilibre la plus à droite, comme montré sur le graphique suivant.

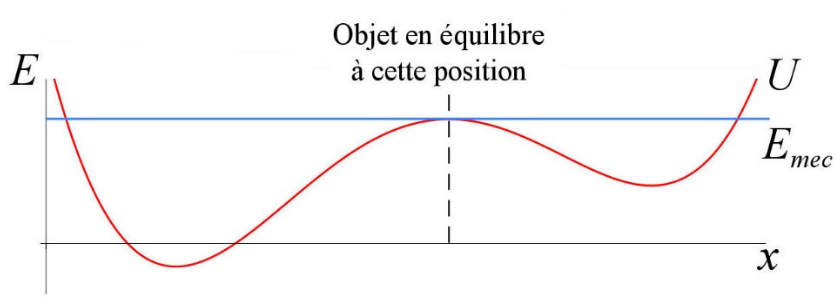


Si l'objet est à la position indiquée, il doit rester là sans bouger, car il ne peut se déplacer sans aller dans des régions interdites. Avec cette énergie mécanique, l'objet peut aussi être dans le creux de gauche, où l'énergie mécanique est plus grande que U, mais si l'objet est, au départ, à la position d'équilibre de droite, il n'a aucun moyen d'aller dans la région permise de gauche, car il devrait alors traverser une région interdite.

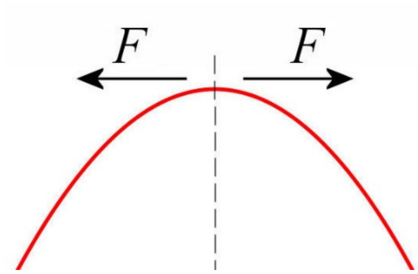
Ces deux situations correspondent à des équilibres stables. Même si on augmente légèrement l'énergie mécanique, l'objet reste près de la position d'équilibre, car il ne peut s'éloigner beaucoup sans entrer dans des régions interdites. On peut également voir que les forces de chaque côté de la position d'équilibre tentent toujours de ramener l'objet vers la position d'équilibre. À droite de la position d'équilibre, la pente est positive et la force est donc négative. Cette force vers la gauche ramène l'objet vers la position d'équilibre. À gauche de la position d'équilibre, la pente est négative et la force est donc positive. Cette force vers la droite ramène également l'objet vers la position d'équilibre.



Il existe un troisième endroit où la force est nulle : au maximum relatif de la fonction.

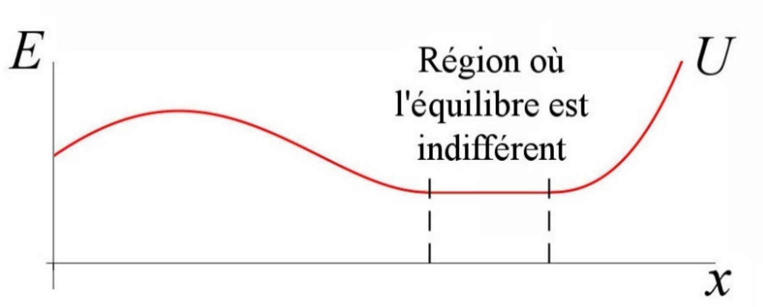


Bien que l'objet soit en équilibre à cette position, on voit que l'objet pourrait quitter cet endroit sans entrer dans une région interdite. Il s'agit dans ce cas d'un équilibre instable. En regardant les forces sur l'objet autour de cette position d'équilibre, on comprend également pourquoi l'équilibre est instable. À droite de la position d'équilibre, la pente est négative et la force est donc positive, cette force vers la droite va éloigner de plus en plus l'objet de la position d'équilibre. À gauche de la position d'équilibre, la pente est positive et la force est donc négative. Cette force vers la gauche éloigne aussi de plus en plus l'objet de la position d'équilibre.



En fait, la situation est la même que si on tentait de placer une bille à l'équilibre sur une surface dont la hauteur est de la même forme que le graphique de U. Vous pouvez placer la bille dans les creux et elle restera immobile à cet endroit, même s'il y a une petite perturbation (un léger vent) qui vient agir sur la bille. Ce sont les équilibres stables. On pourrait aussi placer la bille en équilibre sur le dessus des crêtes. Cependant, cet équilibre est instable et la bille va tomber d'un côté ou de l'autre de la position d'équilibre à la moindre perturbation.

Il existe une autre possibilité pour avoir une force nulle : quand la pente et la concavité sont nulles en même temps. C'est ce qui se produit dans la région indiquée sur ce graphique.



Si l'objet est à un endroit dans cette région, il n'y a aucune force qui s'appliquerait sur lui s'il y avait une petite perturbation qui déplaçait l'objet, car la pente est toujours nulle. Comme il y a plusieurs positions où l'objet peut être en équilibre dans cette région, cela ne fait aucune différence où est l'objet et on parle alors d'équilibre indifférent.

On peut résumer ainsi :

Positions d'équilibres

> L'objet peut être en équilibre aux endroits où la pente de U est nulle. L'équilibre est stable si le graphique de U est concave vers le haut à cet endroit, l'équilibre est instable si le graphique de U est concave vers le bas à cet endroit et l'équilibre est indifférent si la concavité est nulle à cet endroit.

9.7 LE TEMPS DE DÉPLACEMENT À PARTIR DE *U*

L'énergie mécanique est

$$E_{mec} = \tfrac{1}{2}mv^2 + U$$

Si on isole la vitesse, on a

$$v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_{mec} - U\right)}$$

Puisque la vitesse est la dérivée de la position ($v = dx/dt$), on a

Équation à résoudre pour obtenir le temps de déplacement à partir de *U*

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_{mec} - U\right)}$$

Cette formule permet de calculer le temps que prendra un objet pour passer d'un endroit à un autre si on connait la formule de l'énergie potentielle. Voici comment.

Exemple 9.7.1

L'énergie potentielle d'un objet de 2 kg est donnée par la formule suivante.

$$U = 25\tfrac{N}{m} \cdot x^2$$

Combien de temps faudra-t-il pour que l'objet passe de $x = 0$ à $x = 2$ m si l'énergie mécanique est de 200 J ?

Avec les valeurs données, l'équation

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_{mec} - U\right)}$$

devient

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{2kg}\left(200J - 25\tfrac{N}{m} \cdot x^2\right)} \\ &= \sqrt{200\tfrac{m^2}{s^2} - 25\tfrac{1}{s^2} \cdot x^2} \\ &= 5\tfrac{1}{s} \cdot \sqrt{8m^2 - x^2}\end{aligned}$$

(On a pris le signe positif, car le signe devant la racine est le signe de la vitesse. Comme l'objet se déplace de $x = 0$ à $x = 2$ m, la vitesse est positive.)

On trouve le temps en trouvant la solution de cette équation. On peut premièrement écrire cette équation sous la forme suivante.

$$5\tfrac{1}{s} \cdot dt = \frac{dx}{\sqrt{8m^2 - x^2}}$$

On intègre ensuite en prenant le début et la fin comme bornes d'intégration. Cela signifie que du côté gauche, les bornes seront le temps à la position $x = 0$ (qu'on va appeler t_1) et le temps à la position $x = 2$ m (qu'on va appeler t_2). Du côté droit, les bornes seront la position initiale ($x = 0$) et la position finale ($x = 2$ m). On a alors

$$\int_{t_1}^{t_2} 5\tfrac{1}{s} \cdot dt = \int_0^{2m} \frac{dx}{\sqrt{8m^2 - x^2}}$$

$$\left[5\tfrac{1}{s}\cdot t\right]_{t_1}^{t_2} = \left[\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{8}m}\right)\right]_0^{2m}$$

$$5\tfrac{1}{s}\cdot t_2 - 5\tfrac{1}{s}\cdot t_1 = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{8}}\right) - 0$$

$$5\tfrac{1}{s}\cdot\left(t_2 - t_1\right) = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{8}}\right)$$

$$t_2 - t_1 = 0,2s\cdot\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{8}}\right)$$

$$t_2 - t_1 = 0,3927s$$

On peut même obtenir la position en fonction de temps à partir de cette équation.

Exemple 9.7.2

L'énergie potentielle d'un objet de 2 kg est donnée par la formule suivante.

$$U = 25\tfrac{N}{m}\cdot x^2$$

Trouvez la formule qui donne la position de l'objet en fonction du temps si l'énergie mécanique de l'objet est de 200 J sachant que l'objet est à $x = 0$ et que sa vitesse est positive à $t = 0$.

Avec les valeurs données, l'équation

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_{mec} - U\right)}$$

devient

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \pm\sqrt{\frac{2}{2kg}\left(200J - 25\tfrac{N}{m}\cdot x^2\right)}\\ &= \pm\sqrt{200\tfrac{m^2}{s^2} - 25\tfrac{1}{s^2}\cdot x^2}\\ &= \pm 5\tfrac{1}{s}\cdot\sqrt{8m^2 - x^2}\end{aligned}$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$5\tfrac{1}{s}\cdot dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{8m^2 - x^2}}$$

Pour obtenir l'équation du mouvement, on fait l'intégrale indéfinie de chaque côté.

$$\int 5\tfrac{1}{s}\cdot dt = \pm\int\frac{dx}{\sqrt{8m^2 - x^2}}$$

$$5\tfrac{1}{s}\cdot t + C = \pm\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{8m}}\right)$$

Si l'objet est à $x = 0$ quand $t = 0$, alors la constante d'intégration est

$$0 + C = \arcsin(0)$$
$$C = 0$$

On a donc

$$5\tfrac{1}{s}\cdot t = \pm\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{8m}}\right)$$

Si on isole x, on arrive à

$$x = \sqrt{8}m\cdot\sin\left(\pm 5\tfrac{rad}{s}\cdot t\right)$$
$$x = \pm\sqrt{8}m\cdot\sin\left(5\tfrac{rad}{s}\cdot t\right)$$

Finalement, on peut trouver le signe puisqu'on sait que la vitesse initiale est positive. La vitesse est

$$v = \frac{dx}{dt}$$
$$= \pm\sqrt{8}m\cdot 5\tfrac{1}{s}\cdot\cos\left(5\tfrac{rad}{s}\cdot t\right)$$

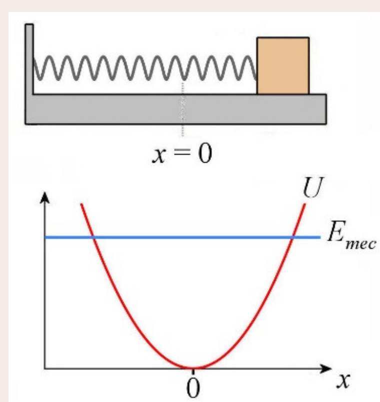
À $t = 0$, on a

$$v = \pm\sqrt{8}m\cdot 5\tfrac{1}{s}$$

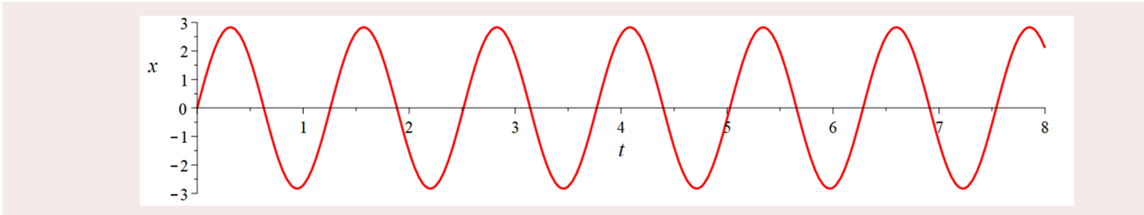
Puisqu'on sait que la vitesse est positive, on doit garder le signe positif. La position en fonction du temps est

$$x = \sqrt{8}m\cdot\sin\left(5\tfrac{rad}{s}\cdot t\right)$$

Cette réponse est conforme à ce qu'on avait trouvé précédemment. En effet, on avait trouvé, à partir du graphique de l'énergie, que pour une telle énergie potentielle, qui correspond à l'énergie d'un ressort, l'objet allait osciller entre deux positions extrêmes.



C'est exactement ce que donne notre formule de la position en fonction du temps. On a une oscillation entre deux positions (ici $-\sqrt{8}$ m et $\sqrt{8}$ m) et la vitesse est maximale à $x = 0$ (la pente sur le graphique, qui est la vitesse, est la plus grande à $x = 0$).

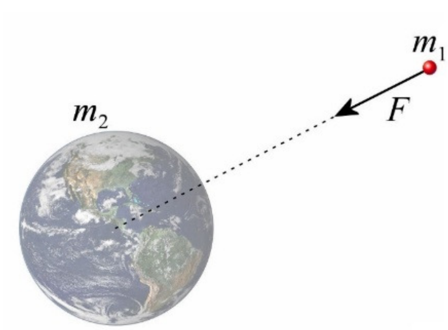


Tout semblait relativement facile ici, mais la plupart du temps, ce n'est pas si facile. Des fois, l'intégrale est vraiment difficile à faire et, d'autres fois, ce n'est pas facile d'isoler x une fois que l'intégrale est faite pour obtenir la formule de la position en fonction du temps.

9.8 LA FORMULE GÉNÉRALE DE L'ÉNERGIE GRAVITATIONNELLE

La formule

On a obtenu précédemment l'énergie gravitationnelle en partant de la force gravitationnelle. Cependant, en prenant la formule de la force de gravitation près de la Terre (mg), notre résultat n'est valide que si on reste près de la surface de la Terre. Elle n'est donc pas correcte en général puisqu'on sait que la force de gravitation entre une planète et un objet diminue avec le carré de la distance. On va donc obtenir ici une formule plus générale de l'énergie gravitationnelle en partant de la loi de la gravitation.



$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

Un peu plus tôt dans ce chapitre, il a été mentionné qu'une force d'attraction dont la grandeur dépend uniquement de la distance r entre les objets est une force conservative. Il y a donc une énergie potentielle U pour cette force. Il a aussi été mentionné que le lien entre U et F pour ce type de force est

$$U = -\int F dr$$

où F est la grandeur de la force en fonction de r. Rapellez-vous également que la force F est positive si on a une force de répulsion entre les objets et négative si on a une force d'attraction.

Avec la gravitation, on a donc

$$\begin{aligned} U_g &= -\int F dr \\ &= -\int \left(-\frac{Gm_1m_2}{r^2} \right) dr \\ &= \int \frac{Gm_1m_2}{r^2} dr \end{aligned}$$

Cette intégrale nous donne

$$U_g = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \text{constante}$$

Avec l'énergie gravitationnelle mgy, la constante d'intégration nous permettait de changer la position de l'origine $y = 0$. La constante permet de faire cela uniquement si l'énergie est une fonction linéaire de la position. Ici, la constante ne nous permet pas de changer la position de l'origine $r = 0$ puisque r est au dénominateur dans la fonction. La constante n'a en fait aucune utilité et nous allons poser qu'elle est nulle. On a alors

Énergie gravitationnelle (formule générale)

$$U_g = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

Le r est la distance entre l'objet et le centre de la planète ou de l'étoile et il n'est pas possible de changer cela. L'énergie gravitationnelle est toujours négative et s'approche de zéro à mesure que l'objet s'éloigne de la planète ou de l'étoile. Ainsi, l'énergie gravitationnelle augmente à mesure que l'objet s'éloigne de la planète ou de l'étoile. Dans le fond, c'est pratique que l'énergie gravitationnelle soit nulle quand un objet est loin d'une planète ou d'une étoile, car on n'a pas besoin de tenir compte de toutes les autres planètes et étoiles de l'univers quand on calcule l'énergie gravitationnelle d'un objet à proximité de la Terre. Toutes ces planètes et étoiles étant tellement loin, l'énergie gravitationnelle due à ces astres sera tout à fait négligeable.

Noter que quand on calcule l'énergie gravitationnelle d'un objet à proximité d'une planète, ce qu'on obtient n'est pas l'énergie de l'objet uniquement, mais plutôt l'énergie du système planète-objet. Si l'énergie gravitationnelle se transforme en énergie cinétique, l'énergie cinétique peut donc se retrouver dans l'objet **et** la planète et non pas uniquement dans l'objet. La répartition dépend des masses et des contraintes sur le système. Cependant, si la planète est nettement plus massive que l'objet, l'énergie gravitationnelle ira presque exclusivement en énergie cinétique de l'objet.

Exemple 9.8.1

On lance une balle à 5000 m/s vers le haut à partir de la surface de la Terre. Jusqu'à quelle hauteur la balle va-t-elle monter si on néglige la friction faite par l'atmosphère ? (La masse de la Terre est 5,9722 x 10^{24} kg et le rayon de la Terre est 6371 km.)

Formule de l'énergie mécanique

Comme il y a un seul objet dans ce système, l'énergie mécanique est (M_T est la masse de la Terre)

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_Tm}{r}$$

Énergie à l'instant 1

L'énergie mécanique à l'instant 1 (objet à la surface de la Terre) est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_T m}{r} \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_T m}{R_T} \end{aligned}$$

À ce moment, r est le rayon de la Terre (R_T) parce que la distance entre l'objet et le centre de la Terre est égale au rayon de la Terre.

Énergie à l'instant 2

À l'instant 2 (objet au point le plus haut), la vitesse est nulle. Son énergie mécanique est donc

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{-GM_T m}{r'} \\ &= \frac{-GM_T m}{r'} \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie mécanique

En égalant l'énergie initiale à l'énergie au point le plus haut, on obtient

$$E = E'$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \frac{-GM_T \cancel{m}}{R_T} = \frac{-GM_T \cancel{m}}{r'}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(5000\tfrac{m}{s}\right)^2 + \frac{-6,6743\times10^{-11}\tfrac{Nm^2}{s^2}\cdot 5,9722\times10^{24}kg}{6371\times10^3 m} = \frac{-6,6743\times10^{-11}\tfrac{Nm^2}{s^2}\cdot 5,9722\times10^{24}kg}{r'}$$

$$r' = 7,962\times10^6 m$$

$$r' = 7962km$$

Ceci est la distance entre l'objet et le centre de la Terre. Si on veut la distance à partir de la surface, on doit soustraire le rayon de la Terre.

$$\begin{aligned} \text{distance} &= 7962km - 6371km \\ &= 1591km \end{aligned}$$

Si on l'avait calculé avec *mgy,* on aurait obtenu 1250 km, soit 341 km de moins que ce qu'on a obtenu. Il ne faut donc pas utiliser la formule $U_g = mgy$ si les objets s'éloignent beaucoup de la surface de la Terre. Le calcul est un peu plus difficile avec la formule générale, mais la réponse est exacte.

L'énergie mécanique d'un objet en orbite

À partir de l'équation générale de l'énergie gravitationnelle, on peut faire une formule toute simple qui va nous donner l'énergie mécanique d'un objet en orbite circulaire autour d'un astre. L'énergie mécanique de l'objet de masse m en orbite autour d'un astre de masse M_c est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_c m}{r}$$

Or, comme la force centripète sur l'objet est la force de gravitation, on a

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GM_c m}{r^2}$$

et donc que

$$mv^2 = \frac{GM_c m}{r}$$

En remplaçant dans l'équation de l'énergie mécanique, on obtient

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_c m}{r}$$

$$E_{mec} = \frac{1}{2}\left(\frac{GM_c m}{r}\right) + \frac{-GM_c m}{r}$$

$$E_{mec} = \left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{GM_c m}{r}\right)$$

Pour obtenir finalement

Énergie mécanique d'un objet de masse *m* en orbite autour d'un astre de masse M_c

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m}{2r}$$

Le fait que l'énergie soit négative nous indique que l'objet est lié à la planète, qu'il ne pourra pas quitter la planète. En effet, à une distance très grande de la planète, l'énergie gravitationnelle est nulle et l'énergie cinétique est positive. Cela signifie que l'énergie mécanique est au minimum zéro quand l'objet est loin de la planète. Si l'objet à une énergie mécanique totale négative, il ne peut pas aller aux endroits où l'énergie est nulle et l'objet en orbite ne peut donc pas quitter la planète.

Si on veut que l'objet quitte la planète, on doit lui fournir de l'énergie jusqu'à ce que son énergie mécanique devienne nulle (au minimum). Ainsi, si l'énergie mécanique d'un objet en orbite autour de la Terre est de -1000 J, on doit lui fournir au moins 1000 J pour qu'il puisse quitter la Terre.

Exemple 9.8.2

Combien d'énergie doit-on fournir pour placer un satellite de 100 kg en orbite sur une orbite circulaire à 200 km au-dessus de la surface de la Terre ? (La masse de la Terre est 5,9722 x 10^{24} kg et le rayon de la Terre est 6371 km.)

L'énergie mécanique est

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_T m}{r}$$

où M_T est la masse de la Terre. (Il y a deux objets dans le système : La Terre et le satellite. Comme la Terre est au repos, l'énergie cinétique de la Terre n'a pas été incluse dans la formule. Par contre, la Terre est incluse dans l'énergie gravitationnelle puisque cette énergie est l'énergie gravitationnelle du satellite et de la Terre.)

À l'instant 1, le satellite est au repos à la surface de la Terre. L'énergie est donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GM_T m}{r} \\ &= 0 + \frac{-6,6743 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{s^2} \cdot 5,9722 \times 10^{24} kg \cdot 100kg}{6371 \times 10^3 m} \\ &= -6,2565 \times 10^9 J \end{aligned}$$

(Ne pas prendre la formule de l'énergie mécanique en orbite que l'on a obtenue dans cette section puisque le satellite n'est pas en orbite à ce moment. Notez qu'on a négligé la vitesse initiale du satellite due à la rotation de la Terre.)

À l'instant 2, le satellite est en orbite. L'énergie est

$$\begin{aligned} E' &= \frac{-GM_T m}{2r'} \\ &= \frac{-6,6743 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{s^2} \cdot 5,9722 \times 10^{24} kg \cdot 100kg}{2\left(6371 \times 10^3 m + 200 \times 10^3 m\right)} \\ &= -3,0330 \times 10^9 J \end{aligned}$$

La variation d'énergie est donc

$$\begin{aligned} \Delta E_{mec} &= E' - E \\ &= -3,0330 \times 10^9 J - -6,2565 \times 10^9 J \\ &= 3,2235 \times 10^9 J \end{aligned}$$

C'est l'énergie qu'il faut fournir pour amener le satellite en orbite.

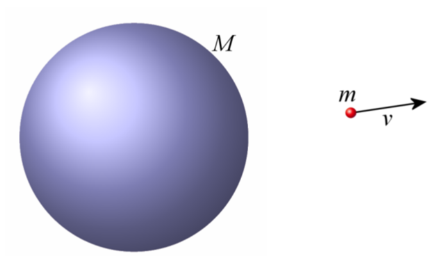
Si on avait voulu être un peu plus formelle, on aurait fait

$$E + W_{nc} = E'$$
$$-6,2565\times 10^{9} J + W_{nc} = -3,0330\times 10^{9} J$$
$$W_{nc} = 3,2235\times 10^{9} J$$

Ce qui signifie aussi que le moteur doit faire un travail de 3,2235 x 10^9 J pour mettre le satellite en orbite.

(Notez que cette énergie correspond à l'énergie qu'on peut obtenir en brulant environ 100 litres d'essence. Ça semble peu, mais en fait il en faut beaucoup plus parce qu'il faut également donner de l'énergie mécanique à la fusée et au carburant. En plus, ces 100 litres supposent que toute l'énergie libérée par l'essence qui brule va en énergie mécanique alors qu'en réalité, une bonne partie va en chaleur. Il faut donc beaucoup de carburant pour compenser cette perte d'énergie en chaleur.)

La vitesse de libération



On va chercher maintenant quelle vitesse doit avoir un objet près d'une planète ou d'une étoile pour qu'il puisse s'éloigner très loin de l'astre sans revenir vers l'astre. On appelle cette vitesse la *vitesse de libération*.

Initialement (instant 1), à une distance r de l'astre de masse M, l'énergie mécanique est

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GMm}{r}$$

Quand l'objet est rendu très loin de l'astre (instant 2), son énergie est

$$E' = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{-GMm}{r'}$$
$$= \frac{1}{2}mv'^2$$

L'énergie gravitationnelle devient négligeable puisque r' est très grand. Si on veut la vitesse initiale minimum pour s'éloigner de la planète, on doit trouver l'énergie mécanique minimum. Avec la formule de l'énergie mécanique à l'instant 2, on voit que cette énergie minimum est obtenue quand $v' = 0$.

$$E' = 0$$

On a alors

$$E = E'$$
$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \frac{-GM\cancel{m}}{r} = 0$$

Il ne reste qu'à isoler la vitesse dans cette équation pour obtenir la vitesse de libération.

Vitesse de libération près d'une planète de masse *M*

$$v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Exemple 9.8.3

Quelle est la vitesse de libération d'un objet initialement à 1000 km de la surface de la Terre sachant que la Terre a une masse de 5,9722 x 10^{24} kg et un rayon de 6371 km ?

Au départ, la distance entre le centre de la Terre et l'objet est

$$6371\ km + 1000\ km = 7371\ km$$

La vitesse de libération est donc

$$\begin{aligned} v_{lib} &= \sqrt{\frac{2 \cdot 6,6743 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5,9722 \times 10^{24} kg}{7371 \times 10^3 m}} \\ &= 10,40 \tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

Si l'objet a une vitesse plus grande ou égale à 10,40 km/s, il pourra s'éloigner très loin de la Terre et ne jamais revenir. Cela veut dire aussi qu'un objet ayant une vitesse inférieure à 10,40 km/s quand il est à 1000 km de la surface de la Terre a une énergie mécanique négative. L'objet ne peut donc pas aller à une distance très grande où l'énergie gravitationnelle est zéro. (Rappelez-vous, l'objet ne peut pas être aux endroits où l'énergie mécanique est plus petite que *U*.) S'il a une vitesse supérieure à 10,40 km/s, son énergie mécanique est positive et il peut donc aller loin de la Terre où l'énergie gravitationnelle est nulle.

Exemple 9.8.4

Quelle est la vitesse de libération d'un objet initialement à la surface de la Terre sachant que la Terre a une masse de 5,9722 x 10^{24} kg et un rayon de 6371 km ? (On fait comme s'il n'y avait pas d'atmosphère.)

Au départ, la distance entre l'objet et le centre de la Terre est 6371 km.

La vitesse de libération est donc

$$\begin{aligned} v_{lib} &= \sqrt{\frac{2 \cdot 6,6743 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5,9722 \times 10^{24} kg}{6371 \times 10^3 m}} \\ &= 11,19 \tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

Cela veut dire que si on lance un objet à partir de la surface de la Terre avec une vitesse supérieure à 11,19 km/s, il ne retombera pas sur Terre. Si on le lance avec une vitesse inférieure à 11,19 km/s, il finira par revenir sur Terre (évidemment, on néglige la friction de l'air dans ce calcul).

9.9 LA CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

Le principe de conservation

On a vu que l'énergie mécanique n'est pas toujours conservée. Par exemple, l'énergie mécanique diminue quand la friction agit sur un objet qui glisse sur une surface horizontale. L'énergie est conservée uniquement s'il n'y a pas de forces non conservatives. C'est une restriction importante puisqu'il y a beaucoup de forces non conservatives.

Toutefois, il existe un principe de conservation encore plus général dans lequel il n'y a pas ce problème de forces non conservatives. Il s'agit du principe de conservation de l'énergie. Selon ce principe, l'énergie, qui englobe beaucoup plus de formes d'énergie que l'énergie mécanique, est toujours une constante.

Principe de conservation de l'énergie

$$E_k + E_{gravitationnelle} + E_{ressort} + E_{thermique} + E_{son} + E_{lumière} + E_{électrique} + E_{chimique} + E_{nucléaire} + \ldots = \text{constante}$$

Les forces internes non conservatives ne changent pas la valeur de l'énergie. Quand un objet glisse sur une surface horizontale et qu'il y a de la friction, l'énergie mécanique (ici sous forme d'énergie cinétique) diminue. Toutefois, l'énergie reste constante puisque l'énergie cinétique se transforme en d'autres formes d'énergie, comme la chaleur et le son.

Une seule restriction reste pour avoir conservation de l'énergie. L'énergie d'un système est conservée si le système est isolé. Les forces externes peuvent toujours changer l'énergie d'un système. Cela signifie que

$$\Delta E_{tot} = W_{ext}$$

Ainsi, si on mesurait l'énergie qui apparait sous forme de chaleur et de lumière quand cette voiture freine (vers la fin du clip, on voit les freins devenir tout rouges)
https://www.youtube.com/watch?v=NBoMTYZAyJc
on constaterait qu'elle est égale à l'énergie cinétique perdue par la voiture.

Si on mesurait l'énergie qui apparait sous forme de chaleur, de son, de lumière et d'énergie cinétique du souffle dans cette explosion
https://www.youtube.com/watch?v=9vFmSOQ93as
on constaterait qu'elle est égale à l'énergie chimique perdue par les molécules.

On ne va pas donner les formules pour calculer ces autres formes d'énergie dans ce cours de mécanique, mais on en verra quelques-unes dans les prochains cours de physique.

Exemple 9.9.1

Harold se pose sur une piste avec son Cessna 172 à une vitesse de 30 m/s. Le Cessna avec tout ce qu'il y a à l'intérieur a une masse de 1000 kg. Combien d'énergie se retrouve en chaleur dans les freins (si on néglige les pertes d'énergie due à la friction de l'air) ?

Quand un Cessna se pose, l'énergie cinétique de l'avion doit se transformer en une autre forme d'énergie. La friction dans les freins va transformer une bonne partie de cette énergie en chaleur dans les freins et la friction de l'air va transformer une petite partie de cette énergie cinétique de l'avion en énergie cinétique de l'air et en chaleur dans l'air. Si on néglige les pertes dues à la force de friction de l'air, il ne reste que la chaleur dans les freins. Ainsi, toute l'énergie cinétique de l'avion ira en chaleur dans les freins.

L'énergie cinétique de l'avion est

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1000kg \cdot \left(30\tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= 450\,000J \end{aligned}$$

Comme cette énergie se transforme en chaleur dans les freins, l'énergie thermique des freins après le freinage sera de 450 000 J.

Notez que, selon ce calcul, les freins recevront cette énergie, peu importe la distance de freinage. En réalité, l'énergie thermique dans les freins diminue si on allonge la distance de freinage parce que l'air qui circule dans les freins aura davantage de temps pour recevoir une partie de cette chaleur pour les refroidir. De plus, un temps de freinage plus long augmentera la quantité d'énergie enlevée par la force de friction de l'air agissant sur l'avion.

Les freins d'un Cessna peuvent facilement recevoir ces 450 000 J. Cette énergie thermique fera augmenter la température des freins, mais cette augmentation de température ne sera pas catastrophique. Toutefois, il y a une limite à l'énergie que peuvent recevoir les freins. Un Boeing 777-300ER de 320 tonnes qui se pose à une vitesse de 73 m/s a une énergie cinétique de 850 millions de joules (850 000 000 J = 850 MJ). Si les freins devaient prendre toute cette énergie, alors chacun des 12 systèmes de freinage recevrait environ 70 MJ d'énergie thermique. C'est beaucoup d'énergie. Voyez ce qui arrive dans ce test où des freins reçoivent 125 MJ.
https://www.youtube.com/watch?v=qew09gao3S8
Chacun des systèmes de freinage du Boeing peut-il recevoir les 70 MJ ? Non. Une telle quantité d'énergie mènerait à des dommages permanents aux freins, aux pneus et aux roues

(la limite acceptable est d'environ 45 MJ). Heureusement, le passage de l'air dans les freins enlève une partie de la chaleur. Ainsi, en freinage normal, il ne restera que 40 % de l'énergie reçue dans chaque système de freinage à la fin du freinage. Ainsi, il ne restera que 28 MJ d'énergie thermique (40 % de 70 MJ) dans chaque système de freinage du Boeing 777 à la fin du freinage. Ce niveau d'énergie est maintenant acceptable, mais il faudra attendre environ 1 heure pour que les freins refroidissent suffisamment pour pouvoir redécoller. Pour diminuer encore plus l'énergie reçue, et ainsi diminuer le temps de refroidissement et l'usure des freins, on ajoute toute une série de moyens pour faire ralentir l'avion. Les aérofreins et les inverseurs de poussée des moteurs permettent de transférer une partie de l'énergie de l'avion à l'air.

Parfois, on peut atteindre des quantités d'énergie un peu trop grande. C'est ce qui se produit lors d'un décollage avorté. Un Boeing 777 décolle à 80 m/s et sa masse est plus grande qu'à l'atterrissage. Ainsi, son énergie cinétique peut atteindre 1200 MJ juste avant de quitter la piste. Si on abandonne le décollage tout près de la vitesse de décollage, chacun des 12 systèmes de freinage recevrait alors 100 MJ d'énergie. Le passage de l'air dans les freins élimine encore une fois une partie de cette chaleur, mais seulement 35 % est éliminée dans ce cas (puisqu'on freine au maximum, ce qui réduit le temps de freinage). À la fin du freinage, chaque système de freinage pourrait donc avoir jusqu'à 65 MJ d'énergie thermique (on n'utilise pas les aérofreins et les inverseurs de poussée pour aider à freiner l'avion lors d'un décollage avorté). À ce niveau d'énergie, il est fort probable qu'il y ait des dommages permanents aux freins, aux pneus et aux roues. Ce vidéo montre le train d'atterrissage d'un Boeing 777 après un test d'abandon de décollage. Clairement, on est allé au-delà de la quantité d'énergie acceptable.
https://www.youtube.com/watch?v=Mr4V680UQ-k

L'historique du principe

La découverte du principe de conservation de l'énergie est intéressante parce qu'elle est un merveilleux exemple de découverte simultanée.

Vers le milieu du 19e siècle, on avait accumulé une quantité importante d'observations montrant les équivalences entre différents phénomènes. Par exemple, on avait montré un lien entre les courants et la chaleur produite par ceux-ci et on avait montré un lien entre le travail mécanique et la chaleur produite par ce travail. Pour arriver au principe de conservation de l'énergie, il fallait prendre un peu de recul et considérer l'ensemble des transformations observées pour se rendre compte qu'il y avait un principe plus général. Vers 1840, on commençait à avoir un nombre suffisant d'expériences montrant ces liens, il fallait juste faire une synthèse de toutes ces expériences.

C'est ainsi qu'au moins 12 scientifiques (Sadi Carnot, Marc Séguin, Karl Holtzmann, Gustave-Adolphe Hirn, William Grove, Michael Faraday, Ludwig Colding, Karl Friedrich Mohr, Justus von Liebig, James Prescott Joule, Julius Robert von Mayer et Hermann von Helmholtz) ont tous formulé, à des degrés de perfection divers, le principe de conservation de l'énergie entre 1839 et 1850. Parmi ceux-ci, Helmholtz a probablement présenté la version la plus complète de ce principe en 1847.

Pour plus de détails concernant l'histoire de la découverte de la loi de la conservation de l'énergie, cliquez sur ce lien.
https://physique.merici.ca/mecanique/decouverteE.pdf

Toutefois, il était difficile de prouver théoriquement que le principe était vrai. En 1918, Emily Noether démontre que si les lois de la physique ne changent pas au cours du temps, alors l'énergie doit être conservée. En fait, le principe découvert par Noether est plus vaste puisqu'il montre que pour chaque symétrie (ici l'invariance dans le temps), il y a une quantité conservée (ici l'énergie).

Pourquoi utilise-t-on le terme « énergie potentielle » ?

Bernoulli utilise le terme *énergie* en 1717 pour parler du travail. En 1807, Thomas Young propose d'utiliser *énergie* pour la quantité mv^2 (qui porte alors le nom de *force vive*). En grec, énergie réfère à une activité, à un mouvement. Le terme semble donc approprié pour désigner une quantité qui dépend de la vitesse. À part ces deux utilisations singulières, le terme n'est pas utilisé avant 1847. C'est seulement quand Hermann von Helmholtz le reprend en 1847 pour désigner la quantité conservée qu'il venait de découvrir que son usage se répand. Puis, en 1853, Rankine classe les énergies en 2 catégories.

1) *Énergie réelle*
Toutes les formes d'énergie reliées à du mouvement se retrouvaient dans cette catégorie : l'énergie cinétique, l'énergie lumineuse, l'énergie associée au courant électrique…

2) *Énergie potentielle*
Toutes les formes d'énergie qui ne dépendent pas du mouvement se retrouvaient dans cette catégorie : énergie gravitationnelle, énergie d'un gaz, énergie d'un ressort comprimé…

Comme le terme *énergie* était associé au mouvement, Rankine considère que seules les formes d'énergie dans lesquelles il y a du mouvement étaient de véritables énergies. Il appelle alors les autres formes « énergies potentielles », car elles pouvaient potentiellement se transformer en énergies réelles, comme l'énergie gravitationnelle qui devient de l'énergie cinétique à mesure qu'un objet en chute libre tombe.

Cette classification, bien inutile, n'a pas été utilisée très longtemps et plus personne n'utilise l'expression « énergie réelle » aujourd'hui. Curieusement, l'expression « énergie potentielle » a survécu jusqu'à aujourd'hui même si elle n'a plus aucun sens. Bien des étudiants cherchent à comprendre ce qu'il y a de potentiel dans l'« énergie potentielle gravitationnelle ». Ils ont bien raison d'être intrigués parce qu'il n'y a effectivement rien de « potentiel » dans l'énergie gravitationnelle. Aujourd'hui, on considère que c'est une forme d'énergie au même titre que l'énergie cinétique et les autres formes d'énergie.

En fait, les énergies potentielles sont des énergies qui dépendent des forces exercées sur les objets du système, donc de la position des objets les uns par rapport aux autres. Par exemple, l'énergie gravitationnelle dépend de la hauteur de la masse et l'énergie du ressort dépend de l'étirement du ressort. Les énergies potentielles dépendent donc de la configuration du système et c'est pourquoi il serait plus approprié d'appeler U l'*énergie de configuration* plutôt que l'*énergie potentielle*. Toutefois, puisque tout le monde donne le nom d'énergie potentielle à U, nous garderons cette terminologie. Nous allégeons cependant un peu l'expression en omettant souvent l'adjectif « potentielle » dans les expressions « énergie potentielle gravitationnelle » et « énergie potentielle du ressort ».

Qu'est-ce que l'énergie ?

On cherche parfois à savoir à quoi correspond concrètement l'énergie. Sachez qu'aucun physicien ne pourra vous répondre si vous lui demandez : « Qu'est-ce que l'énergie ? ». En 1961, Richard Feynman, prix Nobel de physique, résume bien ce qu'on sait sur l'énergie.

> *Il y a une loi régissant tous les phénomènes naturels connus. Il n'y a aucune exception connue à cette loi, elle est exacte selon nos connaissances actuelles. Cette loi est la conservation de l'énergie. Elle nous dit qu'une certaine quantité, qu'on appelle énergie, ne change pas lors de n'importe quel changement dans la nature. C'est une idée très abstraite parce qu'il s'agit d'un principe mathématique qui dit qu'une quantité numérique ne change pas quand quelque chose se produit. Ce n'est pas la description d'un mécanisme ou de quelque chose de concret, c'est uniquement le fait étrange qu'on peut calculer un nombre et que si on calcule ce nombre après de nombreuses transformations se produisant dans la nature, il reste identique.*

Personne ne sait donc vraiment ce qu'est l'énergie, mais on sait que sa valeur reste constante et que cela peut nous aider à déduire le résultat de certaines transformations.

RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS

Le travail à partir de l'énergie potentielle

$$W = -\Delta U$$

Calcul de U à partir de F_x (en une dimension)

$$U = -\int F_x dx$$

Calcul des composantes de F à partir de U

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Énergie potentielle avec la gravitation et des ressorts

$$U = U_g + U_R$$

Énergie gravitationnelle près de la surface de la Terre

$$U_g = mgy$$

Énergie d'un ressort

$$U_R = \frac{1}{2}kx^2$$

Énergie mécanique

$$E_{mec} = E_k + U$$

Principe de conservation de l'énergie mécanique

$$\Delta E_{mec} = 0$$
$$E_{mec} = E'_{mec}$$
$$E_{mec} = \text{constante}$$

S'il n'y a pas de forces externes qui font un travail.
Si le travail interne est fait uniquement par des forces conservatives.

Lien entre l'angle et la hauteur pour un pendule

$$y = L(1-\cos\theta) \qquad\qquad \cos\theta = \frac{L-y}{L}$$

L'énergie mécanique avec des forces non conservatives et des forces externes

$$\Delta E_{mec} = W_{nc} + W_{ext}$$
$$E_{mec} + W_{nc} + W_{ext} = E'_{mec}$$

Équation à résoudre pour obtenir le temps de déplacement à partir de *U*

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_{mec} - U\right)}$$

Énergie gravitationnelle (formule générale)

$$U_g = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

Énergie mécanique d'un objet de masse *m* en orbite autour d'un astre de masse M_c

$$E_{mec} = -\frac{GM_c m}{2r}$$

Vitesse de libération près d'une planète de masse *M*

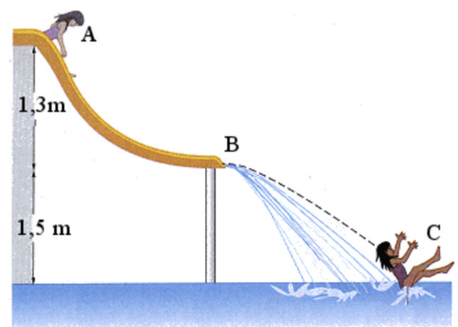
$$v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

EXERCICES

9.1 L'énergie gravitationnelle

1. Huguette, d'une masse de 30 kg, glisse sur la glissade montrée sur la figure.

   a) Quelle est la variation d'énergie gravitationnelle d'Huguette quand elle passe de point A au point B ?
   b) Quel est le travail fait par la force gravitationnelle quand Huguette passe de point A au point C ?



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/height-water-slide-figure-8-26-h-30-m-person-s-initial-speedat-point-055-m-s-thenew-horizo-q109994

9.2 Les forces conservatives

2. Un objet pouvant se déplacer le long de l'axe des x est soumis à une force donnée par

$$F_x = 2\tfrac{N}{m^3}\cdot x^3 + 2N$$

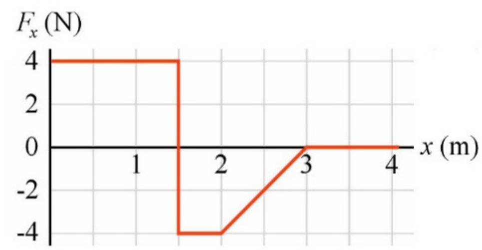
   a) Quelle est la formule de l'énergie potentielle associée à cette force ?
   b) Quelle est la différence d'énergie potentielle associée à cette force si l'objet passe de x = -2 m à x = 5 m ?
   c) Quel est le travail fait par cette force si l'objet passe de x = -2 m à x = 5 m ?

3. L'énergie potentielle d'un objet pouvant se déplacer le long de l'axe des y est donnée par la formule suivante.

$$U = 4\tfrac{J}{m^2}\cdot y^2 + 2\tfrac{J}{m}\cdot y - 3J$$

   Quelle est la force en y sur cet objet quand il est à la position y = 1 m ?

4. Quelle est la variation d'énergie potentielle d'un objet qui passe de $x = 0$ m à $x = 3$ m si la force sur l'objet est donnée par ce graphique.



5. L'énergie potentielle d'un objet est donnée par la formule suivante.

$$U = 4\tfrac{J}{m^2} \cdot x^2 + 2\tfrac{J}{m} \cdot (x + y + z) - 3\tfrac{J}{m^3} \cdot xyz$$

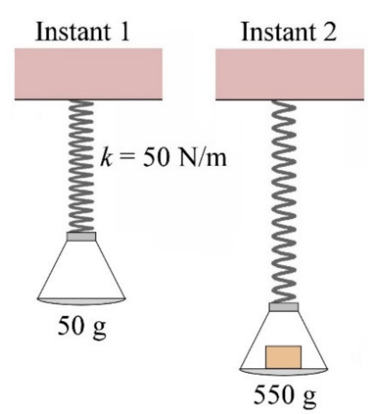
Quelle est la force sur cet objet quand il est à la position x = 1 m, y = 2 m et z = - 4 m ?

6. Un objet A est une distance r d'un autre objet B. La grandeur de la force sur l'objet A est donnée par (c'est une répulsion si la force est positive et une attraction si la force est négative)

$$F = \frac{15Jm^3}{r^4} - \frac{5Jm}{r^2}$$

a) Quelle est la formule de l'énergie potentielle associée à cette force ?
b) Quelle est l'énergie potentielle de l'objet quand il est à r = 2 m (utilisez 0 pour la constante dans U) ?
c) Quelle est l'énergie potentielle de l'objet quand il est à r = 5 m (utilisez 0 pour la constante dans U) ?
d) Quel est le travail fait par cette force sur un objet qui se déplace de r = 2 m à r = 5 m ?

7. Un plateau de 50 g est retenu par un ressort ayant une constante de 50 N/m. On ajoute ensuite une masse de 500 g dans le plateau, ce qui allonge le ressort, comme illustré sur la figure.

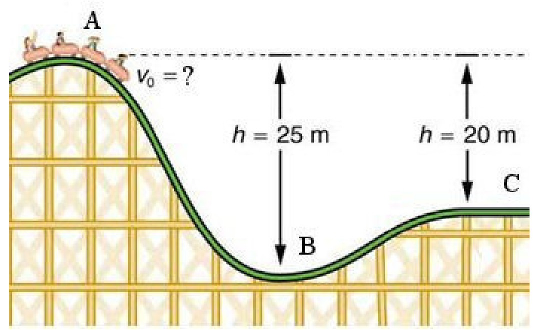


a) Quelle est l'énergie du ressort à l'instant 1 ?
b) Quelle est l'énergie du ressort à l'instant 2 ?
c) Quel est le travail fait par le ressort entre les instants 1 et 2 ?

9.3 La conservation de l'énergie mécanique

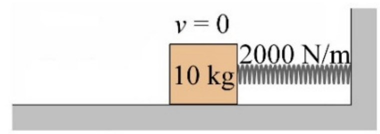
8. Un charriot de montage russe de 2000 kg (incluant les passagers) se déplace sur la piste montrée sur la figure. Au point B, la vitesse du charriot est de 25 m/s. Il n'y a pas de friction.

    a) Quelle est la vitesse du charriot au point A ?
    b) Quelle est la vitesse du charriot au point C ?



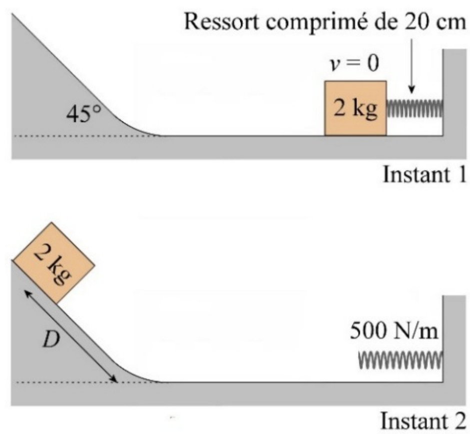
cnx.org/content/m42148/latest/?collection=col11406/latest

9. Dans la situation montrée à droite, le ressort est initialement comprimé de 20 cm et le bloc a une vitesse initiale nulle. Il n'y a pas de friction entre le bloc et le sol. On lâche alors le bloc et on le laisse partir.

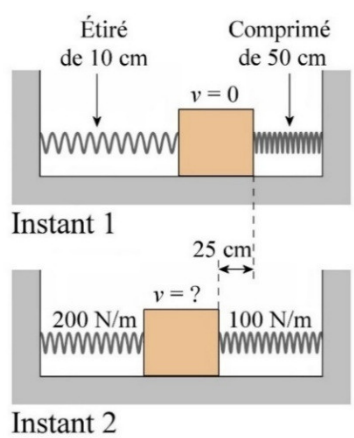


    a) Quelle est la vitesse du bloc quand le ressort n'est plus comprimé que de 5 cm ?
    b) Quelle est la vitesse du bloc une fois qu'il a quitté le ressort ?

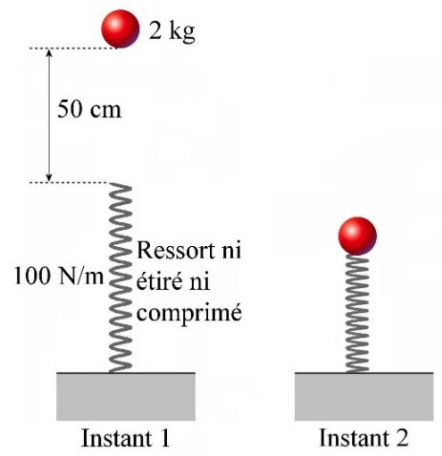
10. Dans la situation montrée à droite, quelle distance va parcourir le bloc de 2 kg sur la pente avant de s'arrêter (D sur la figure) s'il n'y a pas de friction entre le bloc et la surface ?



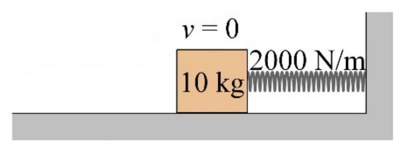
11. Dans la situation suivante, quelle est la vitesse du bloc de 5 kg à l'instant 2 s'il n'y a pas de friction entre le sol et le bloc ?



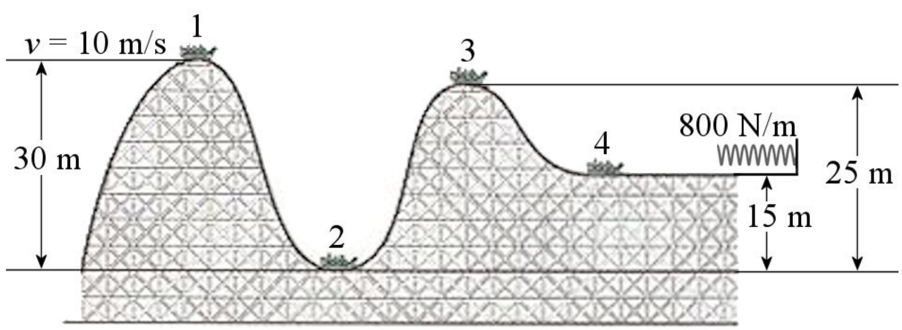
12. Une balle de 2 kg initialement au repos tombe sur un ressort comme illustré sur la figure. Quelle sera la compression maximale du ressort (d sur la figure) ? Il n'y a pas de friction.



13. Dans la situation montrée à droite, le ressort est initialement comprimé de 20 cm et le bloc a une vitesse initiale nulle. Il n'y a pas de friction entre le bloc et le sol. On lâche alors le bloc et on le laisse partir. Quelle est la compression du ressort quand l'énergie cinétique du bloc est égale à l'énergie du ressort ?



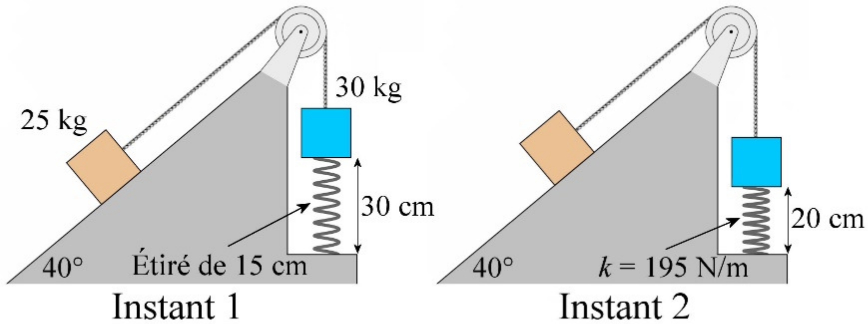
14. Un charriot de montagnes russes, d'une masse de 2000 kg (incluant les passagers) suit la piste montrée sur la figure. Au bout de la piste, le charriot est arrêté par un ressort. Il n'y a pas de friction.



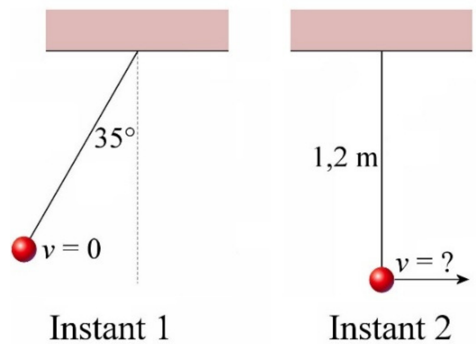
miretia.tistory.com/?page=2

a) Quelle sera la vitesse maximale atteinte par le charriot ?
b) Quelle sera la compression maximale du ressort quand le charriot va foncer dans le ressort ?
c) Quelle sera la vitesse du charriot quand l'énergie cinétique du charriot sera égale au double de l'énergie du ressort ?

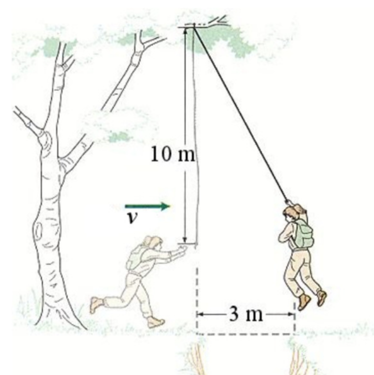
15. Deux blocs sont fixés à un ressort étiré de 15 cm comme illustré sur la figure de gauche (instant 1). On laisse ensuite partir les blocs. Quelle sera la vitesse des blocs quand le bloc de 30 kg sera 10 cm plus bas (instant 2) ? Il n'y a pas de friction.



16. À l'instant 1, la vitesse d'un pendule de 4 kg est nulle. Quelle sera sa vitesse à l'instant 2 ? Il n'y a pas de friction.

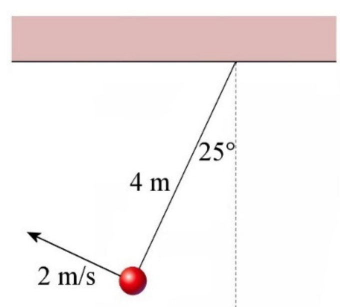


17. Radu veut traverser un ravin en se tenant à une corde qui pend d'un arbre. Quand la corde va atteindre son angle maximal avec la verticale, Radu va simplement se laisser tomber verticalement. Quelle est la vitesse minimale avec laquelle Radu doit courir pour ne pas tomber au fond du ravin ? Il n'y a pas de friction.



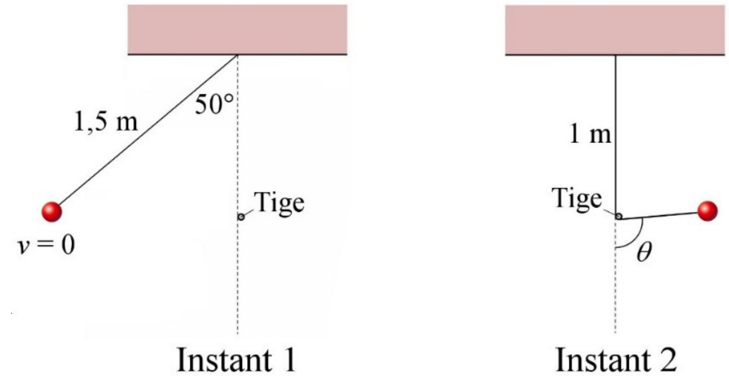
www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/physics-archive-2009-march-12

18. Un pendule de 2 kg a une vitesse de 2 m/s quand la corde fait un angle de 25° avec la verticale. Il n'y a pas de friction.

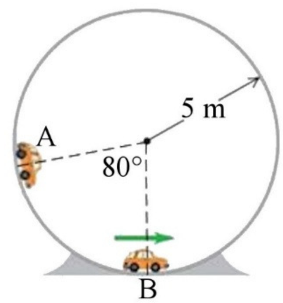


a) Quelle sera la vitesse maximale de ce pendule ?
b) Quel sera l'angle maximal entre la corde et la verticale ?

19. Un pendule démarre son mouvement dans la position montrée sur la figure de gauche. Quand la corde devient verticale, elle frappe une petite tige, ce qui donne le mouvement montré sur la figure de droite. Quel est l'angle θ maximal sur la figure de droite ? Il n'y a pas de friction.

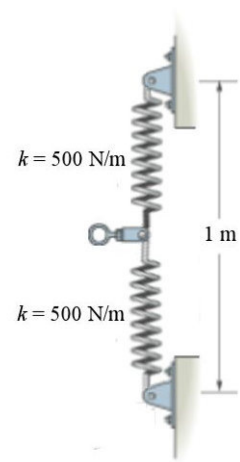


20. Au point A, la voiture a une vitesse nulle. Combien de g une personne dans la voiture va-t-elle subir au point B ? (Il n'y a pas de moteur dans la voiture. Elle descend uniquement grâce à la force de gravitation et il n'y a pas de friction.)

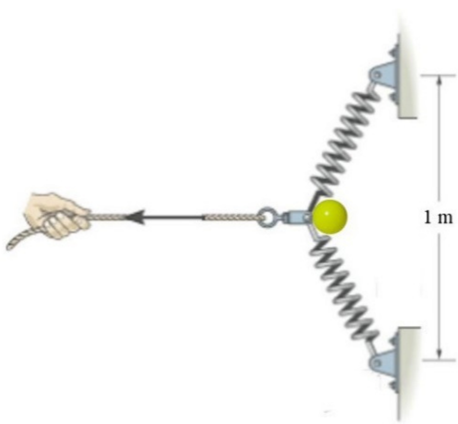


www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/physics-archive-2011-october-07

21. Dans la configuration de droite, les ressorts ne sont ni étirés ni comprimés. (Cette situation est vue de haut.)



On recule alors l'anneau de 30 cm en tirant sur une corde et on place une balle de 100 g entre les deux ressorts.

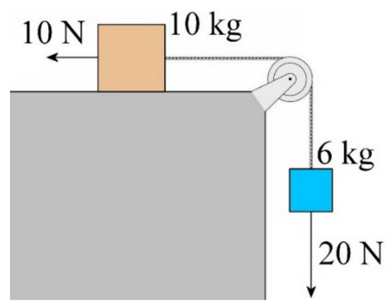


On relâche ensuite la corde et la balle est projetée. S'il n'y a pas de friction, quelle est la vitesse finale de la balle ?

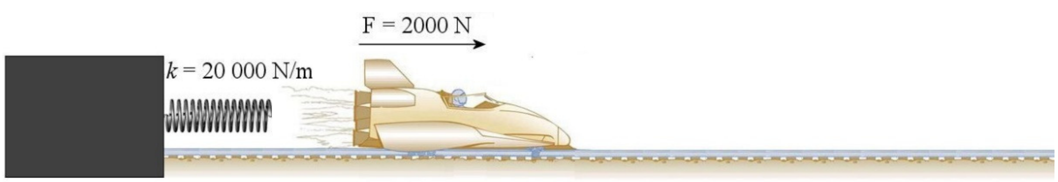
www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/springs-ab-bc-stiffness-k-unstretched-length-l-determine-displacement-d-cord-wall-force-f--q5863675

9.4 L'énergie mécanique en présence de forces externes ou de forces non conservatives

22. Dans la situation montrée sur la figure, les blocs sont initialement au repos et il n'y a pas de friction. Il y a cependant deux forces qui agissent sur les blocs. Quelle sera la vitesse des blocs après qu'ils se soient déplacés de 2 m ?



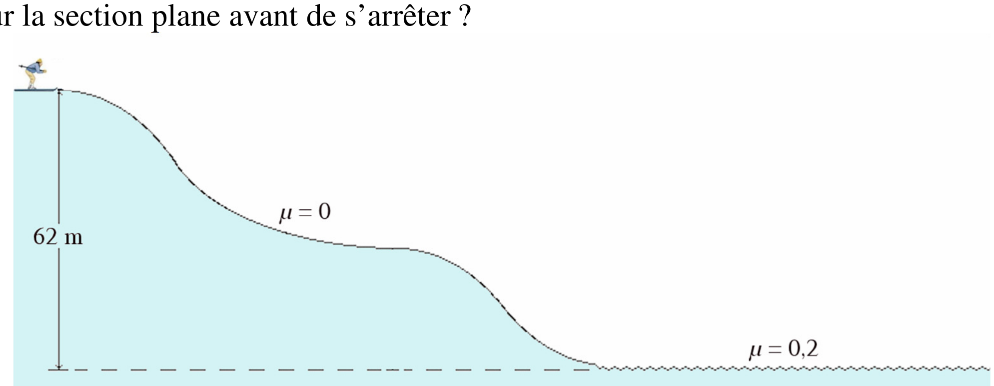
23. Pour qu'une voiture-fusée de 500 kg atteigne plus rapidement de grandes vitesses, on la propulse à l'aide d'un ressort comprimé au début de son mouvement. Avant le départ de la voiture, le ressort était comprimé de 3 m. On démarre ensuite les moteurs de la fusée, qui font une force de 2000 N, et on relâche le ressort.



cnx.org/content/m42073/latest/?collection=col11406/latest

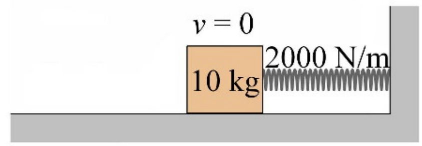
Quelle sera la vitesse de la voiture de la fusée après un déplacement de 50 m s'il n'y a pas de friction ?

24. Armande fait une descente sur une pente de ski. Sa vitesse initiale est nulle. Après une baisse d'altitude de 62 m, elle arrive sur une section plane. Il n'y a pas de friction sur la pente alors que le coefficient de friction cinétique entre le sol et les skis d'Armande est de 0,2 sur la section plane. Quelle distance va faire Armande sur la section plane avant de s'arrêter ?



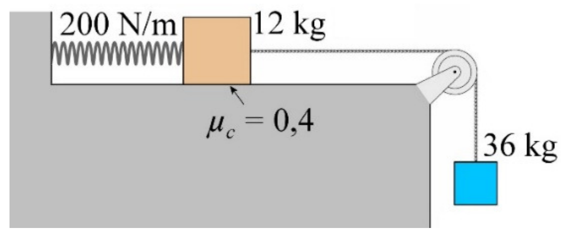
www.physics.ucdavis.edu/Classes/Physics7/QPS/QP2.HTML

25. Un bloc de 10 kg est poussé par un ressort ayant une constante de 2000 N/m et comprimé de 50 cm. Quand on relâche le bloc, il fait un déplacement de 42 m avant de s'arrêter. Quel est le coefficient de friction entre le bloc et le sol ?

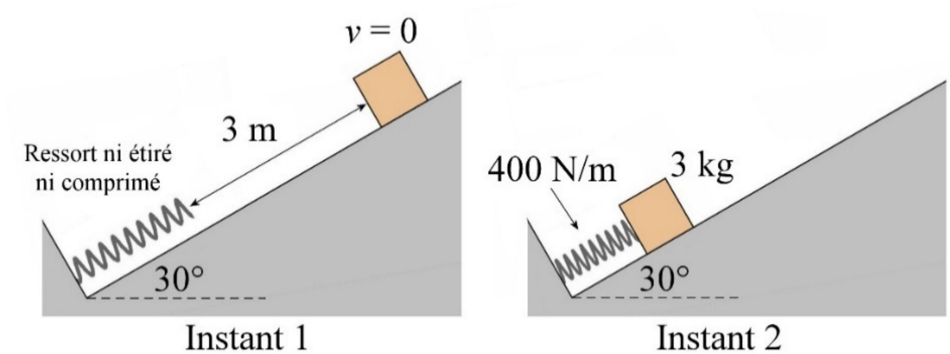


26. Dans la situation montrée sur la figure, le ressort n'est ni étiré ni comprimé initialement.

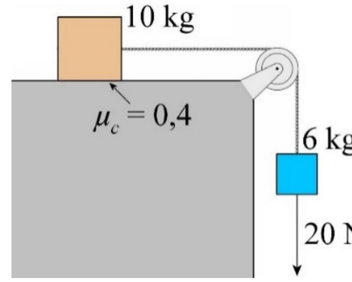
a) Quelle sera la vitesse des blocs après un déplacement de 1 m s'ils étaient initialement au repos ?
b) Quelle sera la vitesse des blocs après un déplacement de 3,2 m s'ils étaient initialement au repos ?



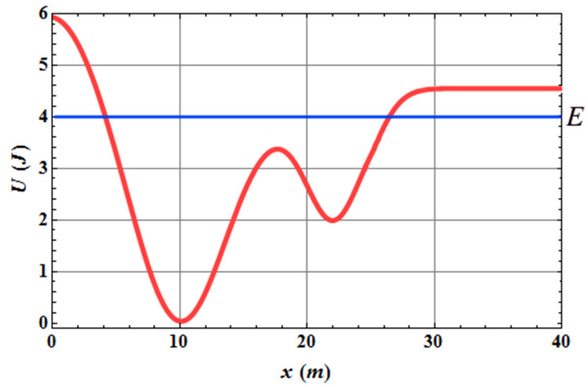
27. Dans la situation suivante, le bloc a une vitesse initiale nulle et le coefficient de friction cinétique de 0,2 entre le bloc et la pente. Quelle sera la compression maximale du ressort ?



28. Dans la situation montrée sur la figure, les blocs sont initialement au repos. Il y a cependant une force qui agit sur le bloc de 6 kg et une force de friction qui agit sur le bloc de 10 kg. Quelle sera la vitesse des blocs après que le bloc de 6 kg se soit déplacé de 2 m vers le bas ?



9.6 Le graphique de l'énergie potentielle en fonction de la position



www.rakeshkapoor.us/ClassNotes/PotentialEnergy.html

29. Voici un graphique montrant l'énergie potentielle d'un objet de 2 kg ayant une énergie mécanique de 4 J.

Approximez les réponses aux questions suivantes.

a) À quels endroits l'objet ne peut-il pas être ?
b) À quel endroit la vitesse de l'objet est-elle la plus grande ?
c) Quelle est la vitesse de l'objet quand il est à $x = 20$ m ?
d) À quels endroits l'objet pourrait-il être en équilibre stable et quel devrait être l'énergie mécanique de l'objet pour être en équilibre à ces endroits ?
e) À quel endroit l'objet pourrait-il être en équilibre instable et quel devrait être l'énergie mécanique de l'objet pour être en équilibre à cet endroit ?
f) Quel est le travail fait par la force associée à cette énergie potentielle quand l'objet passe de $x = 10$ m à $x = 20$ m ?
g) Esquissez le graphique de la force en fonction de la position pour cet objet.

30. L'énergie potentielle d'un objet est donnée par la formule suivante.

$$U = 2\tfrac{J}{m^3}\cdot x^3 + 3\tfrac{J}{m^2}\cdot x^2 - 72\tfrac{J}{m}\cdot x + 36J$$

Trouvez les endroits où l'objet peut être en équilibre et déterminez si l'équilibre est stable, indifférent ou instable.

9.7 Le temps de déplacement à partir de *U*

31. L'énergie potentielle d'un objet de 2 kg est donnée par la formule suivante.

$$U = 9\tfrac{N}{m^3}\cdot x^4$$

Combien de temps faudra-t-il pour que l'objet passe de $x = 0$ à $x = 1$ m si l'énergie mécanique est de 144 J ?

(Utilisez Wolfram pour faire l'intégrale : https://www.wolframalpha.com/)

32. L'énergie potentielle d'un objet de 2 kg est donnée par la formule suivante.

$$U = 2N \cdot x$$

Trouvez la formule qui donne la position de l'objet en fonction du temps si l'énergie mécanique de l'objet est de 16 J sachant que l'objet est à $x = 0$ et que sa vitesse est positive à $t = 0$.

9.8 Formule générale de l'énergie gravitationnelle

Pour cette section, utiliser les données suivantes.

Terre

Masse de la Terre = 5,9722 x 10^{24} kg
Rayon de la Terre = 6371 km
Distance entre la Terre et le Soleil = 149 600 000 km

Lune

Masse de la Lune = 7,346 x 10^{22} kg
Rayon de la Lune = 1737 km
Distance entre la Terre et la Lune = 384 400 km

33. Sally, ayant une masse de 100 kg, est à 400 000 km de la surface de la Terre. Elle tombe vers la Terre avec une vitesse initiale nulle. (Pour ce problème, on va faire comme s'il n'y avait pas d'atmosphère.)

a) À quelle distance Sally sera-t-elle de la surface de la Terre quand sa vitesse sera de 5000 m/s ?
b) À quelle vitesse va-t-elle frapper la surface de la Terre ?

34. Quelle est la vitesse de libération quand on est à la surface de la Lune ?

35. On a lancé un objet vers le haut à partir de la surface de la Lune et il est monté jusqu'à atteindre une altitude de 3000 km. À quelle vitesse a-t-on lancé cet objet ?

36. Un satellite de 350 kg est en orbite circulaire à une altitude de 500 km au-dessus de la surface de la Terre. Quel travail les moteurs doivent-ils faire sur ce satellite pour prendre ce satellite initialement au repos à la surface de la Terre et le placer sur cette orbite ?

37. Pour placer un satellite en orbite, on doit lui donner de l'énergie. Une partie de cette énergie est sous forme d'énergie cinétique (puisque le satellite doit se déplacer rapidement en orbite) et une partie est sous forme d'énergie gravitationnelle (puisqu'on a éloigné ce satellite de la Terre).

   a) Quel pourcentage de l'énergie donnée est sous forme d'énergie cinétique si on place le satellite en orbite basse (150 km d'altitude) ?
   b) Quel doit être le rayon de l'orbite pour que 50 % de l'énergie donnée soit sous forme d'énergie cinétique et 50 % sous forme d'énergie gravitationnelle ?

38. Dans une vieille série télévisée appelée *cosmos 1999*, une explosion nucléaire à la surface de la Lune permettait à la Lune de se libérer de la Terre et de se promener librement dans l'univers (ce qui leur permettait de rencontrer des types d'extraterrestres différents à chaque épisode).

   a) En supposant que toute l'énergie de l'explosion était transmise à la Lune, quelle devrait être l'énergie minimale libérée par cette explosion pour permettre à la Lune de se libérer de la Terre ?

www.oocities.org/area51/jupiter/1630/

   b) Sachant que l'explosion de la bombe atomique d'Hiroshima a libéré une énergie de $6{,}3 \times 10^{13}$ J, déterminez le nombre de bombes atomiques d'Hiroshima qu'il faudrait pour faire une telle explosion qui libère la Lune de la Terre.

39. Quel travail les moteurs d'une fusée doivent-ils faire pour prendre une sonde de 100 kg initialement au repos à la surface de la Terre (en partant de côté vers la Lune) et l'amener pour qu'elle soit au repos à la surface de la Lune (en arrivant du côté vers la Terre) ?

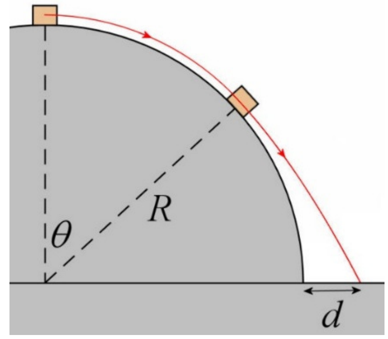
40. Un satellite de 500 kg est en orbite à une altitude de 1000 km au-dessus de la surface de la Terre.

   a) Quelle est son énergie mécanique ?
   b) Quelle est son énergie gravitationnelle ?
   c) Quelle est son énergie cinétique ?
   d) Quelle énergie devrait-on fournir au satellite pour qu'il puisse se libérer de la Terre ?

Défis

(Questions plus difficiles que les questions qu'il y aura à l'examen.)

41. Une personne glisse sur la surface d'un hémisphère ayant un rayon de 5 m. La vitesse au sommet de l'hémisphère est très petite (mais pas zéro sinon la personne resterait au sommet) et il n'y a pas de friction entre la personne et la surface. Il glissera le long de l'hémisphère pendant un certain temps, mais à un moment donné, il perdra le contact avec la surface de l'hémisphère.



a) À quel angle θ la personne qui glisse va-t-elle perdre contact avec la sphère ?
b) À quelle distance d de la sphère la personne va-t-elle tomber ?

Vous pouvez même visualiser ce qui se passe avec ce petit clip.
https://physique.merici.ca/mecanique/slideoffsphere.mpg

RÉPONSES

9.1 L'énergie gravitationnelle

1. a) -382,2 J b) 823,2 J

9.2 Les forces conservatives

2. a) $U = -\frac{1}{2}\frac{N}{m^3}x^4 - 2N \cdot x + Cst$ b) - 318,5 J c) 318,5 J
3. -10 N
4. -2 J
5. $\vec{F} = \left(-34\vec{i} - 14\vec{j} + 4\vec{k}\right)N$
6. a) $U = \frac{5Jm^3}{r^3} - \frac{5Jm}{r} + Cst$ b) -1,875 J c) -0,96 J d) -0,915 J
7. a) 0,0024 J b) 0,2905 J c) -0,2881 J

9.3 La conservation de l'énergie mécanique

8. a) 11,62 m/s b) 22,96 m/s
9. a) 2,739 m/s b) 2,828 m/s
10. 72,15 cm
11. 1,803 m/s
12. 68,01 cm

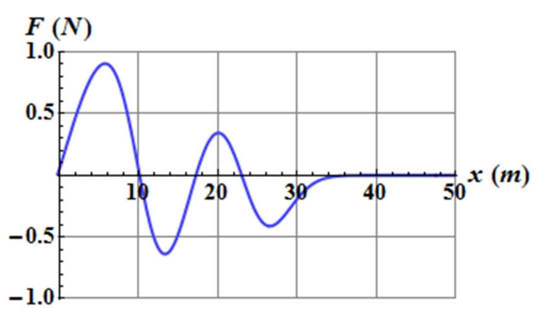
13. 14,14 cm
14. a) 26,23 m/s b) 31,38 m c) 16,21 m/s
15. 0,753 2 m/s
16. 2,062 m/s
17. 3,005 m/s
18. a) 3,368 m/s b) 31,2°
19. 94,1°
20. 2,653
21. 8,31 m/s

9.4 L'énergie mécanique en présence de forces externes ou de forces non conservatives

22. 4,147 m/s
23. 27,568 m/s
24. 310 m
25. 0,060 74
26. a) 2,928 m/s b) impossible
27. 40,44 cm
28. 3,146 m/s

9.6 Le graphique de l'énergie potentielle en fonction de la position

29. a) $x < 4$ m et $x > 26$ m b) $x = 10$ m c) 1,2 m/s
    d) Équilibre stable à $x = 10$ m. L'énergie mécanique devrait être de 0,2 J
    Équilibre stable à $x = 22$ m. L'énergie mécanique devrait être de 2 J
    e) Équilibre instable à $x = 17$ m. L'énergie mécanique devrait être de 3,4 J
    f) -2,4 J
    g)



www.rakeshkapoor.us/ClassNotes/PotentialEnergy.html

30. Équilibre stable à $x = 3$ m et équilibre instable à $x = -4$ m.

9.7 Le temps de déplacement à partir de *U*

31. 0,08387 s

32. $x = 8m - \frac{1}{2}\frac{m}{s^2}(t-4s)^2$ ou $x = -\frac{1}{2}\frac{m}{s^2}t^2 + 4\frac{m}{s}t$ (Les deux réponses sont équivalentes)

9.8 Formule générale de l'énergie gravitationnelle

33. a) 23 197 km b) 11 098 m/s
34. 2376 m/s
35. 1891 m/s
36. 1,175 x 10^{10} J
37. a) 95,5 % b) 9556,5 km
38. a) 3,809 x 10^{28} J b) 6,046 x 10^{14} fois la bombe d'Hiroshima !
39. 5,871 x 10^{9} J
40. a) -1,352 x 10^{10} J b) -2,704 x 10^{10} J c) 1,352 x 10^{10} J d) 1,352 x 10^{10} J

Défis

41. a) 48,19° b) 3,023 m