Solutionnaire du chapitre 2

1. a) La vitesse moyenne en x est

$$\begin{aligned}\bar{v}_x &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &= \frac{8m - 0m}{2s} \\ &= 4\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

La vitesse moyenne en y est

$$\begin{aligned}\bar{v}_y &= \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &= \frac{6m - 0m}{2s} \\ &= 3\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

La vitesse moyenne est donc

$$\vec{\bar{v}} = \left(4\vec{i} + 3\vec{j}\right)\tfrac{m}{s}$$

b) Pour trouver l'accélération moyenne, on va séparer la vitesse en composantes

À $t = 0$ s les composantes de la vitesse sont

$$\begin{aligned}v_x &= v\cos\theta = 15\tfrac{m}{s}\cdot\cos 30° = 12{,}99\tfrac{m}{s} \\ v_y &= v\sin\theta = 15\tfrac{m}{s}\cdot\sin 30° = 7{,}5\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

À $t = 2$ s les composantes de la vitesse sont

$$\begin{aligned}v_x &= v\cos\theta = 20\tfrac{m}{s}\cdot\cos 120° = -10\tfrac{m}{s} \\ v_y &= v\sin\theta = 20\tfrac{m}{s}\cdot\sin 120° = 17{,}32\tfrac{m}{s}\end{aligned}$$

L'accélération moyenne en x est

$$\begin{aligned}\overline{a}_x &= \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ &= \frac{-10\frac{m}{s} - 12{,}99\frac{m}{s}}{2s} \\ &= -11{,}495\frac{m}{s^2}\end{aligned}$$

L'accélération moyenne en y est

$$\begin{aligned}\overline{a}_y &= \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \\ &= \frac{17{,}32\frac{m}{s} - 7{,}5\frac{m}{s}}{2s} \\ &= 4{,}91\frac{m}{s^2}\end{aligned}$$

L'accélération moyenne est donc

$$\vec{\overline{a}} = \left(-11{,}495\vec{i} + 4{,}91\vec{j}\right)\frac{m}{s^2}$$

2. a) Les coordonnées des positions 1 et 2 sont (en mettant le Soleil à (0,0))

Position 1	$x = 1{,}5 \text{ x } 10^{11}$ m	$y = 0$ m
Position 2	$x = 0$ m	$y = 1{,}5 \text{ x } 10^{11}$ m

Les déplacements en x et y sont

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 0m - 1{,}5\times10^{11}m = -1{,}5\times10^{11}m$$
$$\Delta y = y_2 - y_1 = 1{,}5\times10^{11}m - 0m = 1{,}5\times10^{11}m$$

Le déplacement est donc

$$\overrightarrow{\Delta r} = \left(-1{,}5\times10^{11}\vec{i} + 1{,}5\times10^{11}\vec{j}\right)m$$

b) La distance parcourue est la longueur de l'arc de cercle entre les points 1 et 2, qui est le quart de la circonférence

$$\text{distance} = \frac{1}{4}2\pi r = \frac{\pi r}{2} = \frac{\pi\cdot1{,}5\times10^{11}m}{2} = 2{,}3562\times10^{11}m$$

c) Les composantes de la vitesse moyenne sont

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0m - 1{,}5\times10^{11}m}{7{,}8894\times10^6 s} = -19013\tfrac{m}{s}$$
$$\bar{v}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{1{,}5\times10^{11}m - 0m}{7{,}8894\times10^6 s} = 19013\tfrac{m}{s}$$

La vitesse moyenne est donc

$$\vec{\bar{v}} = \left(-19013\vec{i} + 19013\vec{j}\right)\tfrac{m}{s}$$

d) Les composantes de l'accélération moyenne sont

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{-30000\tfrac{m}{s} - 0\tfrac{m}{s}}{7{,}8894\times10^6 s} = -0{,}0038\tfrac{m}{s^2}$$
$$\bar{a}_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{0\tfrac{m}{s} - 30000\tfrac{m}{s}}{7{,}8894\times10^6 s} = -0{,}0038\tfrac{m}{s^2}$$

L'accélération moyenne est donc

$$\vec{\bar{a}} = \left(-0{,}0038\vec{i} - 0{,}0038\vec{j}\right)\tfrac{m}{s^2}$$

3. a) On trouve les composantes de la vitesse en dérivant les formules de la position.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left(-3\tfrac{m}{s^2}\cdot t^2 + 2\tfrac{m}{s}\cdot t - 4m\right)}{dt} = -6\tfrac{m}{s^2}\cdot t + 2\tfrac{m}{s}$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d\left(-2\tfrac{m}{s^3}\cdot t^3 + 6\tfrac{m}{s^2}\cdot t^2 + 1m\right)}{dt} = -6\tfrac{m}{s^3}\cdot t^2 + 12\tfrac{m}{s^2}\cdot t$$

À t = 1 s, ces composantes sont

$$v_x = -6\tfrac{m}{s^2}\cdot 1s + 2\tfrac{m}{s} = -4\tfrac{m}{s}$$
$$v_y = -6\tfrac{m}{s^3}\cdot(1s)^2 + 12\tfrac{m}{s^2}\cdot 1s = 6\tfrac{m}{s}$$

La grandeur de la vitesse est donc

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 7{,}21\tfrac{m}{s}$$

et sa direction est

$$\theta = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{6}{-4} = 123,7°$$

b) On trouve les composantes de l'accélération en dérivant les formules de la vitesse.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d\left(-6\frac{m}{s^2}\cdot t + 2\frac{m}{s}\right)}{dt} = -6\frac{m}{s^2}$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d\left(-6\frac{m}{s^3}\cdot t^2 + 12\frac{m}{s^2}\cdot t\right)}{dt} = -12\frac{m}{s^3}\cdot t + 12\frac{m}{s^2}$$

À t = 1 s, ces composantes sont

$$a_x = -6\frac{m}{s^2}$$
$$a_y = -12\frac{m}{s^3}\cdot 1s + 12\frac{m}{s^2} = 0\frac{m}{s^2}$$

La grandeur de l'accélération est donc

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 6\frac{m}{s^2}$$

et sa direction est

$$\theta = \arctan\frac{a_y}{a_x} = \arctan\frac{0}{-6} = 180°$$

4. On trouve la position avec

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = 2m + 2\frac{m}{s}\cdot 5s + \frac{1}{2}\cdot 1\frac{m}{s^2}\cdot(5s)^2 = 24,5m$$
$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = -2m + 4\frac{m}{s}\cdot 5s + \frac{1}{2}\cdot\left(-2\frac{m}{s^2}\right)\cdot(5s)^2 = -7m$$
$$z = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2 = 2m + \left(-1\frac{m}{s}\right)\cdot 5s + \frac{1}{2}\cdot 0\frac{m}{s^2}\cdot(5s)^2 = -3m$$

L'objet est donc à la position (24,5 m, -7 m, -3 m) (on pourrait dire aussi $\vec{r} = \left(24,5\vec{i} - 7\vec{j} - 3\vec{k}\right)m$).

5. On trouve l'accélération en x avec

$$\begin{gathered}2a_x\left(x-x_0\right)=v_x^2-v_{x0}^2\\ 2\cdot a_x\cdot\left(2m-1m\right)=\left(5\tfrac{m}{s}\right)^2-\left(-2\tfrac{m}{s}\right)^2\\ a_x=10,5\tfrac{m}{s^2}\end{gathered}$$

On trouve l'accélération en y avec

$$\begin{gathered}2a_y\left(y-y_0\right)=v_y^2-v_{y0}^2\\ 2\cdot a_y\cdot\left(1m--1m\right)=\left(6\tfrac{m}{s}\right)^2-\left(0\tfrac{m}{s}\right)^2\\ a_y=9\tfrac{m}{s^2}\end{gathered}$$

On trouve l'accélération en z avec

$$\begin{gathered}2a_z\left(z-z_0\right)=v_x^2-v_{x0}^2\\ 2\cdot a_z\cdot\left(-4m--2m\right)=\left(-7\tfrac{m}{s}\right)^2-\left(1\tfrac{m}{s}\right)^2\\ a_z=-12\tfrac{m}{s^2}\end{gathered}$$

L'accélération est donc

$$\vec{a}=\left(10,5\vec{i}+9\vec{j}-12\vec{k}\right)\tfrac{m}{s^2}$$

6. a) Les composantes de la vitesse initiale sont

$$\begin{gathered}v_{0x}=50\tfrac{m}{s}\cdot\cos 32°=42,4\tfrac{m}{s}\\ v_{0y}=50\tfrac{m}{s}\cdot\sin 32°=26,5\tfrac{m}{s}\end{gathered}$$

On trouve le temps de vol avec

$$\begin{gathered}y=y_0+v_{0y}t-\tfrac{1}{2}gt^2\\ 0m=0m+26,5\tfrac{m}{s}\cdot t-\tfrac{1}{2}\cdot 9,8\tfrac{m}{s^2}\cdot t^2\\ 26,5\tfrac{m}{s}\cdot t=4,9\tfrac{m}{s^2}\cdot t^2\\ 26,5\tfrac{m}{s}=4,9\tfrac{m}{s^2}\cdot t\\ t=5,407s\end{gathered}$$

b) On trouve la hauteur maximale en utilisant le fait que la vitesse en y est nulle au point le plus haut.

$$-2g\left(y-y_0\right)=v_y^2-v_{0y}^2$$
$$-2\cdot 9,8\tfrac{m}{s^2}\cdot\left(y-0m\right)=\left(0\tfrac{m}{s}\right)^2-\left(26,5\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$y=35,82m$$

c) La portée est

$$\begin{aligned}x&=x_0+vt\\&=0m+42,4\tfrac{m}{s}\cdot 5,407s\\&=229,3m\end{aligned}$$

7. a) Les composantes de la vitesse initiale sont

$$v_{0x}=45\tfrac{m}{s}\cdot\cos 60°=22,5\tfrac{m}{s}$$
$$v_{0y}=45\tfrac{m}{s}\cdot\sin 60°=39,0\tfrac{m}{s}$$

On trouve la hauteur maximale en utilisant le fait que la vitesse en y est nulle au point le plus haut.

$$-2g\left(y-y_0\right)=v_y^2-v_{0y}^2$$
$$-2\cdot 9,8\tfrac{m}{s^2}\cdot\left(y-0m\right)=\left(0\tfrac{m}{s}\right)^2-\left(39,0\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$y=77,49m$$

b) On trouve le temps de vol avec

$$y=y_0+v_{0y}t-\tfrac{1}{2}gt^2$$
$$-265m=0m+39,0\tfrac{m}{s}\cdot t-\tfrac{1}{2}\cdot 9,8\tfrac{m}{s^2}\cdot t^2$$
$$265m+39\tfrac{m}{s}\cdot t-4,9\tfrac{m}{s^2}\cdot t^2=0$$
$$t=12,34s \quad\text{et}\quad t=-4,38s$$

Seule la réponse positive est bonne.

c) La portée est

$$\begin{aligned}x&=x_0+vt\\&=0m+22,5\tfrac{m}{s}\cdot 12,34s\\&=277,6m\end{aligned}$$

d) La vitesse en x reste toujours la même.

$$v_x = v_{0x} = 22,5\,\tfrac{m}{s}$$

À l'arrivée au sol, la vitesse en y est

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} - gt \\ &= 39,0\,\tfrac{m}{s} - 9,8\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 12,34s \\ &= -81,9\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

La grandeur de la vitesse est donc

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 85,0\,\tfrac{m}{s}$$

et sa direction est

$$\theta = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{-81,9}{22,5} = -74,6°$$

8. On trouve la vitesse avec

$$\begin{aligned} y &= (\tan\theta)\,x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2 \\ 1,05m &= (\tan 40°)\cdot 10m - \left(\frac{9,8\,\tfrac{m}{s^2}}{2\cdot v_0^2\cdot\cos^2 40°}\right)\cdot(10m)^2 \\ v_0 &= 10,67\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

9. Avec la hauteur maximale, on peut trouver la vitesse initiale en y.

$$\begin{aligned} -2g\,(y - y_0) &= v_y^2 - v_{0y}^2 \\ -2\cdot 9,8\,\tfrac{m}{s^2}\cdot(0,42m - 0m) &= \left(0\,\tfrac{m}{s}\right)^2 - v_{0y}^2 \\ v_{0y} &= 2,87\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Avec la portée, on peut trouver la vitesse initiale en x.

$$x = x_0 + v_{0x} t$$
$$1{,}06m = 0m + v_{0x} \cdot 0{,}5s$$
$$v_{0x} = 2{,}12 \tfrac{m}{s}$$

La grandeur de la vitesse initiale est donc

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 3{,}57 \tfrac{m}{s}$$

et sa direction est

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{2{,}87}{2{,}12} = 53{,}5°$$

10. Puisque Ruprecht retombe à la même hauteur, on peut trouver l'angle avec la formule de la portée

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$
$$70m = \frac{\left(35 \tfrac{m}{s}\right)^2 \cdot \sin 2\theta}{9{,}8 \tfrac{m}{s^2}}$$
$$\theta = 17{,}03° \quad \text{ou} \quad \theta = 72{,}97°$$

La photographie et le bon sens suggèrent que c'est 17,03° qui est la bonne réponse.

La durée du vol se trouve alors avec

$$y = y_0 + v_{0y} t - \tfrac{1}{2} g t^2$$
$$0m = 0m + \left(35 \tfrac{m}{s} \cdot \sin 17{,}03°\right) \cdot t - \tfrac{1}{2} \cdot 9.8 \tfrac{m}{s^2} \cdot t^2$$
$$10{,}25 \tfrac{m}{s} \cdot t = 4{,}9 \tfrac{m}{s^2} \cdot t^2$$
$$10{,}25 \tfrac{m}{s} = 4{,}9 \tfrac{m}{s^2} \cdot t$$
$$t = 2{,}09s$$

11. a) On trouve la vitesse avec

$$y = (\tan\theta)\,x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$
$$-20m = (\tan 35°)\cdot 350m - \left(\frac{9{,}8\,\frac{m}{s^2}}{2\cdot v_0^2\cdot\cos^2 35°}\right)\cdot(350m)^2$$
$$v_0 = 58{,}09\,\tfrac{m}{s}$$

b) Le temps de vol est

$$y = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$-20m = 0m + \left(58{,}09\,\tfrac{m}{s}\cdot\sin 35°\right)t - 4{,}9\,\tfrac{m}{s^2}\cdot t^2$$
$$20m + 33{,}32\,\tfrac{m}{s}\cdot t - 4{,}9\,\tfrac{m}{s^2}\cdot t^2 = 0$$
$$t = 7{,}355s \quad \text{et} \quad t = -0{,}555s$$

Seule la réponse positive est bonne.

c) La hauteur maximale fut de

$$-2g\,(y - y_0) = v_y^2 - v_{0y}^2$$
$$-2\cdot 9{,}8\,\tfrac{m}{s^2}\cdot(y - 0m) = \left(0\,\tfrac{m}{s}\right)^2 - \left(33{,}32\,\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$y = 56{,}65m$$

d) La vitesse en x reste toujours la même.

$$v_x = v_{0x} = 58{,}09\,\tfrac{m}{s}\cdot\cos 35° = 47{,}59\,\tfrac{m}{s}$$

À l'arrivée au sol, la vitesse en y est

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} - gt \\ &= 33{,}32\,\tfrac{m}{s} - 9{,}8\,\tfrac{m}{s^2}\cdot 7{,}355s \\ &= -38{,}76\,\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

La grandeur de la vitesse est donc

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 61{,}37\,\tfrac{m}{s}$$

et sa direction est

$$\theta = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{-38,76}{47,59} = -39,16°$$

12. a)

Si la vitesse est horizontale à $t = 3$ s, c'est que l'objet a atteint sa hauteur maximale. Puisque l'objet retombe à la même hauteur qu'il a été lancé, le temps de vol total est deux fois plus grand que le temps nécessaire pour atteindre la hauteur maximale. Le temps de vol est donc de 6 s.

Quant à la vitesse en x, elle est toujours la même. Comme elle est de 20 m/s au point le plus haut, elle est aussi de 20 m/s au départ.

La portée est donc de

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t \\ &= 0m + 20\tfrac{m}{s}\cdot 6s \\ &= 120m \end{aligned}$$

b) Comme la vitesse en y est nulle à la hauteur maximale, on a

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} - gt \\ 0\tfrac{m}{s} &= v_{0y} - 9,8\tfrac{m}{s^2}\cdot 3s \\ v_{oy} &= 29,4\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

La vitesse en x est toujours de 20 m/s

$$v_{0x} = v_x = 20\tfrac{m}{s}$$

La grandeur de la vitesse initiale est donc

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 35,56\tfrac{m}{s}$$

c) L'angle de départ est

$$\theta = \arctan\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \arctan\frac{29,4}{20} = 55,8°$$

13. On va trouver le temps avec le changement de vitesse en y. Les composantes de la vitesse initiale sont

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta = 30\tfrac{m}{s} \cdot \cos 60° = 15\tfrac{m}{s}$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\theta = 30\tfrac{m}{s} \cdot \sin 60° = 25,98\tfrac{m}{s}$$

On peut trouver l'angle à la position 2 avec

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta$$
$$15\tfrac{m}{s} = 20\tfrac{m}{s} \cdot \cos\theta$$
$$\theta = 41,41°$$

La vitesse en y à la position 2 est

$$v_y = v \sin\theta = 20\tfrac{m}{s} \cdot \sin 41,41° = 13,23\tfrac{m}{s}$$

Le temps est donc

$$v_y = v_{0y} - gt$$
$$13,23\tfrac{m}{s} = 25,98\tfrac{m}{s} - 9,8\tfrac{m}{s^2} \cdot t$$
$$t = 1,301s$$

b) Pendant ce temps de 1,301 s, le déplacement en x est

$$x = x_0 + v_{0x}t$$
$$x = 0m + 15\tfrac{m}{s} \cdot 1,301s$$
$$x = 19,52m$$

et le déplacement en y est

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \\ &= 0m + 25,98\tfrac{m}{s} \cdot 1,301s - \tfrac{1}{2} \cdot 9,8\tfrac{m}{s^2} \cdot (1,301s)^2 \\ &= 25,51m \end{aligned}$$

La distance est donc

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = 32,1m$$

14. On trouve la portée avec un peu de trigonométrie.

$$\tan 30° = \frac{y}{x}$$
$$\tan 30° = \frac{40m}{x}$$
$$x = 69,28m$$

Sachant la portée, on pourra trouver la vitesse initiale, à condition de connaitre le temps de vol. On peut connaitre ce temps avec le mouvement en *y*.

$$y = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$-40m = 0m + 0\tfrac{m}{s} \cdot t - \tfrac{1}{2} \cdot 9.8\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2$$
$$-40m = -4,9\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2$$
$$t = 2,86s$$

On peut donc trouver la vitesse initiale avec

$$x = x_0 + v_{0x}t$$
$$69,28m = 0m + v_{0x} \cdot 2,857s$$
$$v_{0x} = 24,25\tfrac{m}{s}$$

15. Si le projectile est 2 m sous sa hauteur initiale, alors le temps de vol est

$$y = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$-2m = 0m + 0\tfrac{m}{s} \cdot t - \tfrac{1}{2} \cdot 9.8\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2$$
$$-2m = -4,9\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2$$
$$t = 0,6389s$$

Cela signifie que la distance en *x* de la cible est

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t \\ &= 0m + 30\tfrac{m}{s} \cdot 0,6389s \\ &= 19,17m \end{aligned}$$

Maintenant, on veut atteindre cette cible distante de 19,17 m, située à la même hauteur que le canon. Puisque la hauteur est la même, on peut utiliser la formule de la portée pour trouver l'angle.

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$19{,}17m = \frac{\left(30\tfrac{m}{s}\right)^2 \cdot \sin 2\theta}{9{,}8\tfrac{m}{s^2}}$$

$$\theta = 6{,}02° \quad \text{ou} \quad \theta = 83{,}98°$$

Ces deux réponses sont bonnes.

16. a) On peut trouver la hauteur avec

$$\begin{aligned} y &= (\tan\theta)\, x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} \right) x^2 \\ &= (\tan 30°) \cdot 10m - \left(\frac{9{,}8\tfrac{m}{s^2}}{2 \cdot \left(30\tfrac{m}{s}\right)^2 \cdot \cos^2 30°} \right) \cdot (10m)^2 \\ &= 5{,}048m \end{aligned}$$

Ceci est la hauteur par rapport au point de départ. Comme ce point est à 1 m du sol, la hauteur par rapport au sol est de 6,048 m.

b) La vitesse en x est la même que la vitesse initiale

$$v_x = v_{0x} = 30\tfrac{m}{s} \cdot \cos 30° = 25{,}98\tfrac{m}{s}$$

La vitesse en y est

$$-2g\left(y - y_0\right) = v_y^2 - v_{0y}^2$$

$$-2 \cdot 9{,}8\tfrac{m}{s^2} \cdot (5{,}048m - 0m) = v^2 - \left(30\tfrac{m}{s} \cdot \sin 30°\right)^2$$

$$v_y = 11{,}23\tfrac{m}{s}$$

La grandeur de la vitesse est donc

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 28{,}30\tfrac{m}{s}$$

et l'angle est

$$\theta = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{11{,}23}{25{,}98} = 23{,}4°$$

17. Trouvons la hauteur de la balle quand elle arrive vis-à-vis le mur. On commence par trouver le temps pour arriver au mur avec

$$x = x_0 + v_{0x}t$$
$$67,5m = 0m + \left(20\tfrac{m}{s} \cdot \cos 35°\right) \cdot t$$
$$t = 4,12s$$

À ce temps, la hauteur de la balle est

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \\ &= 0m + \left(20\tfrac{m}{s} \cdot \sin 35°\right) \cdot 4,12s - \tfrac{1}{2} \cdot 9.8\tfrac{m}{s^2} \cdot \left(4,12s\right)^2 \\ &= -35,92m \end{aligned}$$

Puisque la hauteur est négative, la balle passerait sous le mur s'il n'y avait pas de sol. De toute évidence, elle est tombée au sol avant d'arriver vis-à-vis le mur.

18. On trouve la distance avec

$$y = (\tan\theta)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$
$$8m = (\tan 40°) \cdot x - \left(\frac{9,8\frac{m}{s^2}}{2 \cdot \left(24\frac{m}{s}\right)^2 \cdot \cos^2 40°}\right) \cdot x^2$$
$$8m - 0,839 \cdot x + 0,0145m^{-1} \cdot x^2 = 0$$
$$x = 12,04m \quad \text{et} \quad x = 45,85m$$

19. Les composantes de la vitesse initiale sont

$$v_{0x} = 10\tfrac{m}{s} \cdot \cos(-30°) = 8,66\tfrac{m}{s}$$
$$v_{0y} = 10\tfrac{m}{s} \cdot \sin(-30°) = -5\tfrac{m}{s}$$

Au point le plus bas, on trouve la vitesse en y avec

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$
$$30\tfrac{m}{s} = \sqrt{\left(8,66\tfrac{m}{s}\right)^2 + v_y^2}$$
$$v_y = -28,72\tfrac{m}{s}$$

(Quand on fait la racine, la réponse peut être positive ou négative. La mise en situation ici nous force à garder la réponse négative.)

On trouve ensuite la hauteur

$$-2g\left(y - y_0\right) = v_y^2 - v_{0y}^2$$
$$-2\cdot 9,8\tfrac{m}{s^2}\cdot\left(y - 0m\right) = \left(-28,72\tfrac{m}{s}\right)^2 - \left(-5\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$y = -40,82m$$

La falaise a donc une hauteur de 40,82 m.

20. L'équation de la trajectoire du projectile lancé à 45° est

$$y = \left(\tan\theta\right)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$
$$y = \left(\tan 45°\right)x - \left(\frac{9,8\tfrac{m}{s^2}}{2\cdot\left(50\tfrac{m}{s}\right)^2\cdot\cos^2 45°}\right)x^2$$
$$y = x - 0,00392m^{-1}\cdot x^2$$

L'équation de la trajectoire du projectile lancé à 60° est

$$y = \left(\tan 60°\right)x - \left(\frac{9,8\tfrac{m}{s^2}}{2\cdot\left(50\tfrac{m}{s}\right)^2\cdot\cos^2 60°}\right)x^2$$
$$y = \sqrt{3}\cdot x - 0,00784m^{-1}\cdot x^2$$

Puisque les deux projectiles arrivent au même x à la hauteur y, on doit avoir

$$x - 0,00392m^{-1}\cdot x^2 = \sqrt{3}x - 0,00784m^{-1}\cdot x^2$$

La solution de cette équation est

$$x-0{,}00392m^{-1}\cdot x^2=\sqrt{3}x-0{,}00784m^{-1}\cdot x^2$$
$$0{,}00784m^{-1}\cdot x^2-0{,}00392m^{-1}\cdot x^2=\sqrt{3}x-x$$
$$0{,}00392m^{-1}\cdot x^2=\left(\sqrt{3}-1\right)x$$
$$0{,}00392m^{-1}\cdot x=\sqrt{3}-1$$
$$x=\frac{\sqrt{3}-1}{0{,}00392m^{-1}}$$
$$x=186{,}75m$$

On peut alors trouver la hauteur avec une des deux équations de la trajectoire.

$$\begin{aligned}y&=x-0{,}00392m^{-1}\cdot x^2\\&=186{,}75m-0{,}00392m^{-1}\cdot(186{,}75m)^2\\&=50{,}04m\end{aligned}$$

21. On trouve la vitesse avec

$$y=(\tan\theta)x-\left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$
$$155m=(\tan 60°)\cdot(195m)-\left(\frac{9{,}8\frac{m}{s^2}}{2\cdot v_0^2\cdot\cos^2 60°}\right)\cdot(195m)^2$$
$$v_0=63{,}86\tfrac{m}{s}$$

22. On trouve l'angle avec

$$y=(\tan\theta)x-\left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$
$$3000m=(\tan\theta)\cdot 5000m-\left(\frac{9{,}8\frac{m}{s^2}}{2\cdot\left(760\frac{m}{s}\right)^2\cdot\cos^2\theta}\right)\cdot(5000m)^2$$
$$3000m=(\tan\theta)\cdot 5000m-212{,}08m\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$3000=(\tan\theta)\cdot 5000-212{,}08\cdot\sec^2\theta$$

Reste à isoler θ dans cette équation. Pour y arriver, il faut se rappeler que $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$. On a alors

$$3000 = 5000 \cdot \tan\theta - 212{,}084 \cdot \left(1 + \tan^2\theta\right)$$
$$3000 = 5000 \cdot \tan\theta - 212{,}084 - 212{,}084 \cdot \tan^2\theta$$
$$3212{,}084 - 5000 \cdot \tan\theta + 212{,}084 \cdot \tan^2\theta = 0$$

C'est une équation quadratique de tan² *θ*. La solution de cette équation quadratique est

$$\tan\theta = 0{,}6609 \quad \text{et} \quad 22{,}91$$

Les deux solutions sont donc

$$\theta = 33{,}46° \quad \text{et} \quad \theta = 87{,}50°$$

23. On a les 2 formules suivantes quand on lance à 28° et 32°.

$$40m = \frac{v_0^2 \sin\left(2 \cdot 28°\right)}{g} \qquad\qquad R = \frac{v_0^2 \sin\left(2 \cdot 32°\right)}{g}$$

Si on divise la 2e équation par la 1re, on a

$$\frac{R}{40m} = \frac{\frac{v_0^2 \sin(64°)}{g}}{\frac{v_0^2 \sin(56°)}{g}}$$
$$\frac{R}{40m} = \frac{\sin 64°}{\sin 56°}$$
$$R = 43{,}37m$$

24. La hauteur maximale est donnée par

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

et la portée est donnée par

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

En divisant l'une par l'autre, on a

$$\frac{h_{max}}{R} = \frac{\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}}{\frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}}$$
$$= \frac{\sin^2\theta}{2\sin 2\theta}$$

Puisque $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, on a

$$\frac{h_{max}}{R} = \frac{\sin^2\theta}{4\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \frac{\sin\theta}{4\cos\theta}$$
$$= \frac{\tan\theta}{4}$$

On peut alors trouver la réponse

$$\frac{15m}{40m} = \frac{\tan\theta}{4}$$
$$\theta = 56{,}3°$$

25. En x, la grenade doit parcourir 20 m en 2 secondes. On a donc

$$v_x = \frac{20m}{2s} = 10\tfrac{m}{s}$$

En y, la grenade doit être à y = 4 m à t = 2 s. On a donc

$$y = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$4m = 0m + v_{0y}\cdot 2s - \tfrac{1}{2}\cdot 9{,}8\tfrac{m}{s^2}\cdot(2s)^2$$
$$v_{0y} = 11{,}8\tfrac{m}{s}$$

Ainsi, la grandeur de la vitesse est

$$v_0 = \sqrt{\left(10\tfrac{m}{s}\right)^2 + \left(11{,}8\tfrac{m}{s}\right)^2} = 15{,}47\tfrac{m}{s}$$

et l'angle est

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan\frac{v_y}{v_x}\\ &= \arctan\frac{11{,}8}{10}\\ &= 49{,}72°\end{aligned}$$

26. Avec un $y = 0$ au sol, la hauteur en fonction du temps est donnée par

$$y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

À $t = 1$, on a donc

$$h = v_{0y}\cdot 1s - \tfrac{1}{2}g\cdot(1s)^2$$

et à $t = 5$ s, on a

$$h = v_{0y}\cdot 5s - \tfrac{1}{2}g\cdot(5s)^2$$

On a alors 2 équations et deux inconnues. En multipliant la première équation par 5, nos deux équations sont

$$\begin{aligned}5h &= v_{0y}\cdot 5s - \tfrac{1}{2}g\cdot 5s^2\\ h &= v_{0y}\cdot 5s - \tfrac{1}{2}g\cdot 25s^2\end{aligned}$$

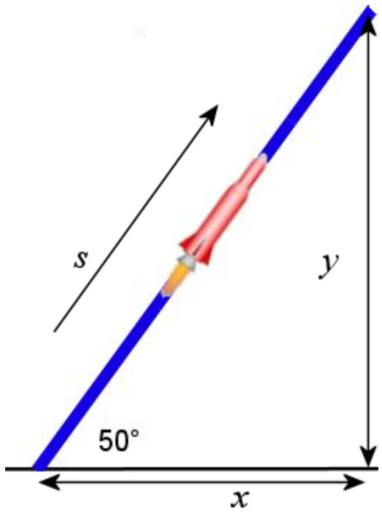
En soustrayant ces deux équations, on a

$$4h = g\cdot 10s^2$$

La hauteur est donc de 24,5 m.

27. Séparons ce mouvement en deux parties : un mouvement en ligne droite pendant 20 secondes et un mouvement en chute libre.

On va utiliser un axe des s dirigé dans le sens du mouvement pour la première partie.



Pendant le mouvement en ligne droite, le déplacement est

$$\begin{aligned} s &= s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 \\ &= 0m + 0\tfrac{m}{s} \cdot 20s + \tfrac{1}{2} \cdot 20\tfrac{m}{s^2} \cdot (20s)^2 \\ &= 4000m \end{aligned}$$

Les positions finales en x et y sont donc

$$\begin{aligned} x &= s\cos 50° = 4000m \cdot \cos 50° = 2571,2m \\ y &= s\sin 50° = 4000m \cdot \sin 50° = 3064,2m \end{aligned}$$

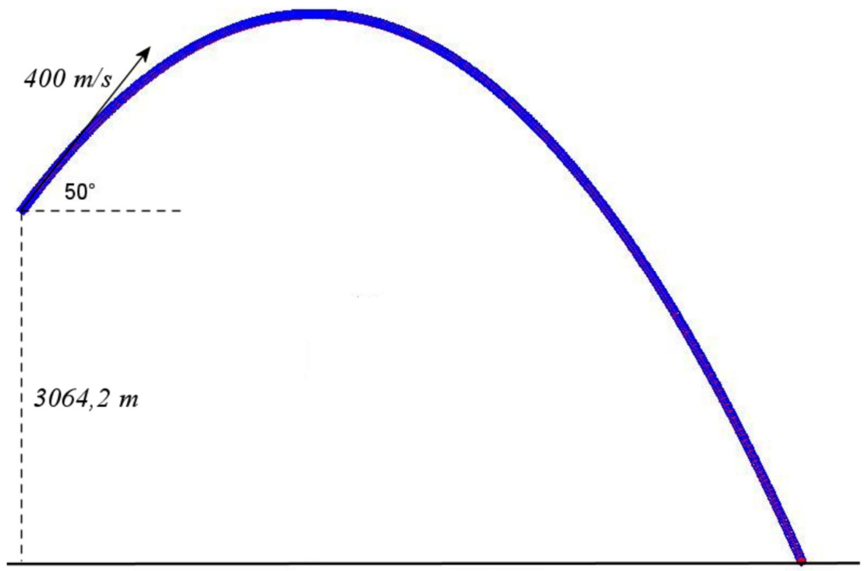
La vitesse à la fin de cette phase est

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ &= 0\tfrac{m}{s} + 20\tfrac{m}{s^2} \cdot 20s \\ &= 400\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Cette vitesse est dans le sens de la trajectoire. Si on la sépare en composantes x et y, on a

$$\begin{aligned} v_x &= v\cos 50° = 400\tfrac{m}{s} \cdot \cos 50° = 257,12\tfrac{m}{s} \\ v_y &= v\sin 50° = 400\tfrac{m}{s} \cdot \sin 50° = 306,42\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Passons maintenant à la phase de chute libre. Les positions et les vitesses initiales de cette phase sont les valeurs finales de la phase précédentes. On a alors la situation suivante.



a) On trouve la hauteur maximale avec

$$-2g\left(y-y_0\right)=v_y^2-v_{0y}^2$$
$$-2\cdot 9,8\tfrac{m}{s^2}\cdot\left(y-3064,2m\right)=\left(0\tfrac{m}{s}\right)^2-\left(306,42\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$y=7855m$$

b) On trouve le temps de vol de cette partie avec

$$y=y_0+v_{0y}t-\tfrac{1}{2}gt^2$$
$$0m=3064,2m+306,42\tfrac{m}{s}\cdot t-\tfrac{1}{2}\cdot 9,8\tfrac{m}{s^2}\cdot t^2$$
$$t=71,30s \quad \text{et} \quad t=-8,77s$$

En ajoutant les 20 secondes de la première phase, le temps de vol total est de 91,30 s.

c) La position en x à la fin de la deuxième phase est

$$\begin{aligned} x &= x_0+v_{0x}t \\ &= 2571,2m+257,12\tfrac{m}{s}\cdot 71,30s \\ &= 20\,905m \end{aligned}$$

28. L'accélération est

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{\left(1024 \frac{m}{s}\right)^2}{3,844 \times 10^8 m} \\ &= 0,002728 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

29. Le rayon de la trajectoire est

$$\begin{aligned} r &= \frac{circonférence}{2\pi} \\ &= 7,958m \end{aligned}$$

L'accélération est donc

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{4\pi^2 r}{T^2} \\ &= \frac{4\pi^2 \cdot 7,958m}{(5s)^2} \\ &= 12,57 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

30. La période du train est de

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{4\pi^2 r}{T^2} \\ 20 \frac{m}{s^2} &= \frac{4\pi^2 \cdot 0,5m}{T^2} \\ T &= 0,9935s \end{aligned}$$

Le temps pour faire 50 tours est donc de

$$\begin{aligned} t_{tot} &= 50 \cdot 0,9935s \\ &= 49,67s \end{aligned}$$

31. On trouve le rayon de la trajectoire avec la formule

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\pi r}{T} \\ 36\tfrac{m}{s} &= \frac{2\pi r}{24s} \\ r &= 137,5m \end{aligned}$$

L'accélération est donc

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{\left(36\tfrac{m}{s}\right)^2}{137,5m} \\ &= 9,425\tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

32. À partir de la formule de l'accélération centripète, on peut écrire

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v}{r}\cdot v$$

Puisque

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

on a

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{v}{r}\cdot v \\ &= \frac{v}{r}\cdot\frac{2\pi r}{T} \\ &= \frac{2\pi v}{T} \end{aligned}$$

33. Au point A, l'accélération est

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{\left(20\frac{m}{s}\right)^2}{10m} \\ &= 40\frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Cette accélération est vers le haut.

Au point B, l'accélération est

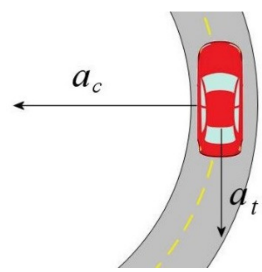
$$\begin{aligned} a_c &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{\left(12\frac{m}{s}\right)^2}{15m} \\ &= 9,6\frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Cette accélération est vers le bas.

34. a) L'accélération tangentielle est

$$\begin{gathered} 2a_t\left(s-s_0\right)=v^2-v_0^2 \\ 2\cdot a_t\cdot\left(4\pi r-0m\right)=\left(0\frac{m}{s}\right)^2-\left(25\frac{m}{s}\right)^2 \\ 2\cdot a_t\cdot\left(4\pi\cdot 50m-0m\right)=\left(0\frac{m}{s}\right)^2-\left(25\frac{m}{s}\right)^2 \\ a_t=-0,4974\frac{m}{s^2} \end{gathered}$$

Comme on a mis le sens positif dans le sens du déplacement de la voiture, une valeur négative veut dire que l'accélération est dans la direction opposée à la vitesse de la voiture.

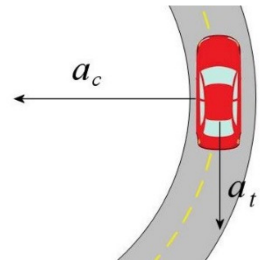


b) Au bout d'un tour, la vitesse de la voiture est

$$\begin{gathered} 2a_t\left(s-s_0\right)=v^2-v_0^2 \\ 2\cdot\left(-0,4974\frac{m}{s^2}\right)\cdot\left(2\pi r-0m\right)=v^2-\left(25\frac{m}{s}\right)^2 \\ 2\cdot\left(-0,4974\frac{m}{s^2}\right)\cdot\left(2\pi\cdot 50m-0m\right)=v^2-\left(25\frac{m}{s}\right)^2 \\ v=17,68\frac{m}{s} \end{gathered}$$

L'accélération centripète est donc

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{\left(17{,}68\,\tfrac{m}{s}\right)^2}{50m} \\ &= 6{,}25\,\tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$



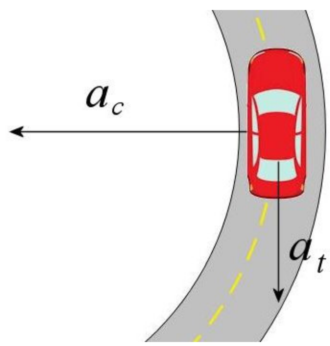
Comme toujours, l'accélération centripète est dirigée vers le centre du cercle.

c) La grandeur de l'accélération totale est

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$$

$$a = \sqrt{\left(6{,}25\,\tfrac{m}{s^2}\right)^2 + \left(0{,}4974\,\tfrac{m}{s^2}\right)^2} = 6{,}27\,\tfrac{m}{s^2}$$

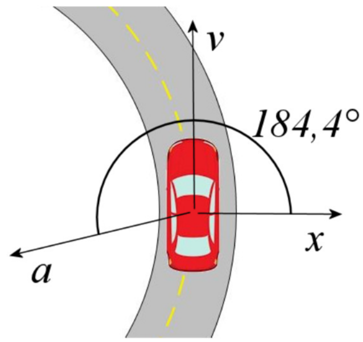
Les directions des accélérations sont



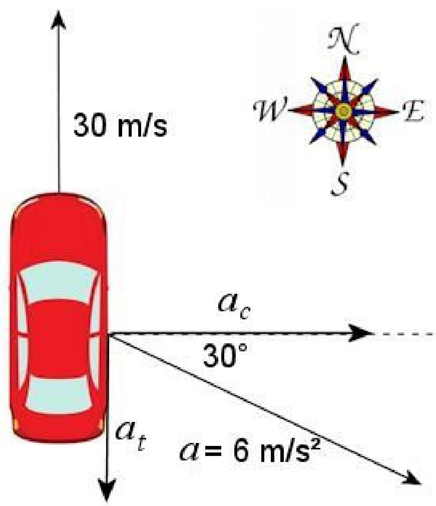
Avec des axes *x* et *y* conventionnels, la direction est

$$\theta = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{-0{,}4974}{-6{,}25} = 184{,}4°$$

Ce qui signifie qu'il y a un angle de 94,4° avec la vitesse



35. Les composantes de l'accélération sont



a) Comme l'accélération tangentielle est opposée à la vitesse, cette voiture ralentit.

b) Dans cet exercice, l'accélération tangentielle est la composante en y de l'accélération. Cette composante est

$$\begin{aligned} a_t &= a\sin(-30°) \\ &= 6\tfrac{m}{s^2}\cdot\sin(-30°) \\ &= -3\tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

c) Comme l'accélération centripète est vers l'est, cette voiture tourne vers l'est.

d) On trouve le rayon de courbure à partir de l'accélération centripète. Dans cet exercice, l'accélération centripète est la composante en x de l'accélération. Cette composante est

$$\begin{aligned} a_c &= a\cos(-30°) \\ &= 6\tfrac{m}{s^2}\cdot\cos(-30°) \\ &= 5,20\tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Le rayon de courbure est donc

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$
$$5,20\tfrac{m}{s^2} = \frac{\left(30\tfrac{m}{s}\right)^2}{r}$$
$$r = 173,2m$$

36. Pour trouver d, on doit trouver le point d'intersection de la parabole et de la pente. L'équation de la parabole est

$$y = (\tan\theta)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$
$$y = (\tan 60°)\cdot x - \left(\frac{9,8\tfrac{m}{s^2}}{2\cdot 2500\tfrac{m^2}{s^2}\cdot\cos^2 60°}\right)\cdot x^2$$

L'équation de la pente est simplement l'équation d'une droite qui passe par l'origine.

$$y = mx$$

Comme la pente est égale à la tangente de l'angle d'inclinaison, l'équation est

$$y = (\tan 20°)\cdot x$$

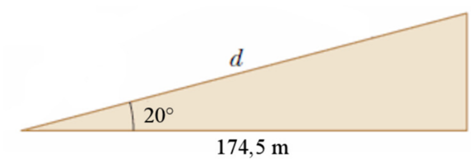
Au point de croisement, les valeurs de y sont identiques. Cela signifie que

$$y_{parabole} = y_{droite}$$
$$(\tan 20°)\cdot x = (\tan 60°)\cdot x - \left(\frac{9,8\tfrac{m}{s^2}}{2\cdot 2500\tfrac{m^2}{s^2}\cdot\cos^2 60°}\right)\cdot x^2$$

La valeur de x est donc

$$\left(\tan 20°\right)\cdot x = \left(\tan 60°\right)\cdot x - \left(\frac{9{,}8\frac{m}{s^2}}{2\cdot 2500\frac{m^2}{s^2}\cdot \cos^2 60°}\right)\cdot x^2$$
$$\left(\tan 20°\right) = \left(\tan 60°\right) - \left(\frac{9{,}8\frac{m}{s^2}}{2\cdot 2500\frac{m^2}{s^2}\cdot \cos^2 60°}\right)x$$
$$\left(\frac{9{,}8\frac{m}{s^2}}{2\cdot 2500\frac{m^2}{s^2}\cdot \cos^2 60°}\right)x = \left(\tan 60°\right) - \left(\tan 20°\right)$$
$$x = \frac{\left(\left(\tan 60°\right) - \left(\tan 20°\right)\right)\cdot 2\cdot 2500\frac{m^2}{s^2}\cdot \cos^2 60°}{9{,}8\frac{m}{s^2}}$$
$$x = 174{,}5m$$

De là, on trouve d avec



$$\cos 20° = \frac{174{,}5m}{d}$$
$$d = 185{,}7m$$

37. Pour trouver d, on doit trouver le point d'intersection de la parabole et de la pente. L'équation de la parabole est

$$y = \left(\tan\theta\right)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$

L'équation de la pente est simplement l'équation d'une droite qui passe par l'origine.

$$y = mx$$

Comme la pente est égale à la tangente de l'angle d'inclinaison, l'équation est

$$y = \left(\tan\alpha\right)x$$

Au point de croisement, les valeurs de y sont identiques. Cela signifie que

$$y_{parabole} = y_{droite}$$
$$\left(\tan\alpha\right)x = \left(\tan\theta\right)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$

La valeur de x est donc

$$(\tan\alpha) = (\tan\theta) - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x$$

$$\left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x = (\tan\theta - \tan\alpha)$$

$$x = (\tan\theta - \tan\alpha)\frac{2v_0^2\cos^2\theta}{g}$$

$$x = \frac{v_0^2}{g}\left(2\sin\theta\cos\theta - 2\cos^2\theta\tan\alpha\right)$$

Puisque $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$, on a

$$x = \frac{v_0^2}{g}\left(\sin 2\theta - 2\cos^2\theta\tan\alpha\right)$$

Quand *d* est à sa valeur maximale, *x* est aussi à sa valeur maximale. On cherche donc la valeur de *x* maximale. À la valeur maximale, on a

$$\frac{dx}{d\theta} = 0$$

On a donc

$$0 = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{v_0^2}{g}\left(\sin 2\theta - 2\cos^2\theta\tan\alpha\right)\right)$$

$$0 = \frac{v_0^2}{g}\left(2\cos 2\theta - -4\sin\theta\cos\theta\tan\alpha\right)$$

$$0 = 2\cos 2\theta + 4\sin\theta\cos\theta\tan\alpha$$

Il ne reste qu'à isoler θ.

$$0 = 2\cos 2\theta + 4\sin\theta\cos\theta\tan\alpha$$

$$0 = 2\cos 2\theta + 2\sin 2\theta\tan\alpha$$

$$2\cos 2\theta = -2\sin 2\theta\tan\alpha$$

$$1 = -\tan 2\theta\tan\alpha$$

$$-\cot\alpha = \tan 2\theta$$

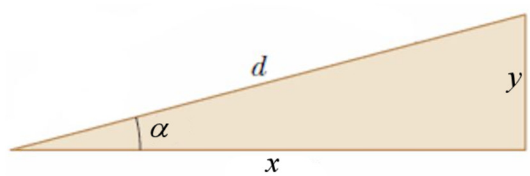
Mais

$$
\begin{aligned}
-\cot\alpha &= -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\
&= \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} \\
&= \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} \\
&= \frac{\sin(90^\circ-(-\alpha))}{\cos(90^\circ-(-\alpha))} \\
&= \tan(90^\circ+\alpha)
\end{aligned}
$$

On a donc

$$
\begin{gathered}
-\cot\alpha = \tan 2\theta \\
\tan(90^\circ+\alpha) = \tan 2\theta \\
90^\circ+\alpha = 2\theta \\
\theta = \frac{1}{2}(90^\circ+\alpha)
\end{gathered}
$$

Ainsi, la distance est



$$d = \frac{x}{\cos\alpha}$$

Avec la valeur de x, on a

$$d = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}\left(\sin 2\theta - 2\cos^2\theta\tan\alpha\right)$$

La valeur maximale de d se trouve avec l'angle maximal. On a donc

$$
\begin{aligned}
d_{\max} &= \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}\left(\sin 2\tfrac{1}{2}(90^\circ+\alpha) - 2\cos^2\tfrac{1}{2}(90^\circ+\alpha)\tan\alpha\right) \\
&= \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}\left(\sin(90^\circ+\alpha) - 2\cos^2\tfrac{1}{2}(90^\circ+\alpha)\tan\alpha\right)
\end{aligned}
$$

Comme

$$\sin(90^\circ+\alpha) = \cos\alpha$$

on a

$$d_{\max} = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}\left(\cos\alpha - 2\cos^2 \tfrac{1}{2}(90° + \alpha)\tan\alpha\right)$$

Comme

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos x}{2}$$

on a

$$\begin{aligned} d_{\max} &= \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}\left(\cos\alpha - 2\frac{1+\cos(90° + \alpha)}{2}\tan\alpha\right) \\ &= \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}\left(\cos\alpha - \left(1+\cos(90° + \alpha)\right)\tan\alpha\right) \end{aligned}$$

Comme

$$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$$

on a

$$d_{\max} = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}\left(\cos\alpha - (1-\sin\alpha)\tan\alpha\right)$$

On a donc

$$\begin{aligned} d_{\max} &= \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}\left(\cos\alpha - (1-\sin\alpha)\tan\alpha\right) \\ &= \frac{v_0^2}{g\cos^2\alpha}\left(\cos^2\alpha - (1-\sin\alpha)\sin\alpha\right) \\ &= \frac{v_0^2}{g\cos^2\alpha}\left(\cos^2\alpha - \sin\alpha + \sin^2\alpha\right) \\ &= \frac{v_0^2}{g\cos^2\alpha}(1-\sin\alpha) \end{aligned}$$

38. Trouvons la vitesse de lancement en isolant v_0 dans

$$y=\left(\tan\theta\right)x-\left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$

On a alors

$$\left(\tan\theta\right)x-y=\left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2$$
$$v_0^2=\frac{gx^2}{2\cos^2\theta\left(\left(\tan\theta\right)x-y\right)}$$
$$v_0^2=\frac{gx^2}{2x\cos^2\theta\tan\theta-2y\cos^2\theta}$$
$$v_0^2=\frac{gx^2}{2x\cos\theta\sin\theta-2y\cos^2\theta}$$
$$v_0^2=\frac{gx^2}{x\sin 2\theta-2y\cos^2\theta}$$

Si la vitesse est minimale, c'est que le diviseur est maximum. On doit trouver la valeur maximale de

$$x\sin 2\theta-2y\cos^2\theta$$

Évidemment, la valeur est maximale quand la dérivée est nulle. On doit donc avoir

$$\frac{d\left(x\sin 2\theta-2y\cos^2\theta\right)}{d\theta}=0$$
$$2x\cos 2\theta--4y\cos\theta\sin\theta=0$$
$$2x\cos 2\theta+2y\sin 2\theta-=0$$
$$x\cos 2\theta+y\sin 2\theta=0$$
$$y\sin 2\theta=-x\cos 2\theta$$
$$y\tan 2\theta=-x$$
$$\tan 2\theta=\frac{-x}{y}$$

Avec x = 195 m et y = 155 m, on arrive aux solutions suivantes.

$$\tan 2\theta=\frac{-195m}{155m}$$
$$2\theta=-51{,}52° \qquad \text{et} \qquad 2\theta=128{,}48°$$

(La deuxième solution se trouve en ajoutant 180° à la première.) De toute évidence, la première solution est à rejeter. Il reste donc $\theta = 64{,}24°$.

Ainsi, la vitesse minimale est

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\frac{gx^2}{x\sin 2\theta - 2y\cos^2\theta}} \\ &= \sqrt{\frac{9{,}8\,\frac{m}{s^2}\cdot(195m)^2}{195m\cdot\sin(128{,}48°) - 2\cdot 155m\cdot\cos^2(64{,}24°)}} \\ &= \sqrt{3960{,}2\,\frac{m^2}{s^2}} \\ &= 62{,}93\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$