

Solutionnaire du chapitre 2

1. a) La vitesse moyenne en x est

$$\begin{aligned}\bar{v}_x &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &= \frac{8m - 0m}{2s} \\ &= 4 \frac{m}{s}\end{aligned}$$

La vitesse moyenne en y est

$$\begin{aligned}\bar{v}_y &= \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &= \frac{6m - 0m}{2s} \\ &= 3 \frac{m}{s}\end{aligned}$$

La vitesse moyenne est donc

$$\vec{v} = (4\vec{i} + 3\vec{j}) \frac{m}{s}$$

b) Pour trouver l'accélération moyenne, on va séparer la vitesse en composantes

À $t = 0$ s les composantes de la vitesse sont

$$v_x = v \cos \theta = 15 \frac{m}{s} \cdot \cos 30^\circ = 12,99 \frac{m}{s}$$

$$v_y = v \sin \theta = 15 \frac{m}{s} \cdot \sin 30^\circ = 7,5 \frac{m}{s}$$

À $t = 2$ s les composantes de la vitesse sont

$$v_x = v \cos \theta = 20 \frac{m}{s} \cdot \cos 120^\circ = -10 \frac{m}{s}$$

$$v_y = v \sin \theta = 20 \frac{m}{s} \cdot \sin 120^\circ = 17,32 \frac{m}{s}$$

L'accélération moyenne en x est

$$\begin{aligned}\bar{a}_x &= \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ &= \frac{-10 \frac{m}{s} - 12,99 \frac{m}{s}}{2s} \\ &= -11,495 \frac{m}{s^2}\end{aligned}$$

L'accélération moyenne en y est

$$\begin{aligned}\bar{a}_y &= \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \\ &= \frac{17,32 \frac{m}{s} - 7,5 \frac{m}{s}}{2s} \\ &= 4,91 \frac{m}{s^2}\end{aligned}$$

L'accélération moyenne est donc

$$\vec{\bar{a}} = (-11,495\vec{i} + 4,91\vec{j}) \frac{m}{s^2}$$

2. a) Les coordonnées des positions 1 et 2 sont (en mettant le Soleil à (0,0))

$$\begin{array}{ll} \text{Position 1} & x = 1,5 \times 10^{11} \text{ m} \quad y = 0 \text{ m} \\ \text{Position 2} & x = 0 \text{ m} \quad y = 1,5 \times 10^{11} \text{ m} \end{array}$$

Les déplacements en x et y sont

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_2 - x_1 = 0m - 1,5 \times 10^{11} m = -1,5 \times 10^{11} m \\ \Delta y &= y_2 - y_1 = 1,5 \times 10^{11} m - 0m = 1,5 \times 10^{11} m\end{aligned}$$

Le déplacement est donc

$$\vec{\Delta s} = (-1,5 \times 10^{11} \vec{i} + 1,5 \times 10^{11} \vec{j}) m$$

b) La distance parcourue est la longueur de l'arc de cercle entre les points 1 et 2, qui est le quart de la circonférence

$$\text{distance} = \frac{1}{4} 2\pi r = \frac{\pi r}{2} = \frac{\pi \cdot 1,5 \times 10^{11} m}{2} = 2,3562 \times 10^{11} m$$

c) Les composantes de la vitesse moyenne sont

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0m - 1,5 \times 10^{11}m}{7,8894 \times 10^6 s} = -19013 \frac{m}{s}$$

$$\bar{v}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{1,5 \times 10^{11}m - 0m}{7,8894 \times 10^6 s} = 19013 \frac{m}{s}$$

La vitesse moyenne est donc

$$\vec{v} = (-19013\vec{i} + 19013\vec{j}) \frac{m}{s}$$

d) Les composantes de l'accélération moyenne sont

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{-30000 \frac{m}{s} - 0 \frac{m}{s}}{7,8894 \times 10^6 s} = -0,0038 \frac{m}{s^2}$$

$$\bar{a}_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{0 \frac{m}{s} - 30000 \frac{m}{s}}{7,8894 \times 10^6 s} = -0,0038 \frac{m}{s^2}$$

L'accélération moyenne est donc

$$\vec{a} = (-0,0038\vec{i} - 0,0038\vec{j}) \frac{m}{s^2}$$

3. a) On trouve les composantes de la vitesse en dérivant les formules de la position.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left(-3 \frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 2 \frac{m}{s} \cdot t - 4m\right)}{dt} = -6 \frac{m}{s^2} \cdot t + 2 \frac{m}{s}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d\left(-2 \frac{m}{s^3} \cdot t^3 + 6 \frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 1m\right)}{dt} = -6 \frac{m}{s^3} \cdot t^2 + 12 \frac{m}{s^2} \cdot t$$

À $t = 1$ s, ces composantes sont

$$v_x = -6 \frac{m}{s^2} \cdot 1s + 2 \frac{m}{s} = -4 \frac{m}{s}$$

$$v_y = -6 \frac{m}{s^3} \cdot (1s)^2 + 12 \frac{m}{s^2} \cdot 1s = 6 \frac{m}{s}$$

La grandeur de la vitesse est donc

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 7,21 \frac{m}{s}$$

et sa direction est

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{6}{-4} = 123,7^\circ$$

b) On trouve les composantes de l'accélération en dérivant les formules de la vitesse.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d\left(-6\frac{m}{s^2} \cdot t + 2\frac{m}{s}\right)}{dt} = -6\frac{m}{s^2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d\left(-6\frac{m}{s^3} \cdot t^2 + 12\frac{m}{s^2} \cdot t\right)}{dt} = -12\frac{m}{s^3} \cdot t + 12\frac{m}{s^2}$$

À $t = 1$ s, ces composantes sont

$$a_x = -6\frac{m}{s^2}$$

$$a_y = -12\frac{m}{s^3} \cdot 1s + 12\frac{m}{s^2} = 0\frac{m}{s^2}$$

La grandeur de l'accélération est donc

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 6\frac{m}{s^2}$$

et sa direction est

$$\theta = \arctan \frac{a_y}{a_x} = \arctan \frac{0}{-6} = 180^\circ$$

4. On trouve la position avec

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = 2m + 2\frac{m}{s} \cdot 5s + \frac{1}{2} \cdot 1\frac{m}{s^2} \cdot (5s)^2 = 24,5m$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = -2m + 4\frac{m}{s} \cdot 5s + \frac{1}{2} \cdot (-2\frac{m}{s^2}) \cdot (5s)^2 = -7m$$

$$z = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2 = 2m + (-1\frac{m}{s}) \cdot 5s + \frac{1}{2} \cdot 0\frac{m}{s^2} \cdot (5s)^2 = -3m$$

L'objet est donc à la position (24,5 m, -7 m, -3 m) (on pourrait dire aussi $\vec{r} = (24,5\vec{i} - 7\vec{j} - 3\vec{k})m$).

5. On trouve l'accélération en x avec

$$2a_x(x - x_0) = v_x^2 - v_{x0}^2$$

$$2 \cdot a_x \cdot (2m - 1m) = \left(5 \frac{m}{s}\right)^2 - \left(-2 \frac{m}{s}\right)^2$$

$$a_x = 10,5 \frac{m}{s^2}$$

On trouve l'accélération en y avec

$$2a_y(y - y_0) = v_y^2 - v_{y0}^2$$

$$2 \cdot a_y \cdot (1m - -1m) = \left(6 \frac{m}{s}\right)^2 - \left(0 \frac{m}{s}\right)^2$$

$$a_y = 9 \frac{m}{s^2}$$

On trouve l'accélération en z avec

$$2a_z(z - z_0) = v_z^2 - v_{z0}^2$$

$$2 \cdot a_z \cdot (-4m - -2m) = \left(-7 \frac{m}{s}\right)^2 - \left(1 \frac{m}{s}\right)^2$$

$$a_z = -12 \frac{m}{s^2}$$

L'accélération est donc

$$\vec{a} = \left(10,5\vec{i} + 9\vec{j} - 12\vec{k}\right) \frac{m}{s^2}$$

6. a) Les composantes de la vitesse initiale sont

$$v_{0x} = 50 \frac{m}{s} \cdot \cos 32^\circ = 42,4 \frac{m}{s}$$

$$v_{0y} = 50 \frac{m}{s} \cdot \sin 32^\circ = 26,5 \frac{m}{s}$$

On trouve le temps de vol avec

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$0m = 0m + 26,5 \frac{m}{s} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

$$26,5 \frac{m}{s} \cdot t = 4,9 \frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

$$26,5 \frac{m}{s} = 4,9 \frac{m}{s^2} \cdot t$$

$$t = 5,407s$$

b) On trouve la hauteur maximale en utilisant le fait que la vitesse en y est nulle au point le plus haut.

$$\begin{aligned}
 -2g(y - y_0) &= v_y^2 - v_{0y}^2 \\
 -2 \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot (y - 0m) &= (0 \frac{m}{s})^2 - (26,5 \frac{m}{s})^2 \\
 y &= 35,82m
 \end{aligned}$$

c) La portée est

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + vt \\
 &= 0m + 42,4 \frac{m}{s} \cdot 5,407s \\
 &= 229,3m
 \end{aligned}$$

7. a) Les composantes de la vitesse initiale sont

$$\begin{aligned}
 v_{0x} &= 45 \frac{m}{s} \cdot \cos 60^\circ = 22,5 \frac{m}{s} \\
 v_{0y} &= 45 \frac{m}{s} \cdot \sin 60^\circ = 39,0 \frac{m}{s}
 \end{aligned}$$

On trouve la hauteur maximale en utilisant le fait que la vitesse en y est nulle au point le plus haut.

$$\begin{aligned}
 -2g(y - y_0) &= v_y^2 - v_{0y}^2 \\
 -2 \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot (y - 0m) &= (0 \frac{m}{s})^2 - (39,0 \frac{m}{s})^2 \\
 y &= 77,49m
 \end{aligned}$$

b) On trouve le temps de vol avec

$$\begin{aligned}
 y &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\
 -265m &= 0m + 39,0 \frac{m}{s} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot t^2 \\
 265m + 39 \frac{m}{s} \cdot t - 4,9 \frac{m}{s^2} \cdot t^2 &= 0 \\
 t &= 12,34s \quad \text{et} \quad t = -4,38s
 \end{aligned}$$

Seule la réponse positive est bonne.

c) La portée est

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + vt \\
 &= 0m + 22,5 \frac{m}{s} \cdot 12,34s \\
 &= 277,6m
 \end{aligned}$$

d) La vitesse en x reste toujours la même.

$$v_x = v_{0x} = 22,5 \frac{m}{s}$$

À l'arrivée au sol, la vitesse en y est

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} - gt \\ &= 39,0 \frac{m}{s} - 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot 12,34s \\ &= -81,9 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

La grandeur de la vitesse est donc

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 85,0 \frac{m}{s}$$

et sa direction est

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{-81,9}{22,5} = -74,6^\circ$$

8. On trouve la vitesse avec

$$\begin{aligned} y &= (\tan \theta)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2 \\ 1,05m &= (\tan 40^\circ) \cdot 10m - \left(\frac{9,8 \frac{m}{s^2}}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 40^\circ} \right) \cdot (10m)^2 \\ v_0 &= 10,67 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

9. Avec la hauteur maximale, on peut trouver la vitesse initiale en y.

$$\begin{aligned} -2g(y - y_0) &= v_y^2 - v_{0y}^2 \\ -2 \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot (0,42m - 0m) &= (0 \frac{m}{s})^2 - v_{0y}^2 \\ v_{0y} &= 2,87 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

Avec la portée, on peut trouver la vitesse initiale en x.

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + v_{0x}t \\
 1,06m &= 0m + v_{0x} \cdot 0,5s \\
 v_{0x} &= 2,12 \frac{m}{s}
 \end{aligned}$$

La grandeur de la vitesse initiale est donc

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 3,57 \frac{m}{s}$$

et sa direction est

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{2,87}{2,12} = 53,5^\circ$$

10. Puisque Ruprecht retombe à la même hauteur, on peut trouver l'angle avec la formule de la portée

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \\
 70m &= \frac{\left(35 \frac{m}{s}\right)^2 \cdot \sin 2\theta}{9,8 \frac{m}{s^2}} \\
 \theta &= 17,03^\circ \quad \text{ou} \quad \theta = 72,97^\circ
 \end{aligned}$$

La photographie et le bon sens suggèrent que c'est $17,03^\circ$ qui est la bonne réponse.

La durée du vol se trouve alors avec

$$\begin{aligned}
 y &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\
 0m &= 0m + \left(35 \frac{m}{s} \cdot \sin 17,03^\circ\right) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot t^2 \\
 10,25 \frac{m}{s} \cdot t &= 4,9 \frac{m}{s^2} \cdot t^2 \\
 10,25 \frac{m}{s} &= 4,9 \frac{m}{s^2} \cdot t \\
 t &= 2,09s
 \end{aligned}$$

11. a) On trouve la vitesse avec

$$y = (\tan \theta) x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2$$

$$-20m = (\tan 35^\circ) \cdot 350m - \left(\frac{9,8 \frac{m}{s^2}}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 35^\circ} \right) \cdot (350m)^2$$

$$v_0 = 58,09 \frac{m}{s}$$

b) Le temps de vol est

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$-20m = 0m + (58,09 \frac{m}{s} \cdot \sin 35^\circ)t - 4,9 \frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

$$20m + 33,32 \frac{m}{s} \cdot t - 4,9 \frac{m}{s^2} \cdot t^2 = 0$$

$$t = 7,355s \text{ et } t = -0,555s$$

Seule la réponse positive est bonne.

c) La hauteur maximale fut de

$$-2g(y - y_0) = v_y^2 - v_{0y}^2$$

$$-2 \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot (y - 0m) = (0 \frac{m}{s})^2 - (33,32 \frac{m}{s})^2$$

$$y = 56,65m$$

d) La vitesse en x reste toujours la même.

$$v_x = v_{0x} = 58,09 \frac{m}{s} \cdot \cos 35^\circ = 47,59 \frac{m}{s}$$

À l'arrivée au sol, la vitesse en y est

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$= 33,32 \frac{m}{s} - 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot 7,355s$$

$$= -38,76 \frac{m}{s}$$

La grandeur de la vitesse est donc

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 61,37 \frac{m}{s}$$

et sa direction est

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{-38,76}{47,59} = -39,16^\circ$$

12. a)

Si la vitesse est horizontale à $t = 3$ s, c'est que l'objet a atteint sa hauteur maximale. Puisque l'objet retombe à la même hauteur qu'il a été lancé, le temps de vol total est deux fois plus grand que le temps nécessaire pour atteindre la hauteur maximale. Le temps de vol est donc de 6 s.

Quant à la vitesse en x , elle est toujours la même. Comme elle est de 20 m/s au point le plus haut, elle est aussi de 20 m/s au départ.

La portée est donc de

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t \\ &= 0m + 20 \frac{m}{s} \cdot 6s \\ &= 120m \end{aligned}$$

b) Comme la vitesse en y est nulle à la hauteur maximale, on a

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} - gt \\ 0 \frac{m}{s} &= v_{0y} - 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot 3s \\ v_{0y} &= 29,4 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

La vitesse en x est toujours de 20 m/s

$$v_{0x} = v_x = 20 \frac{m}{s}$$

La grandeur de la vitesse initiale est donc

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 35,56 \frac{m}{s}$$

c) L'angle de départ est

$$\theta = \arctan \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \arctan \frac{29,4}{20} = 55,8^\circ$$

13. On va trouver le temps avec le changement de vitesse en y . Les composantes de la vitesse initiale sont

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta = 30 \frac{m}{s} \cdot \cos 60^\circ = 15 \frac{m}{s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta = 30 \frac{m}{s} \cdot \sin 60^\circ = 25,98 \frac{m}{s}$$

On peut trouver l'angle à la position 2 avec

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

$$15 \frac{m}{s} = 20 \frac{m}{s} \cdot \cos \theta$$

$$\theta = 41,41^\circ$$

La vitesse en y à la position 2 est

$$v_y = v \sin \theta = 20 \frac{m}{s} \cdot \sin 41,41^\circ = 13,23 \frac{m}{s}$$

Le temps est donc

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$13,23 \frac{m}{s} = 25,98 \frac{m}{s} - 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot t$$

$$t = 1,301s$$

b) Pendant ce temps de 1,301 s, le déplacement en x est

$$x = x_0 + v_{0x}t$$

$$x = 0m + 15 \frac{m}{s} \cdot 1,301s$$

$$x = 19,52m$$

et le déplacement en y est

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$= 0m + 25,98 \frac{m}{s} \cdot 1,301s - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot (1,301s)^2$$

$$= 25,51m$$

La distance est donc

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = 32,1m$$

14. On trouve la portée avec un peu de trigonométrie.

$$\begin{aligned}\tan 30^\circ &= \frac{y}{x} \\ \tan 30^\circ &= \frac{40m}{x} \\ x &= 69,28m\end{aligned}$$

Sachant la portée, on pourra trouver la vitesse initiale, à condition de connaître le temps de vol. On peut connaître ce temps avec le mouvement en y.

$$\begin{aligned}y &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ -40m &= 0m + 0\frac{m}{s} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9.8\frac{m}{s^2} \cdot t^2 \\ -40m &= -4,9\frac{m}{s^2} \cdot t^2 \\ t &= 2,86s\end{aligned}$$

On peut donc trouver la vitesse initiale avec

$$\begin{aligned}x &= x_0 + v_{0x}t \\ 69,28m &= 0m + v_{0x} \cdot 2,857s \\ v_{0x} &= 24,25\frac{m}{s}\end{aligned}$$

15. Si le projectile est 2 m sous sa hauteur initiale, alors le temps de vol est

$$\begin{aligned}y &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ -2m &= 0m + 0\frac{m}{s} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9.8\frac{m}{s^2} \cdot t^2 \\ -2m &= -4,9\frac{m}{s^2} \cdot t^2 \\ t &= 0,6389s\end{aligned}$$

Cela signifie que la distance en x de la cible est

$$\begin{aligned}x &= x_0 + v_{0x}t \\ &= 0m + 30\frac{m}{s} \cdot 0,6389s \\ &= 19,17m\end{aligned}$$

Maintenant, on veut atteindre cette cible distante de 19,17 m, située à la même hauteur que le canon. Puisque la hauteur est la même, on peut utiliser la formule de la portée pour trouver l'angle.

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$19,17m = \frac{(30 \frac{m}{s})^2 \cdot \sin 2\theta}{9,8 \frac{m}{s^2}}$$

$$\theta = 6,02^\circ \quad \text{ou} \quad \theta = 83,98^\circ$$

Ces deux réponses sont bonnes.

16. a) On peut trouver la hauteur avec

$$y = (\tan \theta) x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2$$

$$= (\tan 30^\circ) \cdot 10m - \left(\frac{9,8 \frac{m}{s^2}}{2 \cdot (30 \frac{m}{s})^2 \cdot \cos^2 30^\circ} \right) \cdot (10m)^2$$

$$= 5,048m$$

Ceci est la hauteur par rapport au point de départ. Comme ce point est à 1 m du sol, la hauteur par rapport au sol est de 6,048 m.

b) La vitesse en x est la même que la vitesse initiale

$$v_x = v_{0x} = 30 \frac{m}{s} \cdot \cos 30^\circ = 25,98 \frac{m}{s}$$

La vitesse en y est

$$-2g(y - y_0) = v_y^2 - v_{0y}^2$$

$$-2 \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot (5,048m - 0m) = v_y^2 - (30 \frac{m}{s} \cdot \sin 30^\circ)^2$$

$$v_y = 11,23 \frac{m}{s}$$

La grandeur de la vitesse est donc

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 28,30 \frac{m}{s}$$

et l'angle est

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{11,23}{25,98} = 23,4^\circ$$

- 17.** Trouvons la hauteur de la balle quand elle arrive vis-à-vis le mur. On commence par trouver le temps pour arriver au mur avec

$$\begin{aligned}x &= x_0 + v_{0x}t \\67,5m &= 0m + \left(20 \frac{m}{s} \cdot \cos 35^\circ\right) \cdot t \\t &= 4,12s\end{aligned}$$

À ce temps, la hauteur de la balle est

$$\begin{aligned}y &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\&= 0m + \left(20 \frac{m}{s} \cdot \sin 35^\circ\right) \cdot 4,12s - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot (4,12s)^2 \\&= -35,92m\end{aligned}$$

Puisque la hauteur est négative, la balle passerait sous le mur s'il n'y avait pas de sol. De toute évidence, elle est tombée au sol avant d'arriver vis-à-vis le mur.

- 18.** On trouve la distance avec

$$\begin{aligned}y &= (\tan \theta)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta}\right)x^2 \\8m &= (\tan 40^\circ) \cdot x - \left(\frac{9,8 \frac{m}{s^2}}{2 \cdot \left(24 \frac{m}{s}\right)^2 \cdot \cos^2 40^\circ}\right) \cdot x^2 \\8m - 0,839 \cdot x + 0,0145m^{-1} \cdot x^2 &= 0 \\x &= 12,04m \quad \text{et} \quad x = 45,85m\end{aligned}$$

- 19.** Les composantes de la vitesse initiale sont

$$\begin{aligned}v_{0x} &= 10 \frac{m}{s} \cdot \cos(-30^\circ) = 8,66 \frac{m}{s} \\v_{0y} &= 10 \frac{m}{s} \cdot \sin(-30^\circ) = -5 \frac{m}{s}\end{aligned}$$

Au point le plus bas, on trouve la vitesse en y avec

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$30 \frac{m}{s} = \sqrt{\left(8,66 \frac{m}{s}\right)^2 + v_y^2}$$

$$v_y = -28,72 \frac{m}{s}$$

(Quand on fait la racine, la réponse peut être positive ou négative. La mise en situation ici nous force à garder la réponse négative.)

On trouve ensuite la hauteur

$$-2g(y - y_0) = v_y^2 - v_{0y}^2$$

$$-2 \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot (y - 0m) = \left(-28,72 \frac{m}{s}\right)^2 - \left(-5 \frac{m}{s}\right)^2$$

$$y = -40,82m$$

La falaise a donc une hauteur de 40,82 m.

20. L'équation de la trajectoire du projectile lancé à 45° est

$$y = (\tan 45^\circ)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 45^\circ}\right)x^2$$

$$y = x - \left(\frac{g}{v_0^2}\right)x^2$$

L'équation de la trajectoire du projectile lancé à 60° est

$$y = (\tan 60^\circ)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 60^\circ}\right)x^2$$

$$y = \sqrt{3}x - \left(\frac{2g}{v_0^2}\right)x^2$$

Puisque les deux projectiles arrivent au même x à la hauteur y , on doit avoir

$$x - \left(\frac{g}{v_0^2}\right)x^2 = \sqrt{3}x - \left(\frac{2g}{v_0^2}\right)x^2$$

La solution de cette équation est

$$\begin{aligned}
 x - \left(\frac{g}{v_0^2}\right)x^2 &= \sqrt{3}x - \left(\frac{2g}{v_0^2}\right)x^2 \\
 \left(\frac{2g}{v_0^2}\right)x^2 - \left(\frac{g}{v_0^2}\right)x^2 &= \sqrt{3}x - x \\
 \left(\frac{2g}{v_0^2} - \frac{g}{v_0^2}\right)x^2 &= (\sqrt{3} - 1)x \\
 \left(\frac{g}{v_0^2}\right)x^2 &= (\sqrt{3} - 1)x \\
 \left(\frac{g}{v_0^2}\right)x &= (\sqrt{3} - 1) \\
 x &= \frac{(\sqrt{3} - 1)v_0^2}{g}
 \end{aligned}$$

Puisque la vitesse est de 50 m/s, on arrive à

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{(\sqrt{3} - 1) \cdot (50 \frac{m}{s})^2}{9,8 \frac{m}{s^2}} \\
 &= 186,74m
 \end{aligned}$$

On peut alors trouver la hauteur avec une des deux équations de la trajectoire.

$$\begin{aligned}
 y &= x - \left(\frac{g}{v_0^2}\right)x^2 \\
 &= 186,747m - \frac{9,8 \frac{m}{s^2}}{(50 \frac{m}{s})^2} \cdot (186,747m)^2 \\
 &= 50,04m
 \end{aligned}$$

21. On trouve la vitesse avec

$$\begin{aligned}
 y &= (\tan \theta)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta}\right)x^2 \\
 155m &= (\tan 60^\circ) \cdot (195m) - \left(\frac{9,8 \frac{m}{s^2}}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 60^\circ}\right) \cdot (195m)^2 \\
 v_0 &= 63,86 \frac{m}{s}
 \end{aligned}$$

22. On trouve l'angle avec

$$y = (\tan \theta)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2$$

$$3000m = (\tan \theta) \cdot 5000m - \left(\frac{9,8 \frac{m}{s^2}}{2 \cdot (760 \frac{m}{s})^2 \cdot \cos^2 \theta} \right) \cdot (5000m)^2$$

$$3000m = (\tan \theta) \cdot 5000m - 212,08m \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$3000 = (\tan \theta) \cdot 5000 - 212,08 \cdot \sec^2 \theta$$

Reste à isoler θ dans cette équation. Pour y arriver, il faut se rappeler que $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$. On a alors

$$3000 = 5000 \cdot \tan \theta - 212,084 \cdot (1 + \tan^2 \theta)$$

$$3000 = 5000 \cdot \tan \theta - 212,084 - 212,084 \cdot \tan^2 \theta$$

$$3212,084 - 5000 \cdot \tan \theta + 212,084 \cdot \tan^2 \theta = 0$$

C'est une équation quadratique de $\tan^2 \theta$. La solution de cette équation quadratique est

$$\tan \theta = 0,6609 \quad \text{et} \quad 22,91$$

Les deux solutions sont donc

$$\theta = 33,46^\circ \quad \text{et} \quad \theta = 87,50^\circ$$

23. On a les 2 formules suivantes quand on lance à 28° et 32° .

$$40m = \frac{v_0^2 \sin(2 \cdot 28^\circ)}{g} \qquad R = \frac{v_0^2 \sin(2 \cdot 32^\circ)}{g}$$

Si on divise la 2^e équation par la 1^{re}, on a

$$\frac{R}{40m} = \frac{\frac{v_0^2 \sin(64^\circ)}{g}}{\frac{v_0^2 \sin(56^\circ)}{g}}$$

$$\frac{R}{40m} = \frac{\sin 64^\circ}{\sin 56^\circ}$$

$$R = 43,37m$$

24. La hauteur maximale est donnée par

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

et la portée est donnée par

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

En divisant l'une par l'autre, on a

$$\begin{aligned} \frac{h_{\max}}{R} &= \frac{\frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}}{\frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{2 \sin 2\theta} \end{aligned}$$

Puisque $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, on a

$$\begin{aligned} \frac{h_{\max}}{R} &= \frac{\sin^2 \theta}{4 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta}{4 \cos \theta} \\ &= \frac{\tan \theta}{4} \end{aligned}$$

On peut alors trouver la réponse

$$\begin{aligned} \frac{15m}{40m} &= \frac{\tan \theta}{4} \\ \theta &= 56,3^\circ \end{aligned}$$

25. En x , la grenade doit parcourir 20 m en 2 secondes. On a donc

$$v_x = \frac{20m}{2s} = 10 \frac{m}{s}$$

En y , la grenade doit être à $y = 4 \text{ m}$ à $t = 2 \text{ s}$. On a donc

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$4\text{m} = 0\text{m} + v_{0y} \cdot 2\text{s} - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2\text{s})^2$$

$$v_{0y} = 11,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ainsi, la grandeur de la vitesse est

$$v_0 = \sqrt{\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(11,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 15,47 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

et l'angle est

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x}$$

$$= \arctan \frac{11,8}{10}$$

$$= 49,72^\circ$$

26. Avec un $y = 0$ au sol, la hauteur en fonction du temps est donnée par

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

À $t = 1$, on a donc

$$h = v_{0y} \cdot 1\text{s} - \frac{1}{2}g \cdot (1\text{s})^2$$

et à $t = 5 \text{ s}$, on a

$$h = v_{0y} \cdot 5\text{s} - \frac{1}{2}g \cdot (5\text{s})^2$$

On a alors 2 équations et deux inconnues. En multipliant la première équation par 5, nos deux équations sont

$$5h = v_{0y} \cdot 5\text{s} - \frac{1}{2}g \cdot 5\text{s}^2$$

$$h = v_{0y} \cdot 5\text{s} - \frac{1}{2}g \cdot 25\text{s}^2$$

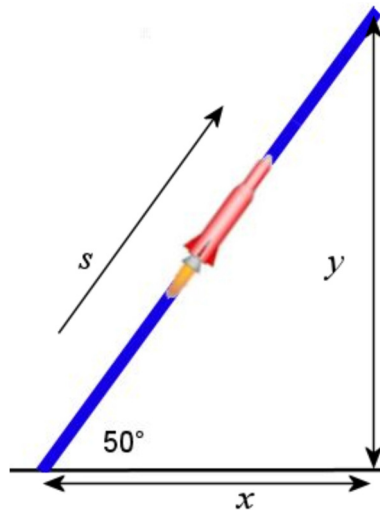
En soustrayant ces deux équations, on a

$$4h = g \cdot 10s^2$$

La hauteur est donc de 24,5 m.

27. Séparons ce mouvement en deux parties : un mouvement en ligne droite pendant 20 secondes et un mouvement en chute libre.

On va utiliser un axe des s dirigé dans le sens du mouvement pour la première partie.



Pendant le mouvement en ligne droite, le déplacement est

$$\begin{aligned} s &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ &= 0m + 0 \frac{m}{s} \cdot 20s + \frac{1}{2} \cdot 20 \frac{m}{s^2} \cdot (20s)^2 \\ &= 4000m \end{aligned}$$

Les positions finales en x et y sont donc

$$\begin{aligned} x &= s \cos 50^\circ = 4000m \cdot \cos 50^\circ = 2571,2m \\ y &= s \sin 50^\circ = 4000m \cdot \sin 50^\circ = 3064,2m \end{aligned}$$

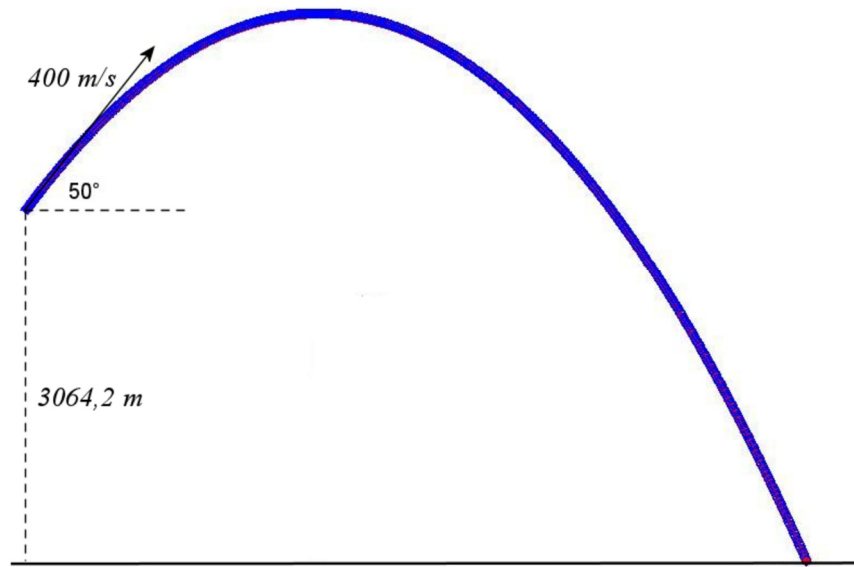
La vitesse à la fin de cette phase est

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ &= 0 \frac{m}{s} + 20 \frac{m}{s^2} \cdot 20s \\ &= 400 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

Cette vitesse est dans le sens de la trajectoire. Si on la sépare en composantes x et y , on a

$$\begin{aligned} v_x &= v \cos 50^\circ = 400 \frac{m}{s} \cdot \cos 50^\circ = 257,12 \frac{m}{s} \\ v_y &= v \sin 50^\circ = 400 \frac{m}{s} \cdot \sin 50^\circ = 306,42 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

Passons maintenant à la phase de chute libre. Les positions et les vitesses initiales de cette phase sont les valeurs finales de la phase précédente. On a alors la situation suivante.



a) On trouve la hauteur maximale avec

$$\begin{aligned}
 -2g(y - y_0) &= v_y^2 - v_{0y}^2 \\
 -2 \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot (y - 3064,2m) &= (0 \frac{m}{s})^2 - (306,42 \frac{m}{s})^2 \\
 y &= 7855m
 \end{aligned}$$

b) On trouve le temps de vol de cette partie avec

$$\begin{aligned}
 y &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\
 0m &= 3064,2m + 306,42 \frac{m}{s} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} \cdot t^2 \\
 t &= 71,30s \text{ et } t = -8,77s
 \end{aligned}$$

En ajoutant les 20 secondes de la première phase, le temps de vol total est de 91,30 s.

c) La position en x à la fin de la deuxième phase est

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + v_{0x}t \\
 &= 2571,2m + 257,12 \frac{m}{s} \cdot 71,30s \\
 &= 20\,905m
 \end{aligned}$$

28. L'accélération est

$$\begin{aligned}
 a_c &= \frac{v^2}{r} \\
 &= \frac{\left(1024 \frac{m}{s}\right)^2}{3,844 \times 10^8 m} \\
 &= 0,002728 \frac{m}{s^2}
 \end{aligned}$$

29. Le rayon de la trajectoire est

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\text{circonference}}{2\pi} \\
 &= 7,958m
 \end{aligned}$$

L'accélération est donc

$$\begin{aligned}
 a_c &= \frac{4\pi^2 r}{T^2} \\
 &= \frac{4\pi^2 \cdot 7,958m}{(5s)^2} \\
 &= 12,57 \frac{m}{s^2}
 \end{aligned}$$

30. La période du train est de

$$\begin{aligned}
 a_c &= \frac{4\pi^2 r}{T^2} \\
 20 \frac{m}{s^2} &= \frac{4\pi^2 \cdot 0,5m}{T^2} \\
 T &= 0,9935s
 \end{aligned}$$

Le temps pour faire 50 tours est donc de

$$\begin{aligned}
 t_{tot} &= 50 \cdot 0,9935s \\
 &= 49,67s
 \end{aligned}$$

31. On trouve le rayon de la trajectoire avec la formule

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$36 \frac{m}{s} = \frac{2\pi r}{24s}$$

$$r = 137,5m$$

L'accélération est donc

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

$$= \frac{(36 \frac{m}{s})^2}{137,5m}$$

$$= 9,425 \frac{m}{s^2}$$

32. Au point A, l'accélération est

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

$$= \frac{(20 \frac{m}{s})^2}{10m}$$

$$= 40 \frac{m}{s^2}$$

Cette accélération est vers le haut.

Au point B, l'accélération est

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

$$= \frac{(12 \frac{m}{s})^2}{15m}$$

$$= 9,6 \frac{m}{s^2}$$

Cette accélération est vers le bas.

33. a) L'accélération tangentielle est

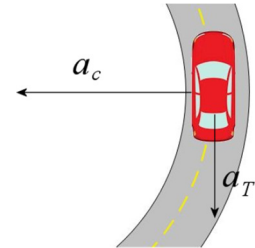
$$2a_T(s - s_0) = v^2 - v_0^2$$

$$2 \cdot a_T \cdot (4\pi r - 0m) = \left(0 \frac{m}{s}\right)^2 - \left(25 \frac{m}{s}\right)^2$$

$$2 \cdot a_T \cdot (4\pi \cdot 50m - 0m) = \left(0 \frac{m}{s}\right)^2 - \left(25 \frac{m}{s}\right)^2$$

$$a_T = -0,4974 \frac{m}{s^2}$$

Comme on a mis le sens positif dans le sens du déplacement de la voiture, une valeur négative veut dire que l'accélération est dans la direction opposée à la vitesse de la voiture.



b) Au bout d'un tour, la vitesse de la voiture est

$$2a_T(s - s_0) = v^2 - v_0^2$$

$$2 \cdot (-0,4974 \frac{m}{s^2}) \cdot (2\pi r - 0m) = v^2 - \left(25 \frac{m}{s}\right)^2$$

$$2 \cdot (-0,4974 \frac{m}{s^2}) \cdot (2\pi \cdot 50m - 0m) = v^2 - \left(25 \frac{m}{s}\right)^2$$

$$v = 17,68 \frac{m}{s}$$

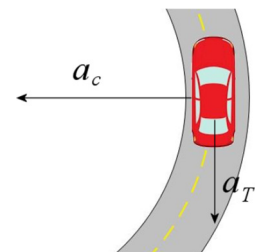
L'accélération centripète est donc

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

$$= \frac{\left(17,68 \frac{m}{s}\right)^2}{50m}$$

$$= 6,25 \frac{m}{s^2}$$

Comme toujours, l'accélération centripète est dirigée vers le centre du cercle.

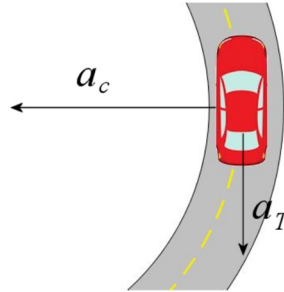


c) La grandeur de l'accélération totale est

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_T^2}$$

$$a = \sqrt{\left(6,25 \frac{m}{s^2}\right)^2 + \left(0,4974 \frac{m}{s^2}\right)^2} = 6,27 \frac{m}{s^2}$$

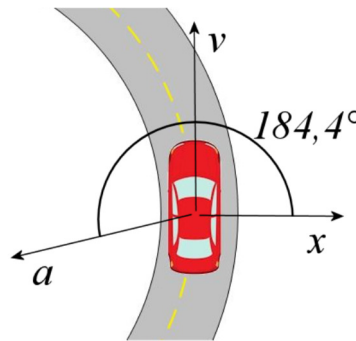
Les directions des accélérations sont



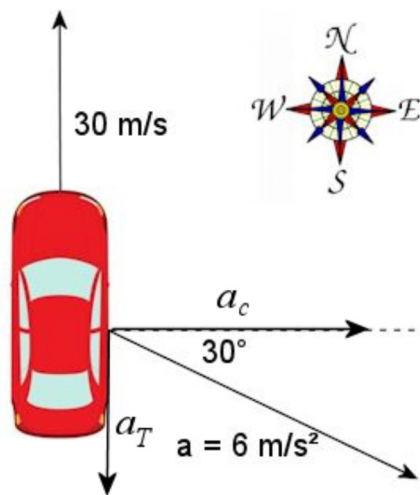
Avec des axes x et y conventionnels, la direction est

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{-0,4974}{-6,25} = 184,4^\circ$$

Ce qui signifie qu'il y a un angle de $94,4^\circ$ avec la vitesse



34. Les composantes de l'accélération sont



a) Comme l'accélération tangentielle est opposée à la vitesse, cette voiture ralentit.

- b) Dans cet exercice, l'accélération tangentielle est la composante en y de l'accélération. Cette composante est

$$\begin{aligned} a_T &= a \sin(-30^\circ) \\ &= 6 \frac{m}{s^2} \cdot \sin(-30^\circ) \\ &= -3 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

- c) Comme l'accélération centripète est vers l'est, cette voiture tourne vers l'est.

- d) On trouve le rayon de courbure à partir de l'accélération centripète. Dans cet exercice, l'accélération centripète est la composante en x de l'accélération. Cette composante est

$$\begin{aligned} a_c &= a \cos(-30^\circ) \\ &= 6 \frac{m}{s^2} \cdot \cos(-30^\circ) \\ &= 5,20 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Le rayon de courbure est donc

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{v^2}{r} \\ 5,20 \frac{m}{s^2} &= \frac{(30 \frac{m}{s})^2}{r} \\ r &= 173,2m \end{aligned}$$

- 35.** Pour trouver d , on doit trouver le point d'intersection de la parabole et de la pente. L'équation de la parabole est

$$\begin{aligned} y &= (\tan \theta) x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2 \\ y &= (\tan 60^\circ) \cdot x - \left(\frac{9,8 \frac{m}{s^2}}{2 \cdot 2500 \frac{m^2}{s^2} \cdot \cos^2 60^\circ} \right) \cdot x^2 \end{aligned}$$

L'équation de la pente est simplement l'équation d'une droite qui passe par l'origine.

$$y = mx$$

Comme la pente est égale à la tangente de l'angle d'inclinaison, l'équation est

$$y = (\tan 20^\circ) \cdot x$$

Au point de croisement, les valeurs de y sont identiques. Cela signifie que

$$y_{\text{parabole}} = y_{\text{droite}}$$

$$(\tan 20^\circ) \cdot x = (\tan 60^\circ) \cdot x - \left(\frac{9,8 \frac{m}{s^2}}{2 \cdot 2500 \frac{m^2}{s^2} \cdot \cos^2 60^\circ} \right) \cdot x^2$$

La valeur de x est donc

$$(\tan 20^\circ) \cdot x = (\tan 60^\circ) \cdot x - \left(\frac{9,8 \frac{m}{s^2}}{2 \cdot 2500 \frac{m^2}{s^2} \cdot \cos^2 60^\circ} \right) \cdot x^2$$

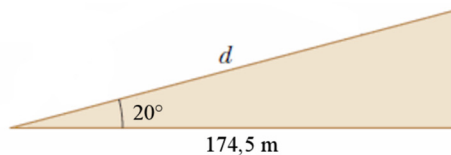
$$(\tan 20^\circ) = (\tan 60^\circ) - \left(\frac{9,8 \frac{m}{s^2}}{2 \cdot 2500 \frac{m^2}{s^2} \cdot \cos^2 60^\circ} \right) x$$

$$\left(\frac{9,8 \frac{m}{s^2}}{2 \cdot 2500 \frac{m^2}{s^2} \cdot \cos^2 60^\circ} \right) x = (\tan 60^\circ) - (\tan 20^\circ)$$

$$x = \frac{((\tan 60^\circ) - (\tan 20^\circ)) \cdot 2 \cdot 2500 \frac{m^2}{s^2} \cdot \cos^2 60^\circ}{9,8 \frac{m}{s^2}}$$

$$x = 174,5m$$

De là, on trouve d avec



$$\cos 20^\circ = \frac{174,5m}{d}$$

$$d = 185,7m$$

- 36.** Pour trouver d , on doit trouver le point d'intersection de la parabole et de la pente.
L'équation de la parabole est

$$y = (\tan \theta) x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2$$

L'équation de la pente est simplement l'équation d'une droite qui passe par l'origine.

$$y = mx$$

Comme la pente est égale à la tangente de l'angle d'inclinaison, l'équation est

$$y = (\tan \alpha) x$$

Au point de croisement, les valeurs de y sont identiques. Cela signifie que

$$y_{\text{parabole}} = y_{\text{droite}}$$

$$(\tan \alpha) x = (\tan \theta) x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2$$

La valeur de x est donc

$$(\tan \alpha) = (\tan \theta) - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x$$

$$\left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x = (\tan \theta - \tan \alpha)$$

$$x = (\tan \theta - \tan \alpha) \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta}{g}$$

$$x = \frac{v_0^2}{g} (2 \sin \theta \cos \theta - 2 \cos^2 \theta \tan \alpha)$$

Puisque $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$, on a

$$x = \frac{v_0^2}{g} (\sin 2\theta - 2 \cos^2 \theta \tan \alpha)$$

Quand d est à sa valeur maximale, x est aussi à sa valeur maximale. On cherche donc la valeur de x maximale. À la valeur maximale, on a

$$\frac{dx}{d\theta} = 0$$

On a donc

$$0 = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{v_0^2}{g} (\sin 2\theta - 2 \cos^2 \theta \tan \alpha) \right)$$

$$0 = \frac{v_0^2}{g} (2 \cos 2\theta - -4 \sin \theta \cos \theta \tan \alpha)$$

$$0 = 2 \cos 2\theta + 4 \sin \theta \cos \theta \tan \alpha$$

Il ne reste qu'à isoler θ .

$$0 = 2 \cos 2\theta + 4 \sin \theta \cos \theta \tan \alpha$$

$$0 = 2 \cos 2\theta + 2 \sin 2\theta \tan \alpha$$

$$2 \cos 2\theta = -2 \sin 2\theta \tan \alpha$$

$$1 = -\tan 2\theta \tan \alpha$$

$$-\cot \alpha = \tan 2\theta$$

Mais

$$\begin{aligned} -\cot \alpha &= -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ &= \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} \\ &= \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} \\ &= \frac{\sin(90^\circ - (-\alpha))}{\cos(90^\circ - (-\alpha))} \\ &= \tan(90^\circ + \alpha) \end{aligned}$$

On a donc

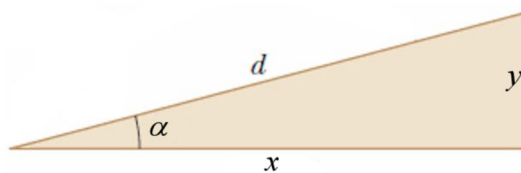
$$-\cot \alpha = \tan 2\theta$$

$$\tan(90^\circ + \alpha) = \tan 2\theta$$

$$90^\circ + \alpha = 2\theta$$

$$\theta = \frac{1}{2}(90^\circ + \alpha)$$

Ainsi, la distance est



$$d = \frac{x}{\cos \alpha}$$

Avec la valeur de x , on a

$$d = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha} (\sin 2\theta - 2 \cos^2 \theta \tan \alpha)$$

La valeur maximale de d se trouve avec l'angle maximal. On a donc

$$\begin{aligned}
 d_{\max} &= \frac{v_0^2}{g \cos \alpha} \left(\sin 2 \frac{1}{2} (90^\circ + \alpha) - 2 \cos^2 \frac{1}{2} (90^\circ + \alpha) \tan \alpha \right) \\
 &= \frac{v_0^2}{g \cos \alpha} \left(\sin (90^\circ + \alpha) - 2 \cos^2 \frac{1}{2} (90^\circ + \alpha) \tan \alpha \right)
 \end{aligned}$$

Comme

$$\sin (90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

on a

$$d_{\max} = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha} \left(\cos \alpha - 2 \cos^2 \frac{1}{2} (90^\circ + \alpha) \tan \alpha \right)$$

Comme

$$\cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{1 + \cos x}{2}$$

on a

$$\begin{aligned}
 d_{\max} &= \frac{v_0^2}{g \cos \alpha} \left(\cos \alpha - 2 \frac{1 + \cos (90^\circ + \alpha)}{2} \tan \alpha \right) \\
 &= \frac{v_0^2}{g \cos \alpha} \left(\cos \alpha - (1 + \cos (90^\circ + \alpha)) \tan \alpha \right)
 \end{aligned}$$

Comme

$$\cos (90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

on a

$$d_{\max} = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha} \left(\cos \alpha - (1 - \sin \alpha) \tan \alpha \right)$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 d_{\max} &= \frac{v_0^2}{g \cos \alpha} (\cos \alpha - (1 - \sin \alpha) \tan \alpha) \\
 &= \frac{v_0^2}{g \cos^2 \alpha} (\cos^2 \alpha - (1 - \sin \alpha) \sin \alpha) \\
 &= \frac{v_0^2}{g \cos^2 \alpha} (\cos^2 \alpha - \sin \alpha + \sin^2 \alpha) \\
 &= \frac{v_0^2}{g \cos^2 \alpha} (1 - \sin \alpha)
 \end{aligned}$$

37. Trouvons la vitesse de lancement en isolant v_0 dans

$$y = (\tan \theta) x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 (\tan \theta) x - y &= \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2 \\
 v_0^2 &= \frac{gx^2}{2 \cos^2 \theta ((\tan \theta) x - y)} \\
 v_0^2 &= \frac{gx^2}{2x \cos^2 \theta \tan \theta - 2y \cos^2 \theta} \\
 v_0^2 &= \frac{gx^2}{2x \cos \theta \sin \theta - 2y \cos^2 \theta} \\
 v_0^2 &= \frac{gx^2}{x \sin 2\theta - 2y \cos^2 \theta}
 \end{aligned}$$

Si la vitesse est minimale, c'est que le diviseur est maximum. On doit trouver la valeur maximale de

$$x \sin 2\theta - 2y \cos^2 \theta$$

Évidemment, la valeur est maximale quand la dérivée est nulle. On doit donc avoir

$$\begin{aligned} \frac{d(x \sin 2\theta - 2y \cos^2 \theta)}{d\theta} &= 0 \\ 2x \cos 2\theta - 4y \cos \theta \sin \theta &= 0 \\ 2x \cos 2\theta + 2y \sin 2\theta &= 0 \\ x \cos 2\theta + y \sin 2\theta &= 0 \\ y \sin 2\theta &= -x \cos 2\theta \\ y \tan 2\theta &= -x \\ \tan 2\theta &= \frac{-x}{y} \end{aligned}$$

Avec $x = 195 \text{ m}$ et $y = 155 \text{ m}$, on arrive aux solutions suivantes.

$$\begin{aligned} \tan 2\theta &= \frac{-195\text{m}}{155\text{m}} \\ 2\theta &= -51,52^\circ \quad \text{et} \quad 2\theta = 128,48^\circ \end{aligned}$$

(La deuxième solution se trouve en ajoutant 180° à la première.) De toute évidence, la première solution est à rejeter. Il reste donc $\theta = 64,24^\circ$.

Ainsi, la vitesse minimale est

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\frac{gx^2}{x \sin 2\theta - 2y \cos^2 \theta}} \\ &= \sqrt{\frac{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (195\text{m})^2}{195\text{m} \cdot \sin(128,48^\circ) - 2 \cdot 155\text{m} \cdot \cos^2(64,24^\circ)}} \\ &= \sqrt{3960,2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \\ &= 62,93 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$