Solutionnaire du chapitre 3

1. Le flux est

$$\begin{aligned}\phi &= EA\cos\theta \\ &= 200\tfrac{N}{C}\cdot(0{,}1m\cdot 0{,}1m)\cdot\cos 60° \\ &= 1\tfrac{Nm^2}{C}\end{aligned}$$

(Ici, on a mis le vecteur *A* vers le haut. Si on avait mis ce vecteur vers le bas, l'angle aurait été de 120° et la réponse aurait été de -1 Nm²/C. Ces deux réponses sont bonnes.)

2. a) Sur la surface 1, le flux est

$$\begin{aligned}\phi &= EA\cos\theta \\ &= 2000\tfrac{N}{C}\cdot(0{,}2m\cdot 0{,}2m)\cdot\cos 180° \\ &= -80\tfrac{Nm^2}{C}\end{aligned}$$

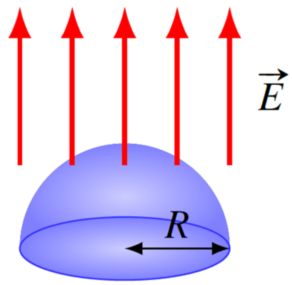
b) Sur la surface 2, le flux est

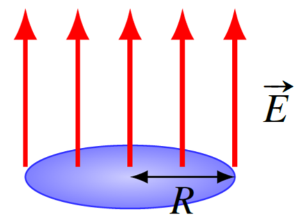
$$\begin{aligned}\phi &= EA\cos\theta \\ &= 2000\tfrac{N}{C}\cdot(0{,}2m\cdot 0{,}2m)\cdot\cos 0° \\ &= 80\tfrac{Nm^2}{C}\end{aligned}$$

c) Sur la surface 3, le flux est

$$\begin{aligned}\phi &= EA\cos\theta \\ &= 2000\tfrac{N}{C}\cdot(0{,}2m\cdot 0{,}2m)\cdot\cos 90° \\ &= 0\tfrac{Nm^2}{C}\end{aligned}$$

3. Il serait assez difficile de trouver le flux qui traverse l'hémisphère parce que l'angle entre le champ et la surface change constamment. Il faudrait ainsi faire une intégrale pour y arriver. Toutefois, on peut simplifier le calcul si on se rappelle qu'en calculant le flux on compte le nombre de lignes de champ qui traversent la surface. Le nombre de lignes de champ est le même que le nombre qui traverse un cercle ayant le même rayon que l'hémisphère.





Le flux à travers ce cercle est

$$\begin{aligned}\phi &= EA\cos\theta \\ &= 2000\tfrac{N}{C}\cdot\left(\pi\cdot(0,2m)^2\right)\cdot\cos 0° \\ &= 251,3\tfrac{Nm^2}{C}\end{aligned}$$

(Ici, on a mis le vecteur A vers le haut. Si on avait mis ce vecteur vers le bas, l'angle aurait été de 180° et la réponse aurait été de -251,3 Nm²/C. Ces deux réponses sont bonnes.)

4. Si la surface est dans le plan xy, alors le vecteur A est dans la direction de l'axe des z puisqu'il doit être perpendiculaire au plan. Le vecteur surface est donc

$$\vec{A} = 10m^2\vec{k}$$

Le flux est donc

$$\begin{aligned}\phi &= \vec{E}\cdot\vec{A} \\ &= \left(1000\tfrac{N}{C}\vec{i} + 2000\tfrac{N}{C}\vec{j} - 3000\tfrac{N}{C}\vec{k}\right)\cdot 10m^2\vec{k} \\ &= 1000\tfrac{N}{C}\cdot 0m^2 + 2000\tfrac{N}{C}\cdot 0m^2 - 3000\tfrac{N}{C}\cdot 10m^2 \\ &= -30\,000\tfrac{Nm^2}{C}\end{aligned}$$

(Ici, on a mis le vecteur A vers les z positifs. Si on avait mis ce vecteur vers les z négatifs, la réponse aurait été de 30 000 Nm²/C. Ces deux réponses sont bonnes.)

5. Nous allons calculer le flux avec

$$\phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Comme il n'y a que la charge de 2 µC à l'intérieur de la surface, on a

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ &= \frac{2\times 10^{-6} C}{8,854\times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}} \\ &= 225\,882 \frac{Nm^2}{C}\end{aligned}$$

6. Le flux total à travers le cube est

$$\begin{aligned}\phi &= 3000 \tfrac{Nm^2}{C} + -1000 \tfrac{Nm^2}{C} + 500 \tfrac{Nm^2}{C} + -2500 \tfrac{Nm^2}{C} + 1500 \tfrac{Nm^2}{C} + 800 \tfrac{Nm^2}{C} \\ &= 2300 \tfrac{Nm^2}{C}\end{aligned}$$

On trouve ensuite la charge nette à l'intérieur avec

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ 2300 \tfrac{Nm^2}{C} &= \frac{Q_{\text{int}}}{8,854\times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}} \\ Q_{\text{int}} &= 2,036\times 10^{-8} C = 20,36 nC\end{aligned}$$

7. La charge à l'intérieur de la surface correspond à la charge de la partie de la tige qui est à l'intérieur de la surface. Cette charge est

$$\begin{aligned}Q_{\text{int}} &= \lambda L \\ &= 20 \tfrac{\mu C}{m} \cdot 0,5 m \\ &= 10 \mu C\end{aligned}$$

Le flux est donc

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ &= \frac{10\times 10^{-6} C}{8,854\times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}} \\ &= 1,129\times 10^{6} \tfrac{Nm^2}{C}\end{aligned}$$

8. Pour trouver le champ, on fait une surface cylindrique autour du fil. Cette surface a un rayon de 30 cm et une longueur h. On a alors

$$E2\pi rh = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la charge de la partie de la tige qui est à l'intérieur de la surface. Cette charge est

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \lambda h \\ &= 50\tfrac{\mu C}{m} \cdot h \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} E2\pi rh &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ E \cdot 2\pi \cdot 0,3m \cdot h &= \frac{50\frac{\mu C}{m} \cdot h}{8,854 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}} \\ E \cdot 2\pi \cdot 0,3m &= \frac{50\frac{\mu C}{m}}{8,854 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}} \\ E &= 2,996 \times 10^6 \tfrac{N}{C} \end{aligned}$$

Comme la réponse est positive, le champ est dans la direction opposée au centre de la tige.

9. On va faire une surface sphérique autour de la sphère qui passe par l'endroit où on connait le champ. Cette surface a donc un rayon de 3 m. On a alors

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la charge de la sphère au complet. On a donc

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$2400\tfrac{N}{c} \cdot 4\pi \cdot (3m)^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{8,854\times 10^{-12}\,\tfrac{C^2}{Nm^2}}$$

$$Q_{\text{int}} = 2,403\times 10^{-6}\,C$$

La densité surfacique de charge de la sphère est donc

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{Q}{4\pi R^2} \\ &= \frac{2,403\times 10^{-6}\,C}{4\pi \cdot (0,6m)^2} \\ &= 5,313\times 10^{-7}\,\tfrac{C}{m^2}\end{aligned}$$

10. a)

On va faire une surface sphérique autour de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 50 cm. On a alors

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la charge de la sphère au complet. On a donc

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi \cdot (0,5m)^2 = \frac{60\times 10^{-6}\,C}{8,854\times 10^{-12}\,\tfrac{C^2}{Nm^2}}$$

$$E = 2,157\times 10^{6}\,\tfrac{N}{C}$$

Comme la réponse est positive, le champ est dans la direction opposée au centre de la sphère.

b) On va faire une surface sphérique autour de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 10 cm. On a alors

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface est nulle puisque la sphère est conductrice et que les charges se retrouvent en surface de la sphère. Comme la surface de Gauss est plus petite que la sphère, il n'y a pas de charge à l'intérieur de la surface. On a donc

$$E\left(4\pi r^2\right)=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$
$$E\cdot\left(4\pi\cdot(0,1m)^2\right)=\frac{0C}{8,854\times10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}}$$
$$E=0\,\tfrac{N}{C}$$

On aurait pu aussi simplement dire que $E = 0$ puisqu'on est dans un conducteur.

11. a)

On va faire une surface sphérique autour de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 50 cm. On a alors

$$E4\pi r^2=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la charge de la sphère au complet. On a donc

$$E4\pi r^2=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$
$$E\cdot4\pi\cdot(0,5m)^2=\frac{-40\times10^{-6}C}{8,854\times10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}}$$
$$E=-1,438\times10^6\,\tfrac{N}{C}$$

Comme la réponse est négative, le champ est de 1,438 x 10^6 N/C vers le centre de la sphère.

b) On va faire une surface sphérique autour de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 12 cm. On a alors

$$E4\pi r^2=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur correspond à la charge de la partie de la sphère à l'intérieur de la surface. Il faut donc trouver la charge de la sphère qui est à moins de 12 cm du centre de la sphère. Pour y arriver, on trouve la densité de charge de la sphère. Cette densité est

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \\ &= \frac{-40\times 10^{-6}C}{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(0,2m)^3}\end{aligned}$$

Ce serait très correct de calculer cette valeur, mais on va la laisser sous cette forme parce qu'il y aura simplification plus tard.

La charge à l'intérieur de la surface de 12 cm de rayon est donc

$$\begin{aligned}Q_{int} &= \rho V_{int} \\ &= \left(\frac{-40\times 10^{-6}C}{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(0,2m)^3}\right)\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(0,12m)^3\end{aligned}$$

C'est là que plusieurs termes se simplifient et il reste

$$\begin{aligned}Q_{int} &= \rho V_{int} \\ &= \frac{-40\times 10^{-6}C}{(0,2m)^3}\cdot(0,12m)^3 \\ &= -8,64\times 10^{-6}C\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}E4\pi r^2 &= \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \\ E\cdot 4\pi\cdot(0,12m)^2 &= \frac{-8,64\times 10^{-6}C}{8,854\times 10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2}} \\ E &= -5,393\times 10^6\,\frac{N}{C}\end{aligned}$$

À cet endroit, on est dans le diélectrique. On doit donc diviser cette valeur du champ par la permittivité relative pour obtenir la véritable grandeur du champ. Le champ est donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{-5,393\times10^6\ \frac{N}{C}}{24} \\ &= -2,247\times10^5\ \tfrac{N}{C} \end{aligned}$$

Comme la réponse est négative, le champ est de 2,247 x 10^5 N/C vers le centre de la sphère.

12. a)

On va faire une surface cylindrique autour de la tige qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 40 cm et une longueur *h*. On a alors

$$E2\pi rh = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la partie de la charge de la tige qui est à l'intérieur de la surface de longueur *h*. Cette charge est

$$Q_{\text{int}} = \lambda h$$

On a donc

$$\begin{aligned} E2\pi rh &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ E2\pi rh &= \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \\ E2\pi r &= \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \\ E\cdot 2\pi\cdot 0,4m &= \frac{35\times10^{-6}\ \frac{C}{m}}{8,854\times10^{-12}\ \frac{C^2}{Nm^2}} \\ E &= 1,573\times10^6\ \tfrac{N}{C} \end{aligned}$$

Comme la réponse est positive, le champ est dans la direction opposée au centre de la tige.

b) On va faire une surface cylindrique autour de la tige qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 1 cm et une longueur *h*. On a alors

$$E\left(2\pi r\right)=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface est nulle puisque la tige est conductrice et que les charges se retrouvent en surface de la tige. Comme la surface de Gauss est plus petite que la tige, il n'y a pas de charge à l'intérieur de la surface. On a donc

$$E2\pi rh=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$
$$E\cdot 2\pi\cdot 0{,}01m\cdot h=\frac{0C}{8{,}854\times10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}}$$
$$E=0\,\tfrac{N}{C}$$

On aurait pu aussi simplement dire que $E = 0$ puisqu'on est dans un conducteur.

13. a)

On va faire une surface cylindrique autour de la tige qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 20 cm et une longueur *h*. On a alors

$$E2\pi rh=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la partie de la charge de la tige qui est à l'intérieur de la surface de longueur *h*. Cette charge est

$$Q_{\text{int}}=\lambda h$$

On a donc

$$E2\pi rh=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$
$$E2\pi rh=\frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$
$$E2\pi r=\frac{\lambda}{\varepsilon_0}$$
$$E\cdot 2\pi\cdot 0{,}2m=\frac{36\times10^{-6}\,\frac{C}{m}}{8{,}854\times10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}}$$
$$E=3{,}236\times10^{6}\,\tfrac{N}{C}$$

Comme la réponse est positive, le champ est dans la direction opposée au centre de la tige.

b) On va faire une surface cylindrique autour de la tige qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 8 cm et une longueur *h*. On a alors

$$E2\pi rh = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la partie de la charge de la tige qui est à l'intérieur de la surface de longueur *h*. Mais cette fois, la surface est plus petite que la tige. Il faut donc trouver la charge qui est à moins de 8 cm du centre de la tige et enlever la charge qui est entre 8 cm et 12 cm du centre de la tige. Pour y arriver, on trouve la densité de charge d'une partie de la tige de longueur *h*. Cette densité est

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{Q}{volume} \\ &= \frac{Q}{\pi R^2 h} \\ &= \frac{36\times 10^{-6}\,\frac{C}{m}\cdot h}{\pi\cdot(0{,}12m)^2\cdot h} \\ &= \frac{36\times 10^{-6}\,\frac{C}{m}}{\pi\cdot(0{,}12m)^2}\end{aligned}$$

Ce serait très correct de calculer cette valeur, mais on va la laisser sous cette forme parce qu'il y aura simplification plus tard.

La charge à l'intérieur de la surface de 8 cm de rayon est donc

$$\begin{aligned}Q_{\text{int}} &= \rho V_{\text{int}} \\ &= \left(\frac{36\times 10^{-6}\,\frac{C}{m}}{\pi\cdot(0{,}12m)^2}\right)\cdot\pi\cdot(0{,}08m)^2\cdot h\end{aligned}$$

C'est là que plusieurs termes se simplifient et il reste

$$Q_{\text{int}} = \frac{36\times10^{-6}\,\frac{C}{m}}{(0{,}12m)^2}\cdot(0{,}08m)^2\cdot h$$
$$= 16\times10^{-6}\,\tfrac{C}{m}\cdot h$$

On a donc

$$E2\pi rh = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$
$$E2\pi rh = \frac{16\times10^{-6}\,\frac{C}{m}\cdot h}{\varepsilon_0}$$
$$E2\pi r = \frac{16\times10^{-6}\,\frac{C}{m}}{\varepsilon_0}$$
$$E\cdot 2\pi\cdot 0{,}08m = \frac{16\times10^{-6}\,\frac{C}{m}}{8{,}854\times10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}}$$
$$E = 3{,}595\times10^{6}\,\tfrac{N}{C}$$

À cet endroit, on est dans le diélectrique. On doit donc diviser cette valeur du champ par la permittivité relative pour obtenir la véritable grandeur du champ. Le champ est donc

$$E = \frac{3{,}595\times10^{6}\,\frac{N}{C}}{5}$$
$$= 7{,}19\times10^{5}\,\tfrac{N}{C}$$

Comme la réponse est positive, le champ est dans la direction opposée au centre de la tige.

14. a)

On va faire une surface sphérique autour de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 40 cm. On a alors

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la charge de la charge centrale et de la coquille sphérique. La charge totale est donc de -10 µC + 5 µC = -5 µC. On a donc

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi \cdot \left(0,4m\right)^2 = \frac{-5\times10^{-6}C}{8,854\times10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}}$$

$$E = -2,809\times10^5\,\tfrac{N}{C}$$

Comme la réponse est négative, on a un champ de 2,809 x 10^5 N/C vers le centre de la sphère.

b) À 22 cm du centre, on est dans le conducteur. Le champ est donc nul.

c) On va faire une surface sphérique autour de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 5 cm. On a alors

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Maintenant, il n'y a que la charge centrale qui est à l'intérieur de la surface de Gauss. On a donc

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi \cdot \left(0,05m\right)^2 = \frac{-10\times10^{-6}C}{8,854\times10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}}$$

$$E = -3,595\times10^7\,\tfrac{N}{C}$$

Comme la réponse est négative, on a un champ de 3,595 x 10^7 N/C vers le centre de la sphère.

15. a)

On va faire une surface cylindrique autour de la tige qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 6 cm et une longueur *h*. On a alors

$$E2\pi rh = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond seulement à la partie de la charge de la tige centrale qui est à l'intérieur de la surface de longueur *h*. Cette charge est

$$Q_{\text{int}} = \lambda_1 h$$

(On va appeler λ_1 la charge linéique de la tige centrale et λ_2 la charge linéique de l'enveloppe.)

On a donc

$$E2\pi rh = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$
$$E2\pi rh = \frac{\lambda_1 h}{\varepsilon_0}$$
$$E2\pi r = \frac{\lambda_1}{\varepsilon_0}$$
$$E \cdot 2\pi \cdot 0,06m = \frac{50\times 10^{-6}\,\frac{C}{m}}{8,854\times 10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}}$$
$$E = 1,498\times 10^{7}\,\frac{N}{C}$$

Comme la réponse est positive, le champ est dans la direction opposée au centre de la tige.

b) On va faire une surface cylindrique autour de la tige qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 20 cm et une longueur h. On a alors

$$E2\pi rh = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond seulement à la partie de la charge des deux tiges qui est à l'intérieur de la surface de longueur h. Cette charge est

$$Q_{\text{int}} = \lambda_1 h + \lambda_2 h$$

On a donc

$$E2\pi rh=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$
$$E2\pi rh=\frac{\lambda_1 h+\lambda_2 h}{\varepsilon_0}$$
$$E2\pi r=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\varepsilon_0}$$
$$E\cdot 2\pi\cdot 0,2m=\frac{50\times10^{-6}\,\frac{C}{m}+-200\times10^{-6}\,\frac{C}{m}}{8,854\times10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}}$$
$$E=-1,348\times10^{7}\,\tfrac{N}{C}$$

Comme la réponse est négative, on a un champ de 1,348 x 10^7 N/C vers le centre de la tige.

16. a)

On va faire une surface sphérique autour de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 30 cm. On a alors

$$E4\pi r^2=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la charge de la sphère au complet. On trouve cette charge avec

$$Q_{\text{int}}=\rho\left(Vol\right)$$

N'oublions pas ici que le volume correspond au volume d'une sphère vide. Il faut donc enlever le volume de la cavité au volume de la sphère.

$$\begin{aligned}Q_{\text{int}}&=\rho\left(Vol\right)\\&=\rho\left(\tfrac{4}{3}\pi R_{ext}^3-\tfrac{4}{3}\pi R_{int}^3\right)\\&=5\times10^{-3}\,\tfrac{C}{m^3}\cdot\left(\tfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(0,25m\right)^3-\tfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(0,2m\right)^3\right)\\&=1,597\times10^{-4}C\end{aligned}$$

On a donc

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi \cdot (0,3m)^2 = \frac{1,597\times10^{-4} C}{8,854\times10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}}$$

$$E = 1,595\times10^{7} \tfrac{N}{C}$$

Comme la réponse est positive, le champ est dans la direction opposée au centre de la sphère.

b) On va faire une surface sphérique autour de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 22 cm. On a alors

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la partie de la charge de la sphère qui est à moins de 22 cm du centre. On trouve cette charge avec

$$Q_{\text{int}} = \rho (Vol)_{\text{int}}$$

N'oublions pas ici que le volume correspond au volume d'une sphère de 22 cm à laquelle il faut enlever la cavité.

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \rho (Vol)_{\text{int}} \\ &= \rho\left(\tfrac{4}{3}\pi r^3 - \tfrac{4}{3}\pi R_{int}^3\right) \\ &= 5\times10^{-3} \tfrac{C}{m^3} \cdot \left(\tfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot(0,22m)^3 - \tfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot(0,2m)^3\right) \\ &= 5,546\times10^{-5} C \end{aligned}$$

On a donc

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi \cdot (0,22m)^2 = \frac{5,546\times10^{-5} C}{8,854\times10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}}$$

$$E = 1,030\times10^{7} \tfrac{N}{C}$$

À cet endroit, on est dans le diélectrique. On doit donc diviser cette valeur du champ par la permittivité relative pour obtenir la véritable grandeur du champ. Le champ est donc

$$E = \frac{1,030\times10^{7}\,\frac{N}{C}}{15}$$
$$= 6,866\times10^{5}\,\tfrac{N}{C}$$

Comme la réponse est positive, le champ est dans la direction opposée au centre de la sphère.

c) On va faire une surface sphérique autour de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 10 cm. On a alors

$$E4\pi r^{2} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface est nulle puisque la surface de Gauss n'inclut aucune partie de la sphère chargée, elle n'inclut qu'une partie de la cavité.

$$Q_{\text{int}} = 0$$

On a donc

$$E4\pi r^{2} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$
$$E\cdot 4\pi\cdot(0,1m)^{2} = \frac{0C}{8,854\times10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}}$$
$$E = 0\,\tfrac{N}{C}$$

En fait, peu importe la valeur du rayon de la sphère de Gauss, le champ est toujours nul. Il n'y a donc pas de champ partout dans la cavité.

17. a)

On va faire une surface sphérique autour du centre de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 5 cm. On a alors

$$E4\pi r^{2} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la charge ponctuelle au centre de la sphère. On a donc

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$
$$E \cdot 4\pi \cdot (0,05m)^2 = \frac{5\times 10^{-6} C}{8,854\times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}}$$
$$E = 1,798\times 10^{7} \tfrac{N}{C}$$

Comme la réponse est positive, le champ est de 1,798 x 10^7 N/C dans la direction opposée au centre de la sphère.

b) On va faire une surface sphérique autour du centre de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 15 cm. On a alors

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la charge ponctuelle au centre de la sphère additionné à la partie de la charge de la sphère qui est dans la surface de Gauss.

$$Q_{\text{int}} = Q_{\text{int charge ponctuelle}} + Q_{\text{int sphère}}$$

Pour trouver la partie de la charge de la sphère, on va calculer sa charge volumique.

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\text{charge}}{\text{volume}} \\ &= \frac{-20\mu C}{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left((0,16m)^3 - (0,12m)^3\right)} \\ &= -2,016\times 10^{-3} \tfrac{C}{m^3}\end{aligned}$$

La charge à l'intérieur du volume de Gauss est donc

$$\begin{aligned}Q_{\text{int}} &= \rho_{\text{int}} V_{\text{int}} \\ &= -2,0163\times 10^{-3} \tfrac{C}{m^3}\cdot\tfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left((0,15m)^3 - (0,12m)^3\right) \\ &= -1,391\times 10^{-5} C \\ &= -13,91\mu C\end{aligned}$$

La charge totale à l'intérieur de la surface de Gauss est donc

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= Q_{\text{int charge ponctuelle}} + Q_{\text{int sphère}} \\ &= 5\mu C - 13{,}91\mu C \\ &= -8{,}91\mu C \end{aligned}$$

Le théorème de Gauss donne donc

$$\begin{aligned} E 4\pi r^2 &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ E \cdot 4\pi \cdot (0{,}15m)^2 &= \frac{-8{,}91\times10^{-6}C}{8{,}854\times10^{-12}\ \frac{C^2}{Nm^2}} \\ E &= -3{,}559\times10^{6}\ \tfrac{N}{C} \end{aligned}$$

Comme la réponse est positive, le champ est de 3,559 x 10^6 N/C vers le centre de la sphère.

c) On va faire une surface sphérique autour du centre de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 20 cm. On a alors

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la charge ponctuelle au centre de la sphère additionné à la charge totale de la sphère.

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= Q_{\text{int charge ponctuelle}} + Q_{\text{int sphère}} \\ &= 5\mu C + -20\mu C \\ &= -15\mu C \end{aligned}$$

Le théorème de Gauss donne donc

$$\begin{aligned} E 4\pi r^2 &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ E \cdot 4\pi \cdot (0{,}20m)^2 &= \frac{-15\times10^{-6}C}{8{,}854\times10^{-12}\ \frac{C^2}{Nm^2}} \\ E &= -3{,}370\times10^{6}\ \tfrac{N}{C} \end{aligned}$$

Comme la réponse est négative, le champ est de 3,370 x 10^6 N/C vers le centre de la sphère.

18. a)

On va faire une surface sphérique autour du centre de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 5 cm. On a alors

$$E\left(4\pi r^2\right)=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond seulement à la partie de la charge de la partie centrale de la sphère qui est à l'intérieur de la surface de Gauss. Cette charge est

$$Q_{\text{int}}=\rho_1\cdot V_{\text{int}}$$

(On va appeler ρ_1 la charge volumique de la partie centrale et ρ_2 la charge volumique de l'enveloppe.) La charge est donc

$$\begin{aligned}Q_{\text{int}}&=\rho_1\cdot V_{\text{int}}\\&=\rho_1\cdot\tfrac{4}{3}\pi r^3\\&=0,005\tfrac{C}{m^3}\cdot\tfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(0,05m\right)^3\\&=2,618\times10^{-6}C\end{aligned}$$

On a donc

$$E4\pi r^2=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$E4\pi r^2=\frac{2,618\times10^{-6}C}{\varepsilon_0}$$

$$E\cdot4\pi\cdot\left(0,05m\right)^2=\frac{2,618\times10^{-6}C}{8,854\times10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2}}$$

$$E=9,412\times10^6\tfrac{N}{C}$$

À cet endroit, on est dans un diélectrique. On doit donc diviser cette valeur du champ par la permittivité relative pour obtenir la véritable grandeur du champ. Le champ est donc

$$E = \frac{9,412\times 10^6 \frac{N}{C}}{3}$$
$$= 3,137\times 10^6 \tfrac{N}{C}$$

Comme la réponse est positive, le champ est dans la direction opposée au centre de la sphère.

b) On va faire une surface sphérique autour du centre de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 15 cm. On a alors

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à toute la charge de la sphère centrale et a une partie de la charge de l'enveloppe à moins de 15 cm du centre. Cette charge est

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \rho_1 \cdot V_{\text{partie centrale}} + \rho_2 \cdot V_{\text{enveloppe à moins de 15 cm}} \\ &= \rho_1 \cdot \tfrac{4}{3}\pi R_1^3 + \rho_2 \cdot \left(\tfrac{4}{3}\pi r^3 - \tfrac{4}{3}\pi R_1^3\right) \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \rho_1 \cdot \tfrac{4}{3}\pi R_1^3 + \rho_2 \cdot \left(\tfrac{4}{3}\pi r^3 - \tfrac{4}{3}\pi R_1^3\right) \\ &= 0,005\tfrac{C}{m^3} \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0,1m)^3 + -0,01\tfrac{C}{m^3} \cdot \left(\tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0,15m)^3 - \tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0,1m)^3\right) \\ &= -7,854\times 10^{-5} C \end{aligned}$$

On a donc

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$
$$E4\pi r^2 = \frac{-7,854\times 10^{-5} C}{\varepsilon_0}$$
$$E \cdot 4\pi \cdot (0,15m)^2 = \frac{-7,854\times 10^{-5} C}{8,854\times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}}$$
$$E = -3,1372\times 10^7 \tfrac{N}{C}$$

À cet endroit, on est dans un diélectrique. On doit donc diviser cette valeur du champ par la permittivité relative pour obtenir la véritable grandeur du champ. Le champ est donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{-3{,}1372\times 10^{7}\ \frac{N}{C}}{9} \\ &= -3{,}4858\times 10^{6}\ \tfrac{N}{C} \end{aligned}$$

Comme la réponse est négative, on a un champ de 3,486 x 10^6 N/C vers le centre de la sphère.

c) On va faire une surface sphérique autour du centre de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 25 cm. On a alors

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à toute la charge de la partie centrale et toute la charge de l'enveloppe. Cette charge est

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \rho_1 \cdot V_{\text{partie centrale}} + \rho_2 V_{\text{enveloppe}} \\ &= \rho_1 \cdot \tfrac{4}{3}\pi R_1^3 + \rho_2 \cdot \left(\tfrac{4}{3}\pi R_2^3 - \tfrac{4}{3}\pi R_1^3\right) \\ &= 0{,}005\tfrac{C}{m^3} \cdot \tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0{,}1m)^3 + -0{,}01\tfrac{C}{m^3} \cdot \left(\tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0{,}2m)^3 - \tfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0{,}1m)^3\right) \\ &= -2{,}723\times 10^{-4} C \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} E4\pi r^2 &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ E4\pi r^2 &= \frac{-2{,}723\times 10^{-4} C}{\varepsilon_0} \\ E \cdot 4\pi \cdot (0{,}25m)^2 &= \frac{-2{,}723\times 10^{-4} C}{8{,}854\times 10^{-12}\ \frac{C^2}{Nm^2}} \\ E &= -3{,}915\times 10^{7}\ \tfrac{N}{C} \end{aligned}$$

Comme la réponse est négative, on a un champ de 3,915 x 10^7 N/C vers le centre de la sphère.

19. a)

On va faire une surface cylindrique autour de la tige qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 2 cm et une longueur h. On a alors

$$E2\pi rh = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond seulement à la partie de la charge de la partie centrale de la tige qui est à l'intérieur de la surface de longueur h. Cette charge est

$$Q_{\text{int}} = \rho_1 \cdot (Vol)_{\text{int}}$$

(On va appeler ρ_1 la charge volumique de la partie centrale et ρ_2 la charge volumique de l'enveloppe.)

La charge est la charge à l'intérieur de la surface de Gauss d'un rayon de 2 cm. Elle est donc

$$\begin{aligned}
Q_{\text{int}} &= \rho_1 \cdot (Vol)_{\text{int}} \\
&= \rho_1 \cdot \pi r^2 h \\
&= 0,05 \tfrac{C}{m^3} \cdot \pi \cdot (0,02m)^2 \cdot h \\
&= 6,283 \times 10^{-5} \tfrac{C}{m} \cdot h
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
E2\pi rh &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\
E2\pi rh &= \frac{6,283 \times 10^{-5} \frac{C}{m} \cdot h}{\varepsilon_0} \\
E2\pi r &= \frac{6,283 \times 10^{-5} \frac{C}{m}}{\varepsilon_0} \\
E \cdot 2\pi \cdot 0,02m &= \frac{6,283 \times 10^{-5} \frac{C}{m}}{8,854 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}} \\
E &= 5,647 \times 10^{7} \tfrac{N}{C}
\end{aligned}$$

À cet endroit, on est dans un diélectrique. On doit donc diviser cette valeur du champ par la permittivité relative pour obtenir la véritable grandeur du champ. Le champ est donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{5,647\times 10^{7}\ \frac{N}{C}}{3} \\ &= 1,882\times 10^{7}\ \tfrac{N}{C} \end{aligned}$$

Comme la réponse est positive, le champ est dans la direction opposée au centre de la tige.

b) On va faire une surface cylindrique autour de la tige qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 8 cm et une longueur *h*. On a alors

$$E2\pi rh = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à toute la charge de la partie centrale de la tige qui est à l'intérieur de la surface de longueur *h* et a une partie de la charge de l'enveloppe à moins de 8 cm du centre de la tige. Cette charge est

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \rho_1 \cdot (Vol)_{\text{partie centrale}} + \rho_2 (Vol)_{\text{enveloppe à moins de 8 cm}} \\ &= \rho_1 \cdot \pi R_1^2 h + \rho_2 \cdot \left(\pi r^2 h - \pi R_1^2 h\right) \end{aligned}$$

Le volume de la deuxième partie correspond au volume d'un cylindre se terminant à la surface de Gauss auquel on enlève la partie centrale qui a une densité différente. On a alors

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \rho_1 \cdot \pi R_1^2 h + \rho_2 \cdot \left(\pi r^2 h - \pi R_1^2 h\right) \\ &= 0,05\tfrac{C}{m^3} \cdot \pi \cdot (0,04m)^2 \cdot h + -0,02\tfrac{C}{m^3} \cdot \left(\pi \cdot (0,08m)^2 \cdot h - \pi \cdot (0,04m)^2 \cdot h\right) \\ &= \left[0,05\tfrac{C}{m^3} \cdot \pi \cdot (0,04m)^2 + -0,02\tfrac{C}{m^3} \cdot \left(\pi \cdot (0,08m)^2 - \pi \cdot (0,04m)^2\right)\right] \cdot h \\ &= -5,027\times 10^{-5}\ \tfrac{C}{m} \cdot h \end{aligned}$$

On a donc

$$E2\pi rh = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$E2\pi rh = \frac{-5,027\times10^{-5}\,\frac{C}{m}\cdot h}{\varepsilon_0}$$

$$E2\pi r = \frac{-5,027\times10^{-5}\,\frac{C}{m}}{\varepsilon_0}$$

$$E\cdot 2\pi\cdot 0,08m = \frac{-5,027\times10^{-5}\,\frac{C}{m}}{8,854\times10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}}$$

$$E = -1,129\times10^{7}\,\tfrac{N}{C}$$

À cet endroit, on est dans un diélectrique. On doit donc diviser cette valeur du champ par la permittivité relative pour obtenir la véritable grandeur du champ. Le champ est donc

$$\begin{aligned}E &= \frac{-1,129\times10^{7}\,\frac{N}{C}}{9}\\ &= -1,255\times10^{6}\,\tfrac{N}{C}\end{aligned}$$

Comme la réponse est négative, on a un champ de 1,255 x 10^6 N/C vers le centre de la tige.

c) On va faire une surface cylindrique autour de la tige qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 12 cm et une longueur *h*. On a alors

$$E2\pi rh = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à toute la charge de la partie centrale de la tige qui est à l'intérieur de la surface de longueur *h* et à toute la charge de l'enveloppe qui est à l'intérieur de la surface de longueur *h*. Cette charge est

$$\begin{aligned}Q_{\text{int}} &= \rho_1\cdot(Vol)_{\text{partie centrale}} + \rho_2\,(Vol)_{\text{enveloppe}}\\ &= \rho_1\cdot\pi R_1^2 h + \rho_2\cdot\left(\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h\right)\end{aligned}$$

Le volume de la deuxième partie correspond au volume d'un cylindre auquel on enlève la partie centrale qui a une densité différente. On a alors

$$\begin{aligned}Q_{\text{int}} &= \rho_1 \cdot \pi R_1^2 h + \rho_2 \cdot \left(\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h\right) \\ &= 0{,}05\tfrac{C}{m^3} \cdot \pi \cdot (0{,}04m)^2 \cdot h + -0{,}02\tfrac{C}{m^3} \cdot \left(\pi \cdot (0{,}10m)^2 \cdot h - \pi \cdot (0{,}04m)^2 \cdot h\right) \\ &= \left[0{,}05\tfrac{C}{m^3} \cdot \pi \cdot (0{,}04m)^2 + -0{,}02\tfrac{C}{m^3} \cdot \left(\pi \cdot (0{,}10m)^2 - \pi \cdot (0{,}04m)^2\right)\right] \cdot h \\ &= -2{,}765 \times 10^{-4}\tfrac{C}{m} \cdot h\end{aligned}$$

On a donc

$$E 2\pi r h = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$E 2\pi r h = \frac{-2{,}765 \times 10^{-4}\tfrac{C}{m} \cdot h}{\varepsilon_0}$$

$$E 2\pi r = \frac{-2{,}765 \times 10^{-4}\tfrac{C}{m}}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 2\pi \cdot 0{,}12m = \frac{-2{,}765 \times 10^{-4}\tfrac{C}{m}}{8{,}854 \times 10^{-12}\tfrac{C^2}{Nm^2}}$$

$$E = -4{,}141 \times 10^{7}\tfrac{N}{C}$$

Comme la réponse est négative, on a un champ de $4{,}141 \times 10^7$ N/C vers le centre de la tige.

20. On va faire une surface cylindrique autour de la tige qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de *r* et une longueur *h*. On a alors

$$E 2\pi r h = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond seulement à la partie de la charge de la tige centrale qui est à l'intérieur de la surface de longueur *h*. Cette charge est

$$Q_{\text{int}} = \lambda_1 h$$

(On va appeler λ_1 la charge linéique de la tige centrale et λ_2 la charge linéique de l'enveloppe.)

On a donc

$$E2\pi rh = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$
$$E2\pi rh = \frac{\lambda_1 h}{\varepsilon_0}$$
$$E2\pi r = \frac{\lambda_1}{\varepsilon_0}$$
$$E = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

21. La densité surfacique de charge de la sphère est

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{Q}{4\pi R^2}\\ &= \frac{50\times10^{-6}C}{4\cdot\pi\cdot(0,25m)^2}\\ &= 6,366\times10^{-5}\,\tfrac{C}{m^2}\end{aligned}$$

Le champ est donc

$$\begin{aligned}E &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\\ &= \frac{6,366\times10^{-5}\,\tfrac{C}{m^2}}{8,854\times10^{-12}\,\tfrac{C^2}{Nm^2}}\\ &= 7,19\times10^{6}\,\tfrac{N}{C}\end{aligned}$$

22. On trouve la densité de charge avec

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$
$$200\,000\,\tfrac{N}{C} = \frac{\sigma}{8,854\times10^{-12}\,\tfrac{C^2}{Nm^2}}$$
$$\sigma = 1,771\times10^{-6}\,\tfrac{C}{m^2}$$

23. a) On trouve le champ avec le théorème de Gauss

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

On doit trouver la charge à l'intérieur. Cela demande de faire une intégrale puisque la densité varie avec la distance.

Pour faire l'intégrale, on sépare la sphère en coquilles sphériques minces. Comme le volume d'une mince coquille de rayon x est

$$\begin{aligned} dV &= surface \cdot épaisseur \\ &= 4\pi x^2 dx \end{aligned}$$

la charge de la coquille est

$$\begin{aligned} dQ &= densité \cdot dV \\ &= \rho_0 \left(1 - \tfrac{x}{R}\right) \cdot 4\pi x^2 dx \end{aligned}$$

La charge à l'intérieur d'une sphère de rayon r est donc

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \int_0^r \rho_0 \left(1 - \tfrac{x}{R}\right) \cdot 4\pi x^2 dx \\ &= \rho_0 4\pi \int_0^r \left(1 - \tfrac{x}{R}\right) \cdot x^2 dx \\ &= \rho_0 4\pi \int_0^r \left(x^2 - \tfrac{x^3}{R}\right) dx \\ &= \rho_0 4\pi \left[\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4R}\right]_0^r \\ &= \rho_0 4\pi \left(\tfrac{r^3}{3} - \tfrac{r^4}{4R}\right) \end{aligned}$$

Le champ est donc

$$\begin{aligned} E4\pi r^2 &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ E4\pi r^2 &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_0 4\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right) \\ E &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_0 \left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R}\right) \end{aligned}$$

Mais comme on est dans une substance de permittivité κ, le champ est

$$E = \frac{1}{\kappa\varepsilon_0}\rho_0\left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R}\right)$$

b) On trouve encore le champ avec le théorème de Gauss

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Cette fois-ci, il faut calculer la charge de toute la sphère en intégrant jusqu'à *R*.

$$\begin{aligned}
Q_{\text{int}} &= \int_0^R \rho_0\left(1 - \tfrac{x}{R}\right)\cdot 4\pi x^2 dx \\
&= \rho_0 4\pi \int_0^R \left(1 - \tfrac{x}{R}\right)\cdot x^2 dx \\
&= \rho_0 4\pi \int_0^R \left(x^2 - \tfrac{x^3}{R}\right) dx \\
&= \rho_0 4\pi \left[\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4R}\right]_0^R \\
&= \rho_0 4\pi \left(\tfrac{R^3}{3} - \tfrac{R^4}{4R}\right) \\
&= \rho_0 4\pi R^3 \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) \\
&= \tfrac{1}{12}\rho_0 4\pi R^3
\end{aligned}$$

Le champ est donc

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$E4\pi r^2 = \frac{1}{12\varepsilon_0}\rho_0 4\pi R^3$$

$$E = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}$$

c) Quand le champ est maximal, on a

$$\frac{dE}{dr} = 0$$

On a donc

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\kappa\varepsilon_0}\rho_0\left(\frac{r}{3}-\frac{r^2}{4R}\right)\right)=0$$

$$\frac{1}{\kappa\varepsilon_0}\rho_0\left(\frac{1}{3}-\frac{2r}{4R}\right)=0$$

$$\frac{1}{3}=\frac{2r}{4R}$$

$$r=\frac{2R}{3}$$