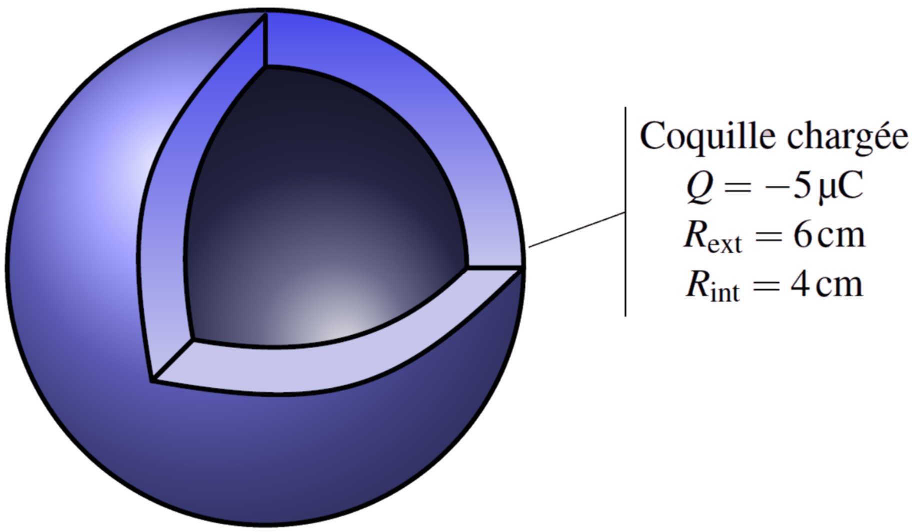
3 LE THÉORÈME DE GAUSS

Une sphère vide a un rayon externe de 6 cm, un rayon interne de 4 cm et une charge de -5 µC. La charge est répartie uniformément dans la matière composant la sphère. Quel est le champ électrique à 5 cm du centre de la sphère (grandeur et direction) ?

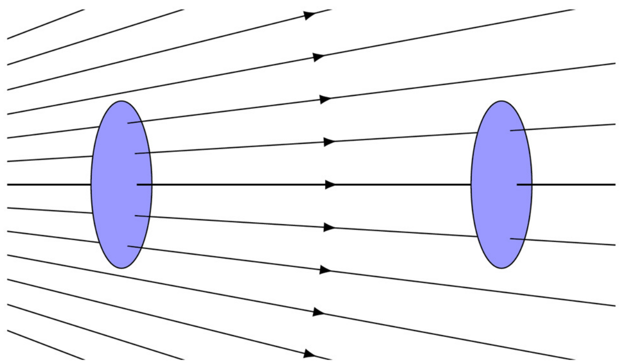


Découvrez comment résoudre ce problème dans ce chapitre.

Dans ce chapitre, on va découvrir une façon simple de calculer le champ électrique quand il y a symétrie sphérique ou cylindrique. Pour y arriver, on va définir un nouveau concept : le flux électrique.

3.1 LE FLUX ÉLECTRIQUE

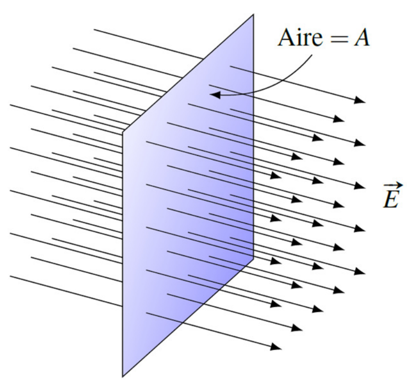
Avec le flux électrique, on va compter le nombre de lignes de champ qui traversent une surface. La surface peut être une véritable surface matérielle, mais, très souvent, elle est simplement une surface qu'on imagine dans l'espace. On l'appelle alors *surface de Gauss*. Par exemple, dans la situation suivante, on peut calculer le flux traversant chacune de ces surfaces circulaires (ce sont des cercles vus en perspective). Le flux à travers la surface de gauche est plus grand que le flux à travers la surface de droite puisqu'il y a plus de lignes de champ qui traversent la surface de gauche.



Le terme *flux* s'applique généralement à l'écoulement d'un fluide. En fait, l'utilisation de ce terme en électricité n'est pas tellement surprenante quand on se rappelle qu'à l'époque où on inventa le concept de flux (au début du 19e siècle), on considérait généralement que l'électricité était un fluide pouvant s'écouler d'un objet à un autre.

Précisons maintenant comment on va calculer ce flux. Commençons par une situation simple et on la compliquera par la suite.

Champ uniforme et surface perpendiculaire au champ



Le flux à travers une surface dans cette situation est

$$\phi_E = EA$$

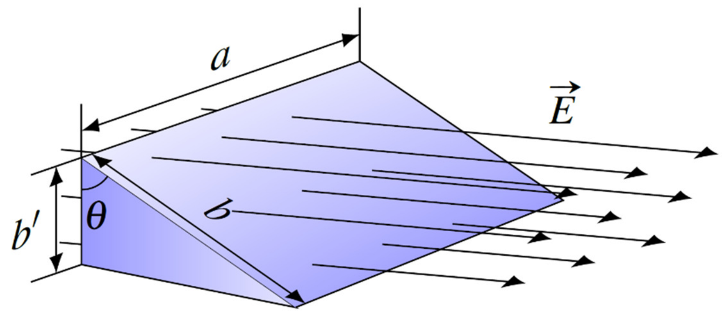
Les unités du flux sont des Nm²/C.

Comme la grandeur du champ est proportionnelle à la densité de ligne (nombre de lignes par m²), cela signifie que

Le flux est proportionnel au nombre de lignes de champ qui traversent la surface.

Champ uniforme et surface non perpendiculaire au champ

Si la surface n'est pas perpendiculaire, on peut trouver le flux par l'astuce suivante.



Puisque le flux compte le nombre de lignes de champ, le flux à travers la surface inclinée (a par b) est le même que le flux à travers la surface verticale (a par b'). En effet, chaque ligne de champ qui traverse la surface verticale va par la suite traverser la surface inclinée, ce qui fait qu'il y a le même nombre de lignes qui traversent les deux surfaces. Le flux traversant la surface verticale (aire A') est

$$\phi_E = EA'$$
$$\phi_E = E(ab')$$

Or, puisque

$$\frac{b'}{b} = \cos\theta$$

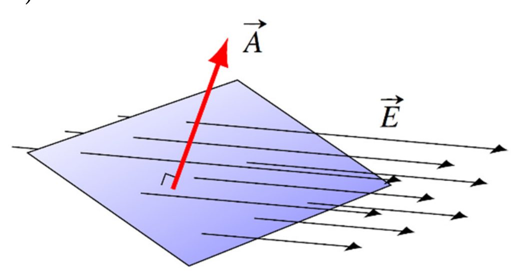
on a

$$\phi_E = E(ab')$$
$$\phi_E = E(ab\cos\theta)$$

Comme l'aire de la surface inclinée (A) est $a \cdot b$, on a

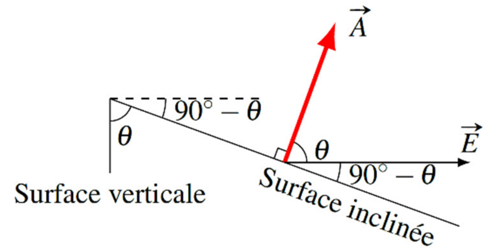
$$\phi_E = E(ab\cos\theta)$$
$$\phi_E = E(A\cos\theta)$$

C'est le flux à travers la surface inclinée. En fait, on peut arranger ceci pour plaire davantage aux mathématiciens qui ont défini le vecteur aire d'une surface comme étant un vecteur perpendiculaire à la surface.



(Vous remarquez peut-être déjà qu'il y a deux possibilités pour ce vecteur : un de chaque côté de la surface. Nous pourrons clarifier cette situation un peu plus tard.)

L'angle entre ce vecteur A et le vecteur champ électrique qui traverse la surface est aussi θ, l'angle qu'il y a est les deux surfaces, comme on peut le voir sur cette figure (où on voit les surfaces de côté).



Le flux est donc le produit de la grandeur du vecteur E, de la grandeur du vecteur A et du cosinus de l'angle entre les deux. Vous devriez reconnaitre le produit scalaire des vecteurs E et A.

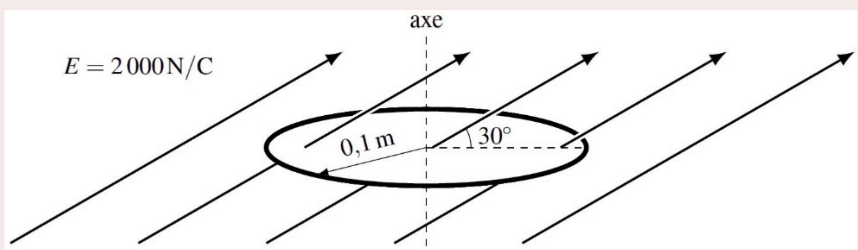
Le flux électrique dans le cas d'une surface inclinée est donc

$$\phi_E = EA\cos\theta = \vec{E}\cdot\vec{A}$$

où θ est l'angle entre le champ électrique et le vecteur représentant la surface.

Exemple 3.1.1

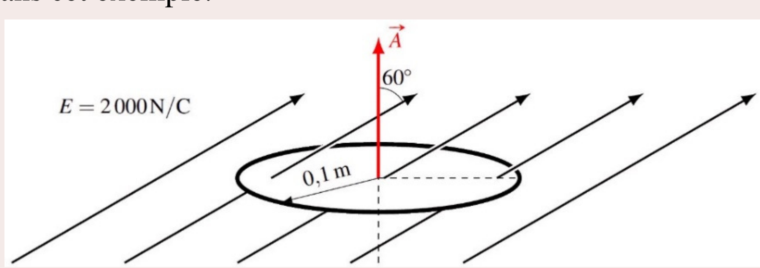
Quel est le flux passant dans la surface délimitée par l'anneau dans la situation suivante ?



Le flux est

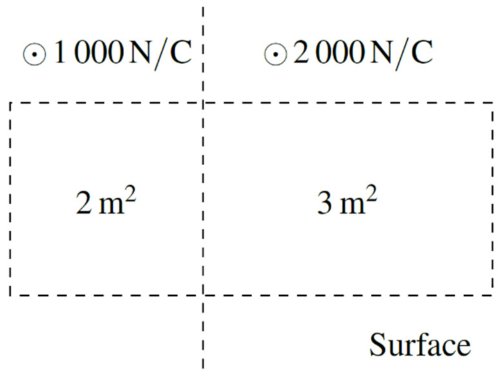
$$\begin{aligned}\phi_E &= EA\cos\theta \\ &= 2000\tfrac{N}{C}\cdot\pi\cdot(0{,}1m)^2\cdot\cos 60° \\ &= 31{,}42\tfrac{Nm^2}{C}\end{aligned}$$

Rappelez-vous que θ est l'angle entre le champ et le vecteur A et que ce vecteur est dans une direction perpendiculaire à la surface, donc dans la direction de l'axe de l'anneau dans cet exemple.



Champ non uniforme et surface non perpendiculaire au champ

Examinons ce qui arrive si on calcule le flux à travers une surface et que la grandeur du champ n'est pas partout la même. Imaginons donc la situation montrée à droite.



Le champ (sortant de la page) passe donc de 1000 N/C à 2000 N/C. La ligne pointillée verticale est la frontière entre ces deux régions. On va calculer le flux à travers la surface rectangulaire en pointillé.

On ne peut pas calculer le flux d'un seul coup, mais en peut le faire en séparant la surface de Gauss en deux régions où le champ est uniforme : la région de gauche (région 1) ayant une aire de 2 m² et la région de droite (région 2) ayant une aire de 3 m². Le flux total est simplement la somme des flux dans chaque région.

$$\begin{aligned}\phi_E &= \phi_{E1} + \phi_{E2} \\ &= E_1 A_1 \cos\theta_1 + E_2 A_2 \cos\theta_2\end{aligned}$$

La surface étant dans le plan de la page, le vecteur A de chacune des régions est un vecteur sortant de la page. Ces vecteurs sont dans la même direction que le champ électrique et les angles sont nuls. On a donc

$$\begin{aligned}\phi_E &= E_1 A_1 \cos\theta_1 + E_2 A_2 \cos\theta_2 \\ &= 1000 \tfrac{N}{C} \cdot 2m^2 \cdot \cos 0° + 2000 \tfrac{N}{C} \cdot 3m^2 \cdot \cos 0° \\ &= 2000 \tfrac{Nm^2}{C} + 6000 \tfrac{Nm^2}{C} \\ &= 8000 \tfrac{Nm^2}{C}\end{aligned}$$

Ainsi, si le champ varie, on sépare la surface en région où le champ est uniforme, on calcule le flux de chacune de ces régions et on somme le tout pour obtenir le flux total. Notez qu'il faut aussi séparer en région si l'angle entre le champ électrique E et l'aire A change.

Le flux électrique

$$\phi_E = \sum EA\cos\theta = \sum \vec{E} \cdot \vec{A}$$

On sépare en régions où E est uniforme et θ est constant.

On appelle parfois cette somme le *flux électrique net*.

Si E ou θ changent continuellement d'un endroit à l'autre, il n'y aura pas de régions où E et θ sont uniformes. Il faudrait alors séparer la surface en régions très petites, tellement petites qu'elles auront une taille infinitésimale dont l'aire est dA. Comme la surface est très petite, E *et* θ seront uniformes et on peut alors calculer le flux la traversant avec $E\ dA\ cos\ \theta$. Ensuite, on somme pour obtenir

Le flux électrique

$$\phi_E = \int E\cos\theta dA = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

Ces deux derniers encadrés verts sont tout à fait équivalents. L'équation avec l'intégrale peut vous effrayer, mais rassurez-vous, nous n'aurons jamais à la faire. Il s'agit d'une intégrale de surface, un type d'intégrale que vous retrouverez à l'université si vous faites un bac où il y a des mathématiques.

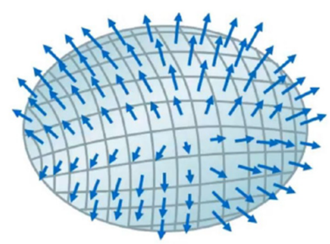
Flux à travers une surface fermée

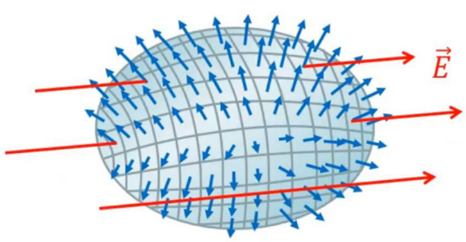
En électricité, on obtient des résultats intéressants quand on calcule le flux à travers une surface de Gauss fermée, c'est-à-dire une surface qui se referme sur elle-même sans laisser de trou. Ce pourrait être, par exemple, la surface d'une sphère ou la surface d'un cube.

Il existe une notation spéciale avec l'intégrale de surface pour indiquer qu'on intègre sur une surface fermée. Cette notation est

$$\phi_E = \oint E\cos\theta dA = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

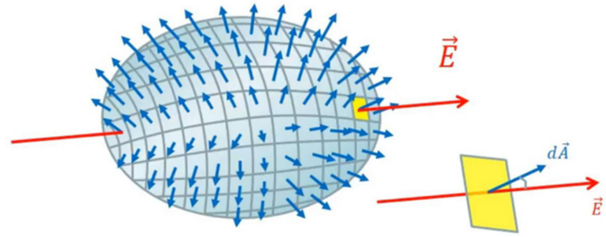
Avec une surface fermée, on peut aussi éliminer le problème des deux vecteurs A possibles pour une surface en imposant la règle suivante : On prend toujours le vecteur A qui pointe vers l'extérieur de la surface fermée. La figure de droite montre ce vecteur A pour différentes parties d'une surface fermée.

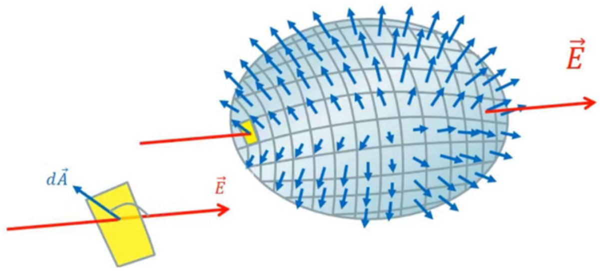




Imaginons maintenant qu'on calcule le flux à travers cette surface s'il y a un champ électrique.

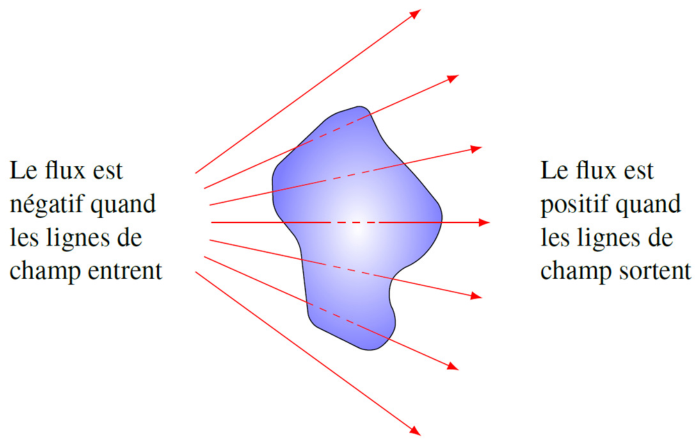
À droite de la surface, il y a des lignes de champ qui sortent de la surface fermée. Dans ce cas, il y aura un flux positif puisque l'angle entre le champ électrique et le vecteur A sera nécessairement inférieur à 90°, ce qui donnera une valeur positive au cosinus.





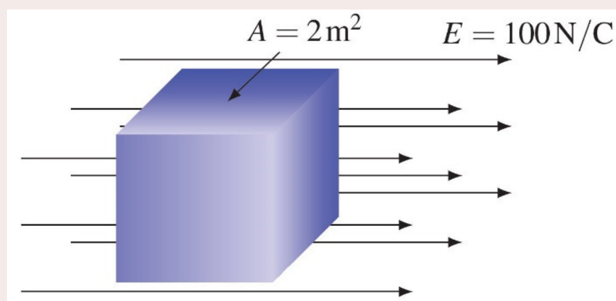
À gauche de la surface, il y a des lignes de champ qui entrent dans la surface fermée. Dans ce cas, il y aura un flux négatif puisque l'angle entre le champ électrique et le vecteur A sera nécessairement entre 90° et 180°, ce qui donnera une valeur négative au cosinus.

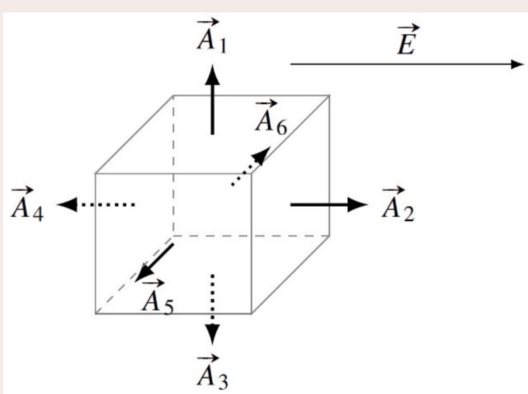
On arrive donc à la conclusion suivante.



Exemple 3.1.2

Voici une surface de Gauss en forme de cube dans un champ électrique uniforme. Quel est le flux traversant cette surface ? (2 m² est l'aire de chaque côté du cube.)





Bien que le champ soit uniforme, on doit séparer ce cube en 6 régions, car l'angle entre le champ et la surface est différent pour chaque face. Calculons le flux à travers chaque face et on fera ensuite la somme des flux. La figure suivante indique la direction des vecteurs A pour chaque face du cube.

Surface 1 : Dessus

Le vecteur A est vers le haut et le champ est vers la droite. Il y a donc 90° entre A et E

$$\begin{aligned}\phi_1 &= EA_1 \cos\theta_1 \\ &= 100\tfrac{N}{c}\cdot 2m^2 \cdot \cos 90° \\ &= 0\end{aligned}$$

On peut aussi voir qu'il n'y a pas de flux, car les lignes de champ longent la surface, mais ne la traversent pas.

Surface 2 : côté droit

Le vecteur *A* est vers la droite et le champ est vers la droite. Il y a donc 0° entre *A* et *E*.

$$\begin{aligned}\phi_2 &= EA_2 \cos\theta_2 \\ &= 100\tfrac{N}{c}\cdot 2m^2 \cdot \cos 0° \\ &= 200\tfrac{Nm^2}{C}\end{aligned}$$

On peut aussi voir que le flux est positif, car les lignes de champ sortent du cube sur cette surface.

Surface 3 : Dessous

Le vecteur *A* est vers le bas et le champ est vers la droite. Il y a donc 90° entre *A* et *E*.

$$\begin{aligned}\phi_3 &= EA_3 \cos\theta_3 \\ &= 100\tfrac{N}{c}\cdot 2m^2 \cdot \cos 90° \\ &= 0\end{aligned}$$

On peut aussi voir qu'il n'y a pas de flux, car les lignes de champ longent la surface, mais ne la traversent pas.

Surface 4 : Côté gauche

Le vecteur *A* est vers la gauche et le champ est vers la droite. Il y a donc 180° entre *A* et *E*.

$$\begin{aligned}\phi_4 &= EA_4 \cos\theta_4 \\ &= 100\tfrac{N}{c}\cdot 2m^2 \cdot \cos 180° \\ &= -200\tfrac{Nm^2}{C}\end{aligned}$$

On peut aussi voir que le flux est négatif, car les lignes de champ entrent dans le cube sur cette surface.

Surface 5 : Devant

Le vecteur *A* sort de la page et le champ est vers la droite. Il y a donc 90° entre *A* et *E*.

$$\begin{aligned}\phi_5 &= EA_5 \cos\theta_5 \\ &= 100\tfrac{N}{c} \cdot 2m^2 \cdot \cos 90° \\ &= 0\end{aligned}$$

On peut aussi voir qu'il n'y a pas de flux, car les lignes de champ longent la surface, mais ne la traversent pas

Surface 6 : Derrière

Le vecteur *A* entre dans la page et le champ est vers la droite. Il y a donc 90° entre *A* et *E*.

$$\begin{aligned}\phi_6 &= EA_6 \cos\theta_6 \\ &= 100\tfrac{N}{c} \cdot 2m^2 \cdot \cos 90° \\ &= 0\end{aligned}$$

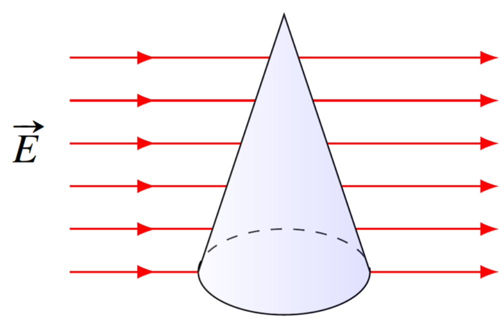
On peut aussi voir qu'il n'y a pas de flux, car les lignes de champ longent la surface, mais ne la traversent pas.

Flux total

Le flux total est donc

$$\begin{aligned}\phi_{net} &= \sum \phi \\ &= 0\tfrac{Nm^2}{C} + 200\tfrac{Nm^2}{C} + 0\tfrac{Nm^2}{C} - 200\tfrac{Nm^2}{C} + 0\tfrac{Nm^2}{C} + 0\tfrac{Nm^2}{C} \\ &= 0\tfrac{Nm^2}{C}\end{aligned}$$

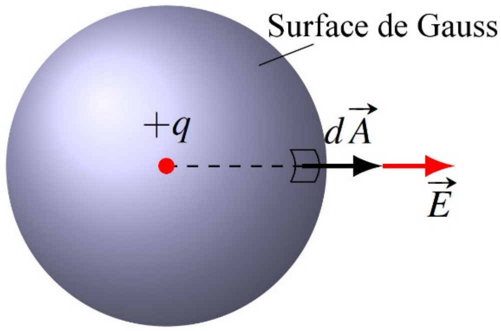
Ce résultat n'est pas tellement surprenant puisqu'il est assez évident qu'il y a autant de lignes qui entrent qu'il y en a qui sortent de cette surface cubique. En fait, avec un tel raisonnement, on peut facilement savoir que le flux à travers la surface de Gauss montrée à droite est aussi nul, car il y a autant de lignes de champ qui entrent qu'il y en a qui sortent de la surface.



Le flux pour deux cas symétriques importants

Symétrie sphérique

Dans les cas où la charge est distribuée avec une symétrie sphérique, on peut faire une formule donnant le flux traversant une surface sphérique. On a alors la situation suivante.



(On a mis ici une simple charge au centre, mais on pourrait avoir des charges réparties sur une sphère plus grande. Il pourrait même y avoir des charges à l'extérieur de notre surface. L'important c'est qu'il y ait symétrie sphérique, donc que les charges soient distribuées de la même façon dans toutes les directions à partir du centre de notre surface.)

Prenons un petit morceau de la surface de Gauss dont l'aire est *dA*. Le flux à travers ce petit morceau de surface est

$$d\phi_E = E(dA)\cos\theta$$

La grandeur du champ électrique est identique partout sur la surface de la sphère. En effet, s'il y a symétrie sphérique, c'est que tout est identique dans toutes les directions, ce qui inclut bien sûr la grandeur du champ électrique.

Le champ est toujours perpendiculaire à la surface de la sphère (vers l'intérieur ou l'extérieur), car il n'y a pas de raison pour qu'il soit incliné d'un côté ou de l'autre puisqu'il y a symétrie dans toutes les directions. Si le vecteur était incliné d'un côté, c'est qu'il y aurait quelque chose de différent dans cette direction et alors il n'y aurait pas de symétrie sphérique. Le vecteur surface *dA* est aussi, par définition, toujours perpendiculaire à la surface. L'angle entre le champ et l'aire *dA* sera donc toujours le même (0° si le champ est vers l'extérieur ou 180° si le champ est vers l'intérieur).

Puisque le champ électrique *E* et l'angle θ sont toujours les mêmes partout sur la surface de Gauss, il n'est pas nécessaire de la séparer en régions et on peut calculer le flux d'un seul coup. On a donc

$$\begin{aligned}\phi_E &= EA\cos\theta \\ &= E4\pi r^2\cos\theta\end{aligned}$$

puisque l'aire d'une sphère est $4\pi r^2$.

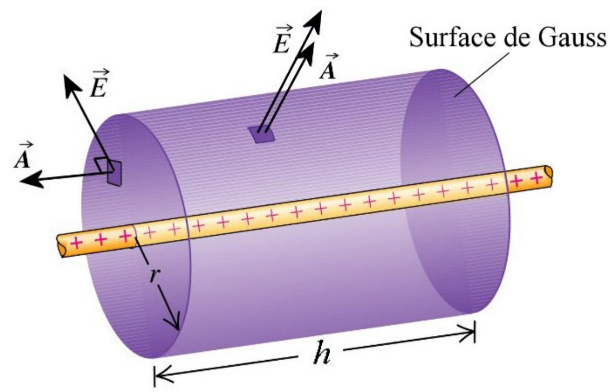
Pour l'angle, on a cos 0° = 1 ou cos 180° = -1. En fait, plutôt que de garder le cosinus, on va utiliser plutôt la règle suivante : le champ sera positif s'il est vers l'extérieur de la sphère (ce qui donnera une valeur positive au flux, comme on doit avoir avec cos 0°) et le champ est négatif s'il est vers l'intérieur de la sphère (ce qui donnera une valeur négative au flux, comme on doit avoir avec cos 180°). On a alors

Le flux électrique avec symétrie sphérique

$$\phi_E = E4\pi r^2$$

E est positif s'il est vers l'extérieur de la sphère.
E est négatif s'il est vers l'intérieur de la sphère.

Symétrie cylindrique



www.physics.sjsu.edu/becker/physics51/e_and_v.htm

Dans les cas où la charge est distribuée avec une symétrie cylindrique, on peut faire une formule donnant le flux traversant une surface cylindrique. On a alors la situation montrée à droite.

(On a mis ici une tige chargée au centre du cylindre, mais on pourrait avoir des charges réparties sur un cylindre plus grand. Il pourrait même y avoir des charges à l'extérieur de notre surface. L'important c'est qu'il y ait symétrie cylindrique, donc que les charges soient distribuées de la même façon dans toutes les directions à partir de l'axe de notre surface de Gauss.)

On va séparer cette surface en trois parties : le tour du cylindre et les deux bouts. Le flux traversant la surface sera donc

$$\phi_E = \phi_{\text{tour}} + \phi_{\text{bout 1}} + \phi_{\text{bout 2}}$$

Sur le tour de la surface cylindrique, la grandeur du champ électrique est identique partout. En effet, s'il y a symétrie cylindrique, c'est que tout est identique dans toutes les directions à partir de l'axe, ce qui inclut bien sûr la grandeur du champ électrique. Le champ est toujours perpendiculaire à la surface du cylindre (vers l'intérieur ou l'extérieur). Il doit être perpendiculaire, car il n'y a pas de raison pour qu'il soit incliné d'un côté ou de l'autre puisqu'il y a symétrie dans toutes les directions. Si le vecteur était incliné d'un côté, c'est qu'il y aurait quelque chose de différent dans cette direction et il n'y aurait pas de symétrie cylindrique. Comme le vecteur aire A est aussi toujours perpendiculaire à la surface, l'angle entre le champ et l'aire A sera donc toujours le même (0° si le champ est vers l'extérieur ou 180° si le champ est vers l'intérieur). Puisque le champ électrique E et l'angle θ sont toujours les mêmes partout sur la surface de Gauss, il n'est pas nécessaire de la séparer en régions et on peut calculer le flux d'un seul coup. On a donc

$$\begin{aligned}\phi_{\text{tour}} &= EA\cos\theta \\ &= E2\pi rh\cos\theta\end{aligned}$$

puisque l'aire du tour du cylindre est $A = 2\pi rh$.

Pour l'angle, on va utiliser la même règle qu'avec la symétrie sphérique : E est positif s'il est vers l'extérieur du cylindre et E est négatif s'il est vers l'intérieur du cylindre. On obtient alors

$$\phi_{tour} = E2\pi rh$$

Sur les bouts de la surface cylindrique, l'angle est toujours de 90° entre le vecteur A et le champ électrique. En effet, le vecteur A pointe dans la direction de l'axe alors que le champ doit être perpendiculaire à l'axe. On a donc

$$\begin{aligned}\phi_{\text{bouts}} &= \sum EA\cos 90° \\ &= \cos 90° \sum EA \\ &= 0\end{aligned}$$

puisque cos 90° = 0.

Le flux total est donc

$$\begin{aligned}\phi_E &= \phi_{\text{tour}} + \phi_{\text{bout 1}} + \phi_{\text{bout 2}} \\ &= E2\pi rh + 0 + 0\end{aligned}$$

Ce qui nous donne

Le flux électrique avec symétrie cylindrique

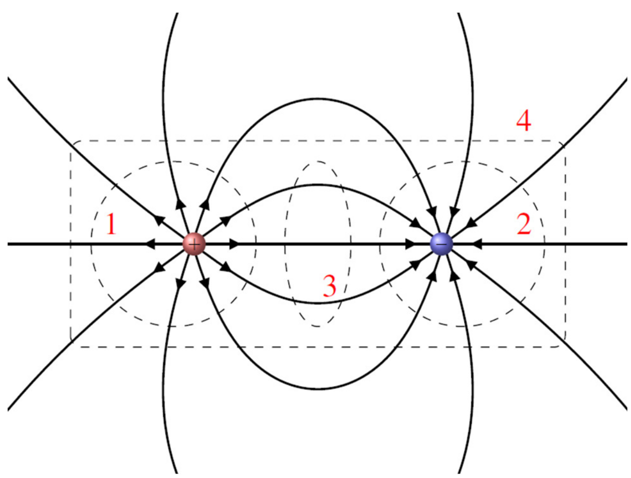
$$\phi_E = E2\pi rh$$

E est positif s'il est vers l'extérieur du cylindre.
E est négatif s'il est vers l'intérieur du cylindre.

3.2 LE THÉORÈME DE GAUSS

Le flux dépend de la charge à l'intérieur de la surface

La valeur du flux est aussi liée à la charge à l'intérieur de la surface. L'image suivante devrait vous en convaincre.



Il y a 4 surfaces sur cette image (en pointillée). Examinons le flux traversant chacune de ces surfaces.

Surface 1 : Le flux à travers cette surface est positif (car il n'y a que des lignes de champs qui sortent) et la charge à l'intérieur de la surface est positive.

Surface 2 : Le flux à travers cette surface est négatif (car il n'y a que des lignes de champ qui entrent) et la charge à l'intérieur de la surface est négative.

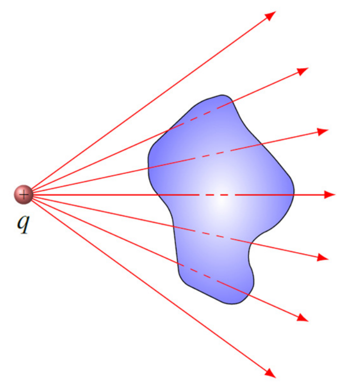
Surface 3 : Le flux à travers cette surface est nul (car il a autant de lignes de champ qui entrent qu'il y en a qui sortent) et la charge à l'intérieur est nulle.

Surface 4 : Le flux à travers cette surface est nul (car il a autant de lignes de champ qui entrent qu'il y en a qui sortent) et la charge nette à l'intérieur est nulle.

On semble donc voir le lien suivant

$$\phi_E \propto Q_{\text{int}}$$

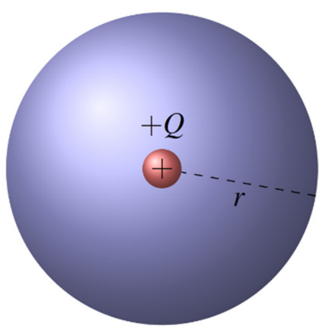
où Q_{int} est la charge nette à l'intérieur de la surface.



Les charges à l'extérieur de la surface ne font pas de flux. En effet, sur la figure de gauche, on voit que toutes les lignes de champ qui entrent dans la surface devront ressortir, ce qui signifie que le flux à travers la surface est nul.

Pour préciser davantage la valeur du flux, nous allons calculer le flux entourant une charge positive ponctuelle.

De toute évidence, il y a symétrie sphérique autour d'une charge ponctuelle. On va donc imaginer une surface de Gauss sphérique autour de la charge ponctuelle et calculer le flux qui traverse cette surface.



Avec symétrie sphérique, le flux est

$$\phi_E = E 4\pi r^2$$

Puisque le champ à une distance r est

$$E = \frac{kQ_{\text{int}}}{r^2}$$

(on a mis l'indice *int,* car on sait que cette charge est à l'intérieur), on a

$$\phi_E = \frac{kQ_{\text{int}}}{r^2} 4\pi r^2$$

On obtient alors

Le flux électrique à travers une surface fermée

$$\phi_E = 4\pi k Q_{\text{int}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

(Voici une meilleure preuve de ce résultat :http://physique.merici.ca/electricite/Gauss.pdf)

Si cette équation est vraie pour une charge ponctuelle, elle doit aussi être vraie pour n'importe quelle charge puisque cette dernière doit être composée de charges ponctuelles. Cela confirme bien nos soupçons que ce flux est proportionnel à la charge à l'intérieur de la surface.

Démonstration que les lignes de champ n'apparaissent pas ou ne disparaissent pas dans le vide

Cette démonstration nous donne également la preuve d'une autre propriété donnée auparavant. On avait dit que les lignes de champs n'apparaissent ou ne disparaissent pas dans le vide. On remarque que le flux autour d'une charge ponctuelle est indépendant de r (puisque les r^2 se sont annulés). Cela veut dire que le nombre de lignes de champ autour de la charge ponctuelle est toujours le même, peu importe la distance qu'on est de la charge. (Rappelez-vous que quand on calcule le flux, on calcule le nombre de lignes de champ.) S'il y a toujours le même nombre de lignes de champ, c'est qu'il n'y en a aucune qui apparait ou disparait. Et si c'est vrai pour une charge ponctuelle, c'est vrai pour toutes les charges puisque toutes les charges sont composées de charges ponctuelles.

Le théorème de Gauss

On a donc deux façons de calculer le flux à travers une surface fermée. La première façon est

$$\phi_E = \sum EA\cos\theta$$

ou

$$\phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

La deuxième façon est

$$\phi_E = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

En combinant les deux façons, on obtient le théorème de Gauss.

Théorème de Gauss (première équation de Maxwell)

$$\sum EA\cos\theta = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

ou

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Cette équation est considérée comme l'une des 5 équations fondamentales de l'électromagnétisme. La loi de Coulomb est simplement un cas particulier de cette loi et de $F = qE$. Vous voyez que cette équation est plus simple avec ε_0, ce qui fait que c'est cette constante qui est considérée comme étant fondamentale, plutôt que k.

Cette équation fut découverte par Joseph-Louis Lagrange en 1764 (il l'appliquait en fait à la gravitation) et fut redécouverte en 1813 par Carl Friedrich Gauss.

Application pour trouver le champ quand il y a symétrie sphérique ou cylindrique

L'intérêt du théorème de Gauss ici, c'est qu'il nous permettra de calculer le champ électrique dans les situations où il y a symétrie sphérique ou cylindrique. Avec nos résultats précédents sur le flux dans ces situations, on obtient les formules suivantes.

Théorème de Gauss avec symétrie sphérique

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

E est positif s'il est vers l'extérieur de la sphère.
E est négatif s'il est vers l'intérieur de la sphère.

Théorème de Gauss avec symétrie cylindrique

$$E 2\pi r h = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

E est positif s'il est vers l'extérieur du cylindre.
E est négatif s'il est vers l'intérieur du cylindre.

Voici comment trouver le champ électrique s'il y a symétrie sphérique ou cylindrique.

1) Identifier si on a une symétrie sphérique ou cylindrique et choisir l'équation du théorème de Gauss selon la situation.
2) Imaginer une surface de Gauss passant par l'endroit où on veut connaitre le champ.
3) Déterminer la quantité de charge à l'intérieur de la surface de Gauss.
4) Isoler E dans l'équation du théorème de Gauss. Le signe de E vous donnera la direction du champ.

La troisième étape est l'étape cruciale. Bien que ce soit parfois très facile de déterminer la charge à l'intérieur de la surface de Gauss dans beaucoup de situations, c'est un peu plus difficile dans d'autres situations. Les exemples suivants vous illustreront comment procéder dans ces situations.

Notez que le *r* dans les équations du théorème de Gauss avec symétrie sphérique ou cylindrique est toujours la dimension de la surface de Gauss, et non pas la dimension de l'objet chargé.

Exemples avec des isolants

Dans ce cas, il ne faut pas oublier de diviser le champ obtenu par la permittivité relative de la substance si on demande le champ électrique à un endroit qui est à l'intérieur d'un diélectrique.

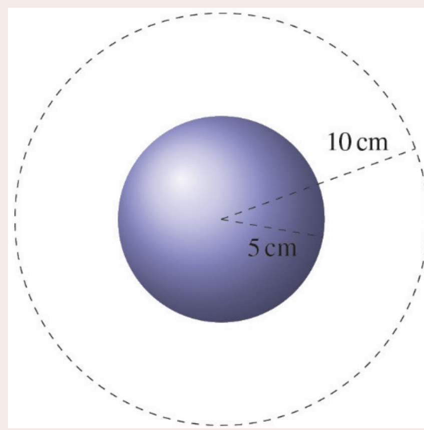
Exemple 3.2.1

Une sphère pleine a un rayon de 5 cm et une charge de 5 µC. La charge est répartie uniformément dans la sphère.

a) Quel est le champ électrique à 10 cm du centre de la sphère (grandeur et direction) ?

Puisqu'il y a symétrie sphérique, le théorème de Gauss est

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

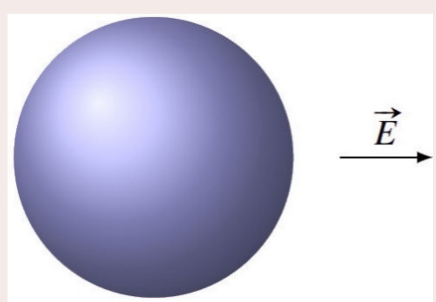


Si on veut connaitre le champ à 10 cm du centre de la sphère chargée, on doit imaginer une sphère de Gauss (pointillée) qui est à 10 cm du centre de la sphère. Comme la sphère chargée n'a qu'un rayon de 5 cm, elle se retrouve complètement à l'intérieur de la surface de Gauss et la charge à l'intérieur de la surface de Gauss est donc la charge totale de la sphère (5 µC). On a donc

$$E \cdot 4\pi \cdot (0{,}1m)^2 = \frac{5\times 10^{-6} C}{8{,}854\times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}}$$

Si on isole *E*, on obtient

$$E = 4{,}49\times 10^{6} \tfrac{N}{C}$$

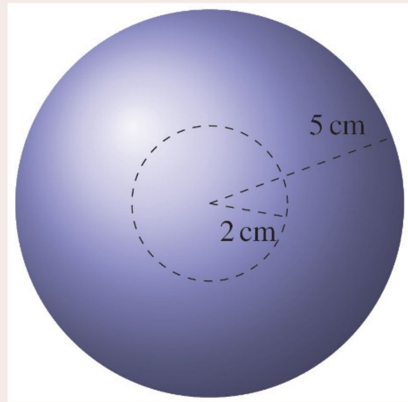


Comme la réponse est positive, le champ est vers l'extérieur de la surface de Gauss, donc dans la direction opposée à la sphère.

b) Quel est le champ électrique à 2 cm du centre de la sphère (grandeur et direction) si la permittivité relative de la substance est de 4 ?

Puisqu'il y a symétrie sphérique, le théorème de Gauss est

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$



Si on veut connaitre le champ à 2 cm du centre de la sphère, on doit imaginer une sphère de Gauss qui est à 2 cm du centre de la sphère. Comme la sphère chargée a un rayon de 5 cm, il n'y a qu'une partie de sphère chargée qui se retrouve l'intérieur de la surface de Gauss. Pour trouver la quantité de charge, on commence par trouver la charge volumique de la sphère. Cette densité de charge est

$$\rho = \frac{\text{charge}}{\text{volume}} = \frac{5\times 10^{-6} C}{\frac{4}{3}\pi (0,05m)^3} = 9,55\times 10^{-3} \tfrac{C}{m^3}$$

La charge à l'intérieur de la surface de Gauss est donc

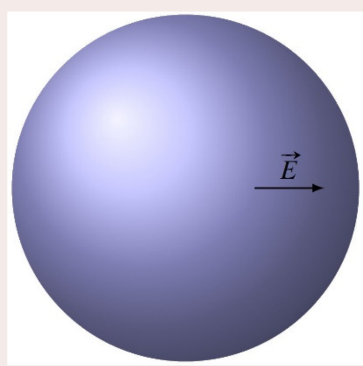
$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \rho V_{\text{int}} \\ &= 9,555\times 10^{-3} \tfrac{C}{m^3} \cdot \tfrac{4}{3}\pi (0,02m)^3 \\ &= 0,32\mu C \end{aligned}$$

Le théorème de Gauss nous donne donc

$$\begin{aligned} E 4\pi r^2 &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ E \cdot 4\pi \cdot (0,02m)^2 &= \frac{0,32\times 10^{-6} C}{8,854\times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}} \\ E &= 7,19\times 10^6 \tfrac{N}{C} \end{aligned}$$

Avec une permittivité relative de 4, le champ est

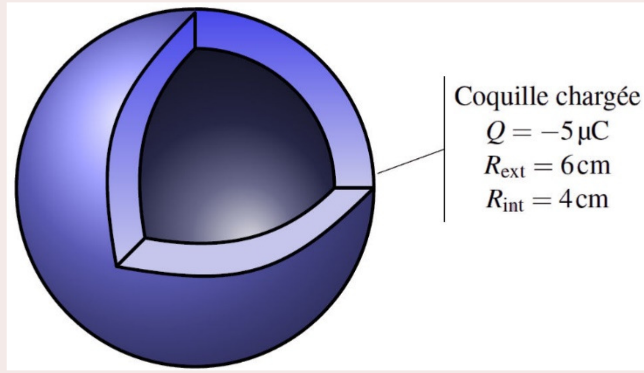
$$\begin{aligned} E &= \frac{7,19\times 10^6 \frac{N}{C}}{4} \\ &= 1,798\times 10^6 \tfrac{N}{C} \end{aligned}$$



Comme la réponse est positive, le champ est vers l'extérieur de la surface de Gauss, donc dans la direction opposée à la sphère.

Exemple 3.2.2

Une sphère vide a un rayon externe de 6 cm, un rayon interne de 4 cm et une charge de -5 μC. La charge est répartie uniformément dans la matière composant la sphère.

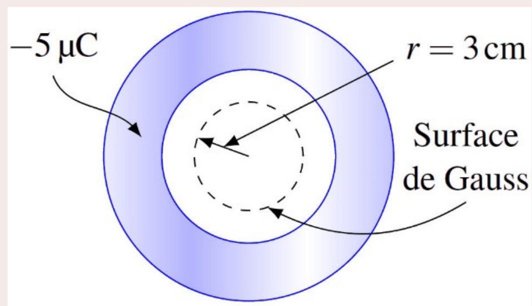


a) Quel est le champ électrique à 3 cm du centre de la sphère (grandeur et direction) ?

Puisqu'il y a symétrie sphérique, le théorème de Gauss est

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Si on veut connaitre le champ à 3 cm du centre de la sphère, on doit imaginer une sphère de Gauss à 3 cm du centre de la sphère. Comme la sphère chargée a un rayon interne de 4 cm, la sphère de Gauss est dans la cavité de la sphère chargée.



Dans ce cas, il n'y a aucune charge à l'intérieur de la surface de Gauss. On a donc

$$E4\pi r^2 = \frac{0C}{\varepsilon_0}$$

$$E = 0\tfrac{N}{C}$$

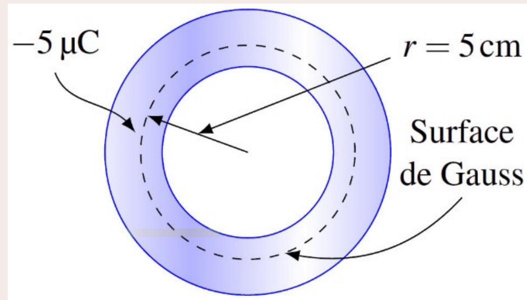
Le champ est donc nul. D'ailleurs, il est nul partout à l'intérieur de la sphère puisqu'il n'y aura jamais de charge à l'intérieur de la surface de Gauss tant qu'elle est dans la cavité.

b) Quel est le champ à 5 cm du centre de la sphère (grandeur et direction) si la permittivité relative de la substance est de 10 ?

Puisqu'il y a symétrie sphérique, le théorème de Gauss est

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Si on veut connaitre le champ à 5 cm du centre de la sphère, on doit imaginer une sphère de Gauss qui est à 5 cm du centre de la sphère.



Cette fois-ci, il y a de la charge à l'intérieur de la surface de Gauss. Toutefois, nous n'avons qu'une partie de la charge de la sphère. Pour trouver la charge à l'intérieur, trouvons la charge volumique de la sphère.

$$\rho = \frac{\text{charge}}{\text{volume}} = \frac{-5\mu C}{\frac{4}{3}\pi(0,06m)^3 - \frac{4}{3}\pi(0,04m)^3} = -7,853\times10^{-3}\,\tfrac{C}{m^3}$$

(Le volume est le volume d'une sphère de 6 cm auquel on soustrait le volume de la cavité, qui est une sphère de 4 cm.)

La charge à l'intérieur de la surface de Gauss est donc

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \rho V_{\text{int}} \\ &= -7,853\times10^{-3}\,\tfrac{C}{m^3}\cdot\left(\tfrac{4}{3}\pi(0,05m)^3 - \tfrac{4}{3}\pi(0,04m)^3\right) \\ &= -2,01\mu C \end{aligned}$$

Le théorème de Gauss nous donne donc

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$E\cdot 4\pi\cdot(0,05m)^2 = \frac{-2,01\times10^{-6}C}{8,854\times10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}}$$

$$E = -7,21\times10^{6}\,\tfrac{N}{C}$$

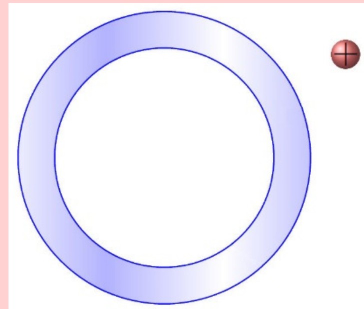
Puisque la permittivité relative de la substance est de 10, le champ est

$$\begin{aligned} E &= \frac{-7,21\times10^{6}\,\frac{N}{C}}{10} \\ &= -7,21\times10^{5}\,\tfrac{N}{C} \end{aligned}$$

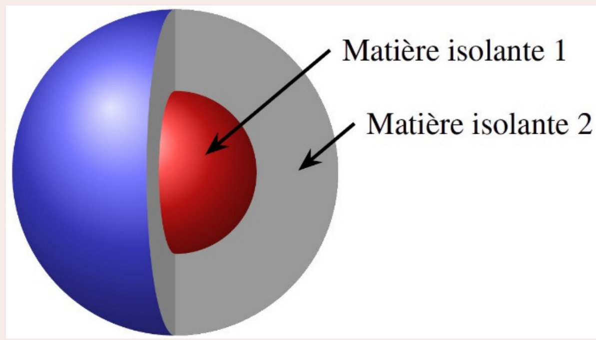
Comme la réponse est négative, le champ est vers l'intérieur de la surface de Gauss, donc vers le centre de la sphère.

Erreur fréquente : Penser que le champ est toujours nul à l'intérieur de la cavité d'une sphère

Dans l'exemple précédent, on est arrivé à la conclusion que le champ à l'intérieur d'une cavité dans une sphère est nul. Cela ne signifie pas que le champ est toujours nul dans une telle cavité. Le champ ne serait pas nul s'il y avait une petite charge à côté de la sphère. Le champ à l'intérieur de la cavité serait alors la somme du champ fait par la sphère et celui de la charge (la sphère ne bloque pas le champ fait par la charge). Le champ fait par la sphère est nul dans la cavité, mais le champ fait par la petite charge n'est pas nul. Il y aurait donc un champ dans la cavité.



Exemple 3.2.3



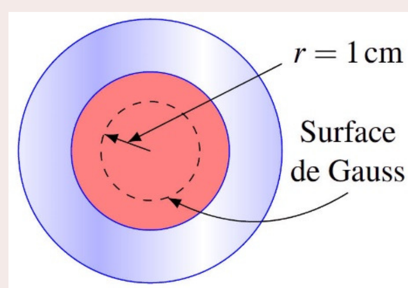
Deux sphères faites de matière isolante sont emboitées l'une dans l'autre. La première (au centre) a un rayon de 2 cm et une densité de charge de $\rho = 2$ µC/m³. La deuxième (qui entoure l'autre) a un rayon de 4 cm et une densité de charge de $\rho = -1$ µC/m³.

a) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 1 cm du centre de la sphère sachant que la permittivité relative de la matière isolante 1 est de 6 ?

Puisqu'il y a symétrie sphérique, le théorème de Gauss est

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Si on veut connaitre le champ à 1 cm du centre de la sphère, on doit imaginer une sphère de Gauss à 1 cm du centre de la sphère.



La seule charge à l'intérieur de la surface de Gauss provient uniquement de la matière isolante 1. La charge est

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \rho V_{\text{int}} \\ &= 2\times10^{-6} \tfrac{C}{m^3} \cdot \tfrac{4}{3}\pi \left(0{,}01m\right)^3 \\ &= 8{,}378\times10^{-12} C \end{aligned}$$

Le champ est donc

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi \cdot (0,01m)^2 = \frac{8,378\times10^{-12}C}{8,854\times10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2}}$$

$$E = 752,9\tfrac{N}{C}$$

Puisque la permittivité relative de la substance est de 6, le champ est

$$E = \frac{752,9\frac{N}{C}}{6} = 125,5\tfrac{N}{C}$$

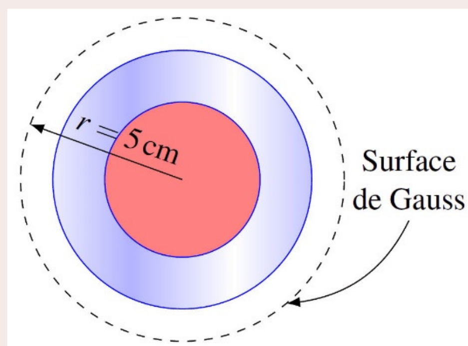
Comme le champ est positif, le champ est vers l'extérieur de la sphère.

b) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 5 cm du centre de la sphère ?

Puisqu'il y a symétrie sphérique, le théorème de Gauss est

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Si on veut connaitre le champ à 5 cm du centre de la sphère, on doit imaginer une sphère de Gauss à 5 cm du centre de la sphère.



La charge à l'intérieur de la surface de Gauss provient maintenant de toute la charge dans la matière 1 et de la toute la charge dans la matière 2.

La charge dans la matière 1 est

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}1} &= \rho_1 V_{\text{int}1} \\ &= 2\times10^{-6}\tfrac{C}{m^3}\cdot\tfrac{4}{3}\pi(0,02m)^3 \\ &= 6,702\times10^{-11}C \end{aligned}$$

La charge dans la matière 2 est

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}2} &= \rho_2 V_{\text{int}2} \\ &= -1\times10^{-6}\tfrac{C}{m^3}\cdot\left(\tfrac{4}{3}\pi(0,04m)^3 - \tfrac{4}{3}\pi(0,02m)^3\right) \\ &= -2,3457\times10^{-10}C \end{aligned}$$

La charge totale à l'intérieur est donc

$$\begin{aligned}Q_{\text{int}} &= Q_{\text{int}1} + Q_{\text{int}2} \\ &= 6,702\times10^{-11}C + -2,3457\times10^{-10}C \\ &= -1,6755\times10^{-10}C\end{aligned}$$

Le champ est donc

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$
$$E\cdot 4\pi\cdot(0,05m)^2 = \frac{-1,6755\times10^{-10}C}{8,854\times10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2}}$$
$$E = -602,4\frac{N}{C}$$

Comme le champ est négatif, le champ est vers le centre de la sphère.

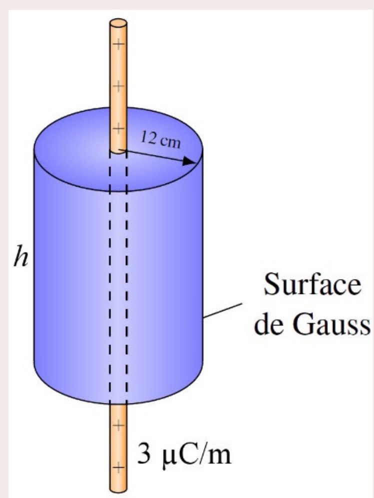
Exemple 3.2.4

Une tige infinie a un rayon de 2 cm et une charge linéique de 3 µC/m. La charge est répartie uniformément dans la matière composant la tige.

a) Quel est le champ électrique à 12 cm du centre de la tige (grandeur et direction) ?

Puisqu'il y a symétrie cylindrique, le théorème de Gauss est

$$E2\pi rh = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$



Si on veut connaitre le champ à 12 cm du centre de la tige, on doit imaginer un cylindre qui est à 12 cm du centre de la tige. Une partie de la charge de la tige se retrouve alors à l'intérieur de la surface de Gauss. Comme la tige a une charge linéique de λ =3 µC/m et que la tige à l'intérieur de la surface a une longueur h, alors la charge à l'intérieur de la surface de Gauss est

$$Q_{\text{int}} = \lambda h$$

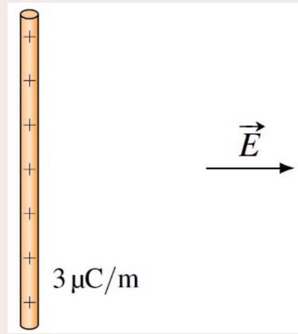
Le théorème de Gauss est donc

$$E2\pi rh = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$
$$E2\pi r = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}$$

ce qui donne

$$E \cdot 2\pi \cdot (0{,}12m) = \frac{3\times10^{-6}\,\frac{C}{m}}{8{,}854\times10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}}$$

$$E = 4{,}49\times10^{5}\,\tfrac{N}{C}$$



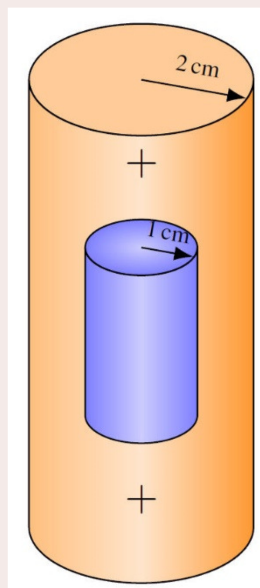
Comme la réponse est positive, le champ est vers l'extérieur de la surface de Gauss, donc dans la direction opposée au centre de la tige.

Remarquez aussi qu'on aurait pu utiliser la formule du champ par une tige infinie, obtenue au chapitre précédent pour trouver ce champ.

b) Quel est le champ à 1 cm du centre de la tige (grandeur et direction) si la permittivité relative de la substance est de 8 ?

Puisqu'il y a symétrie cylindrique, le théorème de Gauss est

$$E2\pi rh = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$



Si on veut connaitre le champ à 1 cm de la tige, on doit imaginer un cylindre qui est à 1 cm du centre de la tige. Une partie de la charge de la tige se retrouve alors à l'intérieur de la surface de Gauss.

Pour trouver la charge à l'intérieur de la surface de Gauss, on doit premièrement trouver la densité de charge de la tige. On va donc prendre un bout de tige de longueur L et calculer la densité en divisant la charge par le volume. (On notera R le rayon de la tige.)

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\text{charge}}{\text{volume}} \\ &= \frac{\lambda L}{\pi R^2 L} \\ &= \frac{\lambda}{\pi R^2} \\ &= \frac{3\times10^{-6}\,\frac{C}{m}}{\pi(0{,}02m)^2} \\ &= 2{,}387\times10^{-3}\,\tfrac{C}{m^3}\end{aligned}$$

La charge à l'intérieur de la surface de Gauss est donc

$$\begin{aligned} Q_{int} &= \rho V_{int} \\ &= \rho \pi r^2 h \\ &= 2,387\times 10^{-3} \tfrac{C}{m^3} \cdot \pi \cdot (0,01m)^2 \cdot h \\ &= 7,5\times 10^{-7} \tfrac{C}{m} \cdot h \end{aligned}$$

Le théorème de Gauss nous donne donc

$$\begin{aligned} E2\pi rh &= \frac{7,5\times 10^{-7} \frac{C}{m} \cdot h}{\varepsilon_0} \\ E2\pi r &= \frac{7,5\times 10^{-7} \frac{C}{m}}{\varepsilon_0} \\ E\cdot 2\pi \cdot (0,01m) &= \frac{7,5\times 10^{-7} \frac{C}{m}}{8,854\times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}} \\ E &= 1,348\times 10^{6} \tfrac{N}{C} \end{aligned}$$

Puisque la permittivité relative de la substance est de 8, le champ est

$$\begin{aligned} E &= \frac{1,348\times 10^{6} \frac{N}{C}}{8} \\ &= 1,685\times 10^{5} \tfrac{N}{C} \end{aligned}$$

Comme la réponse est positive, le champ est vers l'extérieur de la surface de Gauss, donc dans la direction opposée au centre de la tige.

On peut aussi utiliser le théorème de Gauss pour trouver la formule donnant le champ. Ça ressemble à ce qu'on vient de faire, mais il n'y a pas de valeurs numériques. Voici quelques exemples.

Exemple 3.2.5

Donnez la formule du champ électrique fait par une sphère de rayon R uniformément chargée avec une charge Q en fonction de la distance du centre de la sphère (r). La permittivité relative de la sphère est κ.

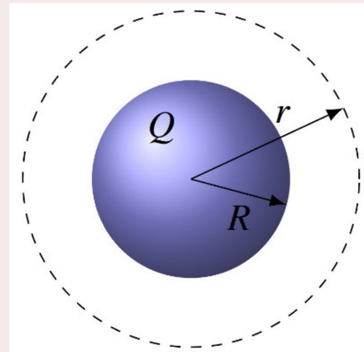
On doit traiter ce problème en deux parties : le champ à l'extérieur de la sphère et le champ à l'intérieur de la sphère.

Extérieur de la sphère

Puisqu'il y a symétrie sphérique, le théorème de Gauss est

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Si on veut connaitre le champ à une distance *r* de la sphère, on doit imaginer une sphère qui est à la distance *r* du centre de la sphère. Comme la sphère chargée est plus petite que la sphère de Gauss, la charge de la sphère se retrouve complètement à l'intérieur de la surface de Gauss. On a donc $Q = Q_{int}$, et ainsi



$$E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Si on isole *E*, on obtient

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

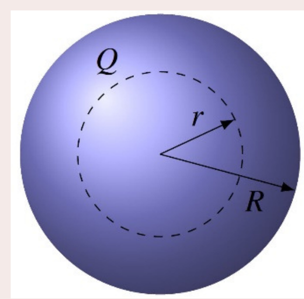
C'est exactement la formule donnée dans le chapitre précédent pour le champ fait par une sphère chargée. Cette façon d'obtenir le champ d'une sphère est nettement plus simple que de la faire par intégration.

<u>Intérieur de la sphère</u>

Puisqu'il y a symétrie sphérique, le théorème de Gauss est

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Si on veut connaitre le champ à une distance *r* du centre de la sphère, on doit imaginer une sphère de Gauss qui est à une distance *r* du centre de la sphère. Comme la sphère de Gauss est plus petite que la sphère chargée, il n'y a qu'une partie de la charge qui se retrouve à l'intérieur de la surface de Gauss.



Pour trouver la quantité de charge, on commence par trouver la charge volumique de la sphère. Cette densité de charge est

$$\rho = \frac{\text{charge}}{\text{volume}} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

La charge à l'intérieur de la surface de Gauss est donc

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \rho V_{\text{int}} \\ &= \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{Qr^3}{R^3} \end{aligned}$$

Le théorème de Gauss nous donne donc

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$E4\pi r^2 = \frac{Qr^3}{\varepsilon_0 R^3}$$

En isolant le champ, on obtient

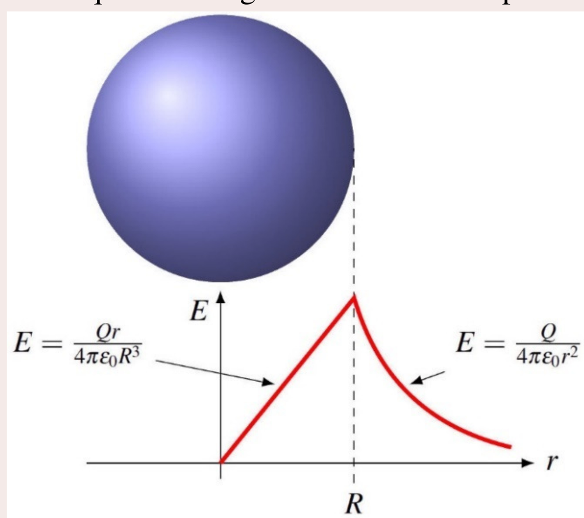
$$E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

Puisqu'à l'intérieur de la sphère on est dans la substance diélectrique, on doit diviser ce résultat par κ. Le résultat final est donc

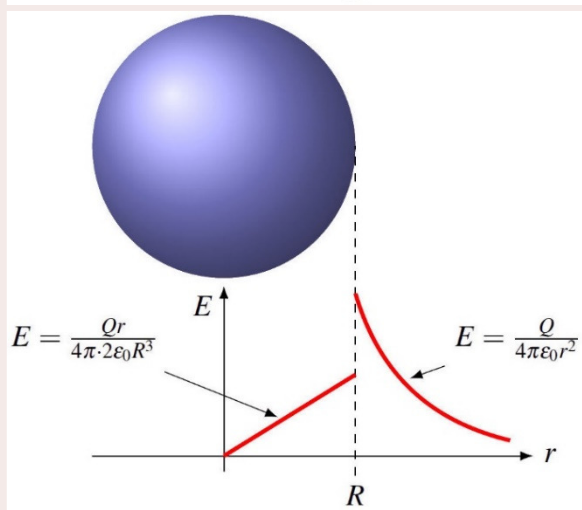
$$E = \frac{Qr}{4\pi\kappa\varepsilon_0 R^3}$$

On voit que le champ augmente à mesure qu'on s'éloigne du centre de la sphère.

En combinant nos deux résultats obtenus pour l'intérieur et l'extérieur de la sphère, on obtient le graphique suivant (si on suppose que la permittivité relative est de 1). Il montre la grandeur du champ en fonction de la distance pour une sphère uniformément chargée.



Voici ce qu'on obtient si la permittivité relative est de 2. Le champ reste le même à l'extérieur, mais il est divisé par deux à l'intérieur.



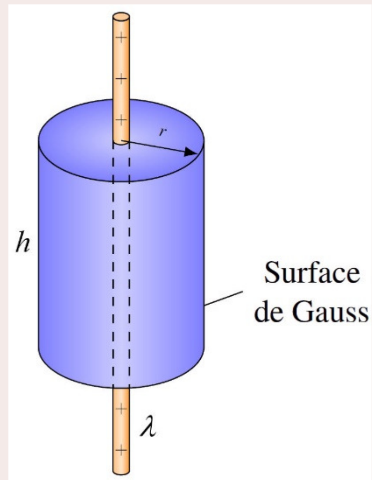
Exemple 3.2.6

Une tige infinie a un rayon R et une charge linéique de λ. La charge est répartie uniformément dans la matière composant la tige. Quelle est la grandeur du champ électrique à une distance r à l'extérieur de la tige ?

Puisqu'il y a symétrie cylindrique, le théorème de Gauss est

$$E 2\pi r h = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Si on veut connaitre le champ à une distance r de la tige, on doit imaginer un cylindre de Gauss qui est à une distance r du centre de la tige. Une partie de la charge de la tige se retrouve alors à l'intérieur de la surface de Gauss. Comme la tige a une charge linéique de λ et que la tige à l'intérieur de la surface a une longueur h, alors la charge à l'intérieur



$$Q_{\text{int}} = \lambda h$$

Le théorème de Gauss donne donc

$$E 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$E 2\pi r = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}$$

Si on isole E, on obtient

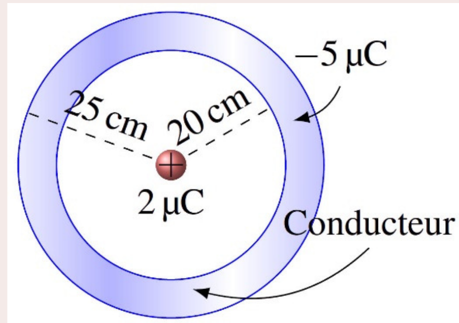
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Remarquez comme cette démonstration est courte comparée à l'intégrale faite au chapitre précédent pour obtenir le même résultat.

Exemples avec des conducteurs

On peut aussi utiliser le théorème de Gauss avec des conducteurs. Il faut toutefois se rappeler que le champ à l'intérieur d'un conducteur est nul.

Exemple 3.2.7

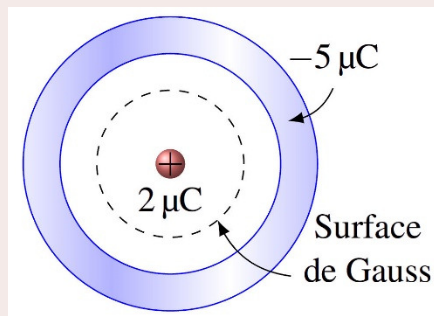


Une charge ponctuelle de 2 μC est entourée d'une coquille métallique ayant les dimensions indiquées sur la figure. Cette coquille métallique a une charge de -5 μC.

a) Quel est le champ électrique à 10 cm de la charge ponctuelle (grandeur et direction) ?

Puisqu'il y a symétrie sphérique, le théorème de Gauss est

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$



Si on veut connaitre le champ à 10 cm de la charge ponctuelle, on doit imaginer une sphère de Gauss qui est à 10 cm de la charge ponctuelle.

La seule charge qui se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss est la charge ponctuelle de 2 μC. On a donc

$$Q_{\text{int}} = 2\mu C$$

Le théorème de Gauss devient donc

$$E4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi \cdot (0,1m)^2 = \frac{2\times 10^{-6} C}{8,854\times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}}$$

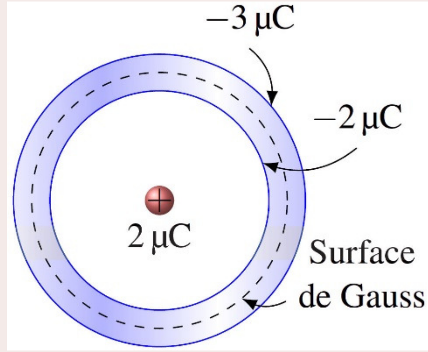
$$E = 1,8\times 10^6 \tfrac{N}{C}$$

Comme la réponse est positive, le champ est vers l'extérieur de la surface de Gauss, donc dans une direction opposée à la charge ponctuelle.

b) Quel est le champ électrique à 22 cm de la charge ponctuelle (grandeur et direction) ?

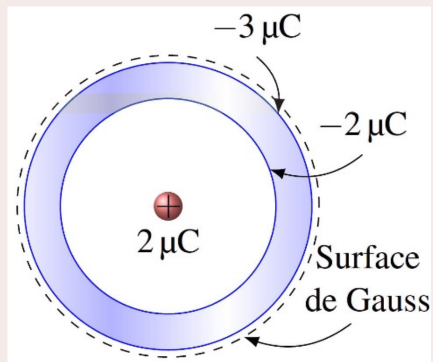
À 22 cm de la charge ponctuelle, nous sommes dans le métal, qui est un conducteur. Le champ est donc nul

$$E = 0$$



Notez que le théorème de Gauss est en accord avec ce qu'on avait déduit au chapitre précédent. Si on fait une sphère de Gauss à 22 cm de la charge ponctuelle, le flux traversant cette surface doit être nul puisque le champ est nul partout sur cette surface (on est partout dans le conducteur). Si le flux est nul, cela veut dire que la charge à l'intérieur est nulle. Cela signifie qu'une charge opposée à la charge ponctuelle (-2 μC) s'est accumulée sur la surface interne de la sphère pour que la charge à l'intérieur de la surface de Gauss soit nulle. C'est exactement la conclusion obtenue au chapitre précédent.

c) Quel est le champ électrique à 25,1 cm de la charge ponctuelle (grandeur et direction) ?



Si on veut connaitre le champ à 25,1 cm de la charge ponctuelle, on doit imaginer une sphère de Gauss qui est à 25,1 cm de la charge ponctuelle. La charge ponctuelle et la sphère métallique sont maintenant à l'intérieur de la surface de Gauss. La charge à l'intérieur de la surface de Gauss est donc

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= Q_{\text{charge ponctuelle}} + Q_{\text{sphère}} \\ &= 2\mu C + -5\mu C \\ &= -3\mu C \end{aligned}$$

Le théorème de Gauss devient donc

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi \cdot (0,251m)^2 = \frac{-3\times10^{-6} C}{8,854\times10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}}$$

$$E = -4,286\times10^5 \frac{N}{C}$$

Puisque le champ est négatif, il pointe vers le centre de la sphère.

3.3 AUTRES PREUVES AVEC LE THÉORÈME DE GAUSS

Parfois, il est possible d'obtenir certains résultats intéressants à partir du théorème de Gauss même s'il n'y a pas de symétrie sphérique ou cylindrique. Voici quelques exemples.

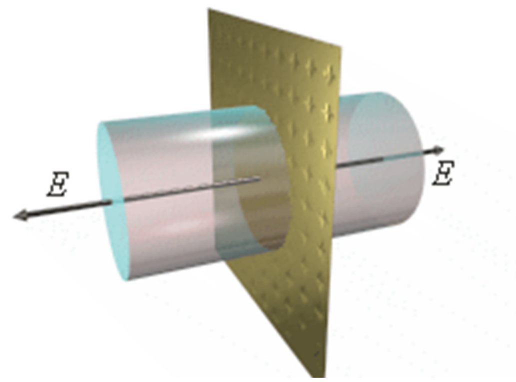
Le champ d'une plaque infinie

On va maintenant prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que le champ électrique d'une plaque infinie est donné par la formule

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

tel que spécifié au chapitre 2.

Pour y arriver, un va prendre une surface de Gauss qui contient une partie de la plaque. Sur la figure, la surface est un cylindre dont les bouts sont parallèles à la plaque et les côtés sont perpendiculaires à la plaque.



itso-outage.oracle.com/thinkquest

Par symétrie, le champ doit être exactement perpendiculaire à la plaque, car il n'y a pas de raison de s'incliner d'un côté ou de l'autre puisque la plaque est parfaitement identique dans toutes les directions. Le champ est donc parallèle aux côtés du cylindre de Gauss et il n'y a donc pas de flux traversant le côté du cylindre. Le champ est aussi parfaitement perpendiculaire aux deux bouts du cylindre. Si l'aire du bout du cylindre est *A*, le flux qui traverse le cylindre est donc

$$\begin{aligned}\phi_E &= \phi_{E\ \text{coté}} + \phi_{E\ \text{bout1}} + \phi_{E\ \text{bout2}} \\ &= 0 + AE\cos 0° + AE\cos 0° \\ &= 2AE\end{aligned}$$

La charge à l'intérieur du cylindre correspond à la partie de la plaque à l'intérieur du cylindre de Gauss. L'aire de la plaque à l'intérieur du cylindre est aussi *A,* le même que celui du bout du cylindre. La charge à l'intérieur de la surface de Gauss est donc

$$Q_{\text{int}} = \sigma A$$

Le théorème de Gauss nous dit alors que

$$\phi_E = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$2AE = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

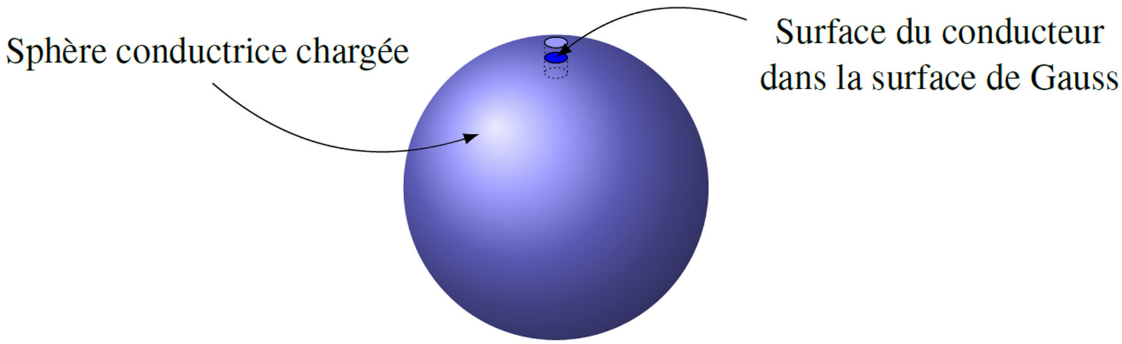
Ce qui nous donne

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

C'est le résultat donné au chapitre précédent.

Le champ près de la surface des conducteurs

Le théorème de Gauss nous permet aussi de trouver une formule donnant la grandeur du champ près de la surface des conducteurs. Pour y arriver, on va imaginer une surface de Gauss qui englobe une très petite partie de la surface d'un conducteur.



Notre conducteur est une sphère sur notre figure, mais il pourrait être de n'importe quelle forme parce que la seule partie qui nous intéresse est la petite partie du conducteur dans la surface de Gauss.

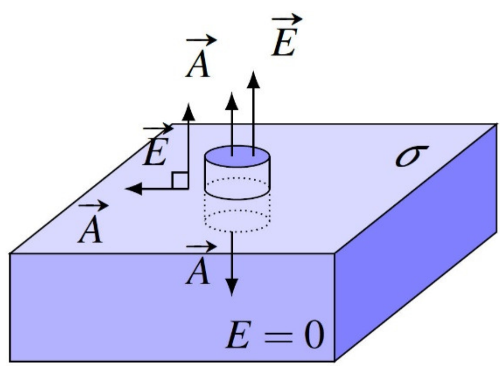
Appliquons le théorème de Gauss avec cette surface. On va premièrement calculer le flux avec la formule

$$\phi_E = \sum EA\cos\theta$$

Pour y arriver, on va séparer la surface en 3 régions : chacun des bouts et le tour du cylindre.

Le flux à travers le bout à l'intérieur du conducteur est nul puisque le champ est nul dans le conducteur.

Le flux sur le côté du cylindre est aussi nul parce que le champ est nul pour la partie à l'intérieur du conducteur et parce que l'angle entre E et A est de 90° pour la partie à l'extérieur du conducteur.



Il reste donc uniquement le flux à travers le bout. Ce flux est simplement

$$\phi_E = EA_{bout}\cos 0° = EA_{bout}$$

(On a mis 0° en supposant que la charge est positive. Si elle est négative, l'angle sera de 180° et le cosinus vaudra -1. On tiendra compte de ce signe quand on donnera le résultat final.)

Calculons maintenant le flux avec la charge à l'intérieur de la surface

$$\phi_E = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur est simplement la petite partie de la surface du conducteur qui se retrouve dans la surface de Gauss. Si la surface a une densité surfacique de charge σ, alors la charge à l'intérieur est

$$Q_{\text{int}} = \sigma A_{bout}$$

L'aire à l'intérieur est la même que celle du bout du cylindre, car le cylindre de Gauss a toujours le même rayon. En combinant ces deux résultats, on a

$$\sum EA\cos\theta = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$EA_{bout} = \frac{\sigma A_{bout}}{\varepsilon_0}$$

Ce qui donne

La grandeur du champ électrique près de la surface d'un conducteur

$$E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0}$$

Le champ est dans la direction opposée au conducteur si σ est positive.
Le champ est vers le conducteur si σ est négative.

On a mis une valeur absolue pour obtenir la grandeur du champ, même si la charge du conducteur est négative.

Faisons un petit test : calculons le champ près de la surface de la sphère de l'exemple précédent. La densité de surface de la surface extérieure de la sphère est

$$\sigma = \frac{\text{charge}}{\text{aire}} = \frac{-3\mu C}{4\pi\left(0,25m\right)^2} = -3,82\,\tfrac{\mu C}{m^2}$$

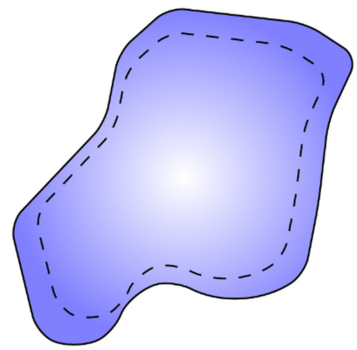
Le champ tout près de la surface est donc

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{-3,82\times 10^{-6}\,\frac{C}{m^2}}{8,854\times 10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}} = -4,341\times 10^5\,\tfrac{N}{C}$$

Puisque le champ est négatif, il pointe vers le centre de la sphère. Ceci est relativement près de la valeur obtenue de -4,286 x 10^5 N/C pour le champ à 25,1 cm (qui est un peu plus faible, car ce n'est pas exactement à la surface).

Autre preuve qu'il n'y a pas de charge à l'intérieur d'un conducteur

Le théorème de Gauss va nous donner une preuve un peu plus solide que les charges excédentaires dans un conducteur doivent être à la surface du métal. Imaginons simplement une surface de Gauss dans un conducteur. La surface est un peu en dessous de la surface du conducteur (figure).



Puisque le champ est nul partout à l'intérieur, le flux est

$$\phi_E = \sum EA\cos\theta = 0$$

Or, selon le flux est aussi

$$\phi_E = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Puisque le flux est nul, on obtient

$$\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = 0$$

Ce qui implique que la charge nette à l'intérieur de la surface est nulle. Il n'y a donc pas de charge à l'intérieur d'un conducteur.

RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS

Le flux électrique

$$\phi_E = \sum EA\cos\theta = \sum \vec{E}\cdot\vec{A}$$

On sépare en régions où E est uniforme et θ est constant.

ou

$$\phi_E = \int E\cos\theta dA = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

Le flux électrique avec symétrie sphérique

$$\phi_E = E4\pi r^2$$

E est positif s'il est vers l'extérieur de la sphère.
E est négatif s'il est vers l'intérieur de la sphère.

Le flux électrique avec symétrie cylindrique

$$\phi_E = E 2\pi r h$$

E est positif s'il est vers l'extérieur du cylindre.
E est négatif s'il est vers l'intérieur du cylindre.

Le flux électrique à travers une surface fermée

$$\phi_E = 4\pi k Q_{\text{int}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Théorème de Gauss (première équation de Maxwell)

$$\sum EA\cos\theta = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

ou

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Théorème de Gauss avec symétrie sphérique

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

E est positif s'il est vers l'extérieur de la sphère.
E est négatif s'il est vers l'intérieur de la sphère.

Théorème de Gauss avec symétrie cylindrique

$$E 2\pi r h = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}:$$

E est positif s'il est vers l'extérieur du cylindre.
E est négatif s'il est vers l'intérieur du cylindre.

La grandeur du champ électrique près de la surface d'un conducteur

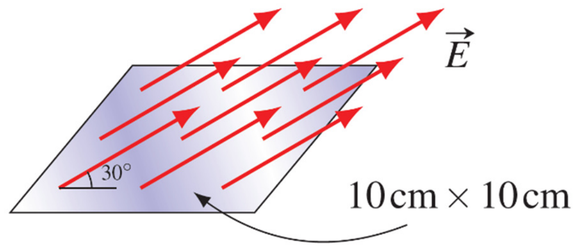
$$E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0}$$

Le champ est dans la direction opposée au conducteur si σ est positive.
Le champ est vers le conducteur si σ est négative.

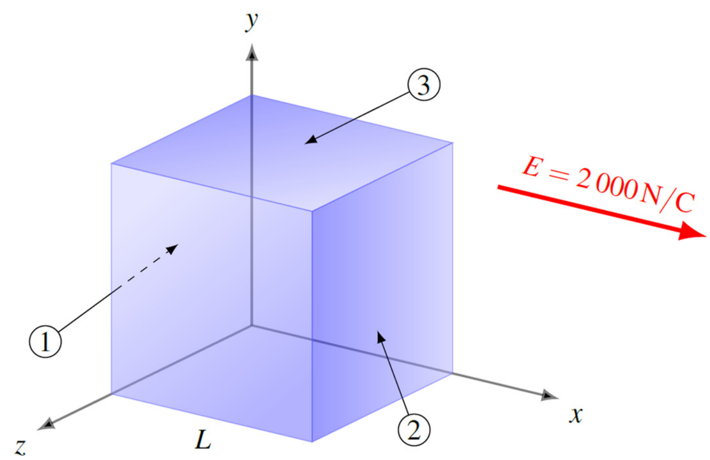
EXERCICES

3.1 Le Flux électrique

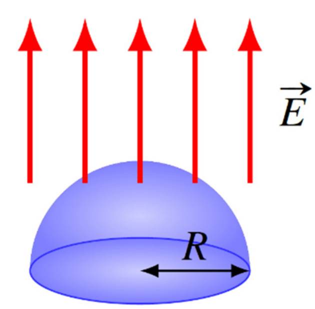
1. Quel est le flux qui traverse cette surface si la grandeur du champ électrique est de 200 N/C ?



2. Une surface cubique de 20 cm de côté est dans un champ de 2000 N/C tel qu'illustré sur la figure. Quel est le flux traversant les surfaces 1 (côté gauche), 2 (côté droit) et 3 (dessus) de ce cube ?



3. Une surface en une moitié de la surface d'une sphère de 20 cm de rayon. Cette surface est dans un champ de 2000 N/C dirigé tel qu'illustré sur la figure. Quel est le flux traversant la surface ?

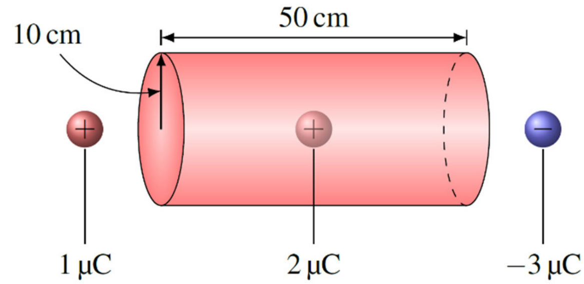


4. Une surface rectangulaire de 2 m x 5 m est dans le plan *xy*. Quel est le flux traversant la surface s'il y a un champ uniforme de

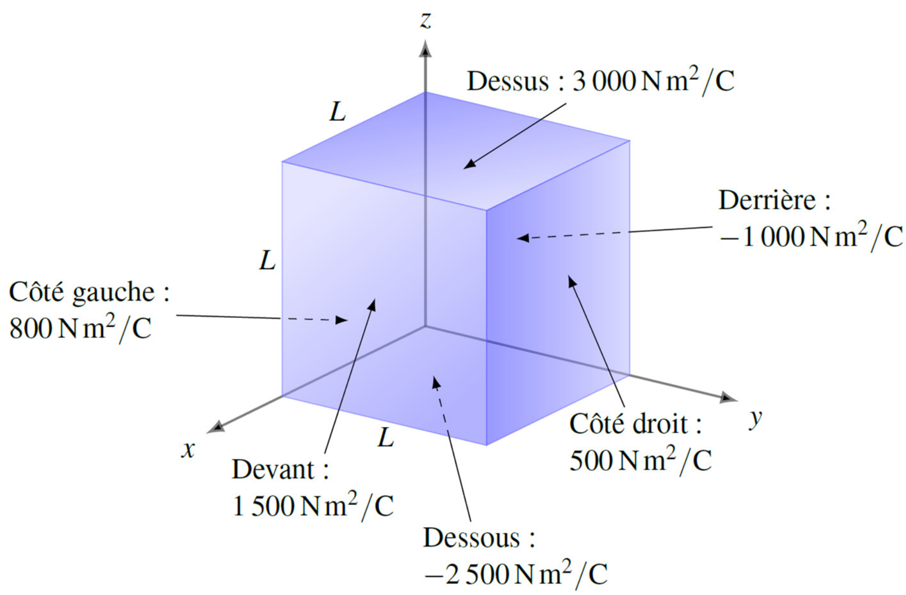
$$\vec{E} = 1000\tfrac{N}{C}\vec{i} + 2000\tfrac{N}{C}\vec{j} - 3000\tfrac{N}{C}\vec{k}$$

3.2 Le théorème de Gauss

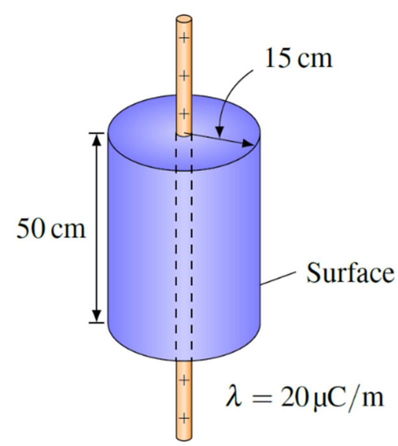
5. Calculez le flux net à travers la surface cylindrique de la figure. La charge de 2 µC est exactement au centre du cylindre alors que les deux autres charges sont à l'extérieur de la surface, à 5 cm des bouts du cylindre.



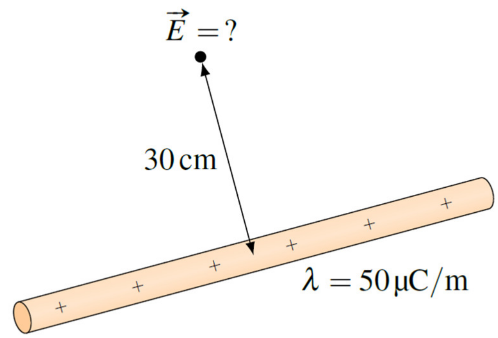
6. La figure suivante donne le flux à travers chacune des surfaces d'une surface cubique. Quelle est la charge nette à l'intérieur du cube ?



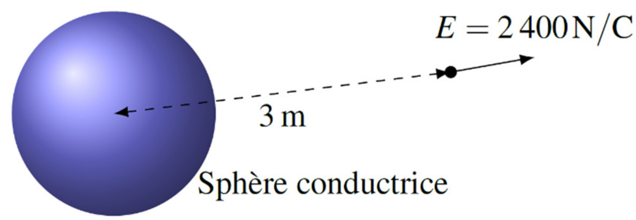
7. Quel est le flux à travers la surface cylindrique ?



8. En utilisant le théorème de Gauss, déterminez la grandeur du champ électrique à l'endroit montré sur la figure. (Le fil est un fil infini.)



9. En utilisant le théorème de Gauss, déterminez la densité surfacique de charge (σ) de cette sphère de 60 cm de rayon si le champ a une grandeur de 2400 N/C à 3 m du centre de la sphère.



10. Une sphère conductrice de 40 cm de rayon possède une charge de 60 µC.

a) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 50 cm du centre de la sphère ?
b) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 10 cm du centre de la sphère ?

11. Une sphère non conductrice de 20 cm de rayon possède une charge de -40 µC répartie uniformément dans tout son volume.

a) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 50 cm du centre de la sphère ?
b) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 12 cm du centre de la sphère si la permittivité relative de la substance qui compose la sphère est de 24 ?

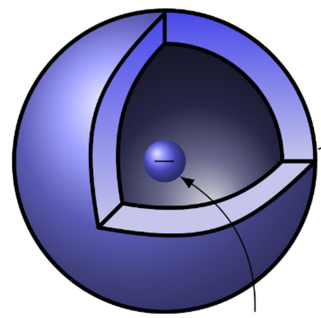
12. Une tige infinie conductrice de 10 cm de rayon possède une densité de charge de 35 µC/m.

a) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 40 cm du centre de la tige ?
b) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 1 cm du centre de la tige ?

13. Une tige infinie non conductrice de 12 cm de rayon possède une charge linéique de 36 µC/m répartie uniformément dans tout son volume.

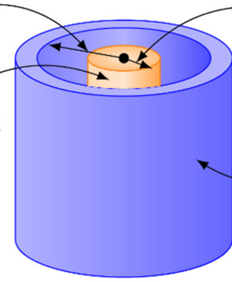
a) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 20 cm du centre de la tige ?
b) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 8 cm du centre de la tige si la permittivité relative de la substance qui compose la tige est de 5 ?

14. Il y a une charge ponctuelle négative de -10 µC au centre de cette coquille métallique chargée.



a) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 40 cm du centre de la charge de -10 µC ?
b) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 22 cm du centre de la charge de -10 µC ?
c) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 5 cm du centre de la charge de -10 µC ?

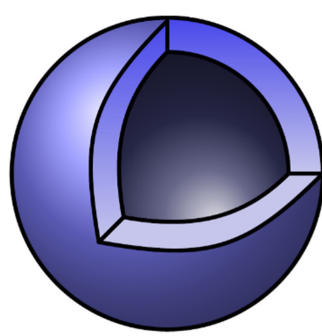
15. Dans la situation montrée sur la figure (les tiges chargées sont de longueurs infinies),…



a) quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 6 cm du centre des tiges ?
b) quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 20 cm du centre des tiges ?

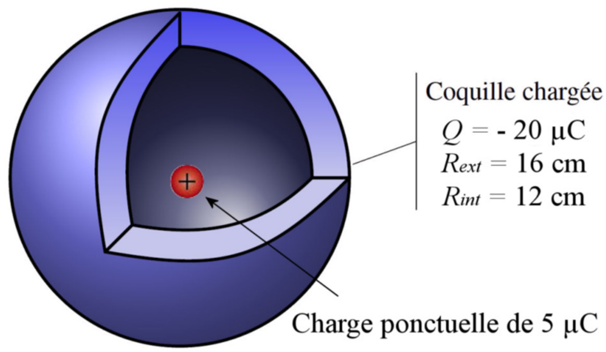
16. Cette coquille est faite de matière isolante.

a) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 30 cm du centre de la coquille chargée ?
b) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 22 cm du centre de la coquille chargée si la permittivité relative de la substance qui compose la sphère est de 15 ?
c) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 10 cm du centre de la coquille chargée ?



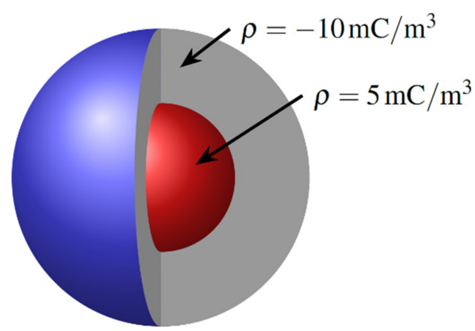
17. Une sphère non conductrice de 16 cm de rayon possède une cavité ayant un rayon de 12 cm dans laquelle on retrouve, exactement au centre, une charge ponctuelle de 5 µC. La sphère a une charge de -20 µC répartie uniformément dans tout son volume.

a) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 5 cm du centre de la sphère ?
b) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 15 cm du centre de la sphère si la permittivité relative de la substance qui compose la sphère est de 1 ?
c) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 20 cm du centre de la sphère ?



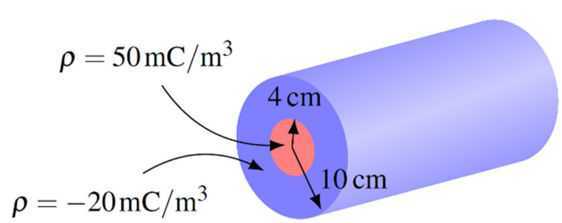
18. Cette sphère chargée est composée de 2 substances isolantes. Le rayon de la sphère centrale est de 10 cm et le rayon de la grande sphère est de 20 cm.

a) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 5 cm du centre de la sphère si la permittivité relative de la substance qui compose la partie centrale de la sphère est de 3 ?
b) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 15 cm du centre de la sphère si la permittivité relative de la substance qui compose la partie externe de la sphère est de 9 ?
c) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 25 cm du centre de la sphère ?

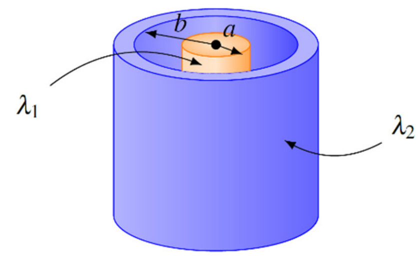


19. Cette tige chargée infinie est composée de 2 substances isolantes.

a) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 2 cm du centre de la tige si la permittivité relative de la substance qui compose la partie centrale de la tige est de 3 ?
b) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 8 cm du centre de la tige si la permittivité relative de la substance qui compose la partie externe de la tige est de 9 ?
c) Quel est le champ électrique (grandeur et direction) à 12 cm du centre de la tige ?



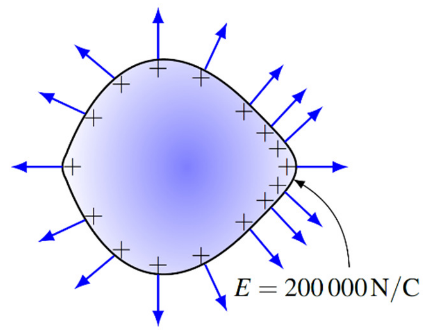
20. En utilisant le théorème de Gauss, trouvez la formule qui donne la grandeur du champ électrique entre les deux cylindres dans la situation montrée sur la figure (les cylindres sont de longueurs infinies).



3.3 Autres preuves avec le théorème de Gauss

21. Une sphère conductrice d'un rayon de 25 cm possède une charge de 50 µC. Quelle est la grandeur du champ électrique juste au-dessus de la surface de la sphère ?

22. Tout près de la surface à l'endroit indiqué sur la figure, la grandeur du champ électrique est de 200 000 N/C. Quelle est la densité de charge à cet endroit de la surface ?



Défis

(Questions plus difficiles que les questions qu'il y aura à l'examen.)

23. La densité de charge d'une sphère de rayon R et de permittivité relative κ est donnée par $\rho = \rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)$ où r est la distance du centre de la sphère.

a) Trouvez la formule du champ électrique en fonction de la distance à l'intérieur de la sphère.
b) Trouvez la formule du champ électrique en fonction de la distance à l'extérieur de la sphère.
c) À quelle distance du centre de la sphère le champ à l'intérieur de la sphère est-il le plus grand ?

RÉPONSES

3.1 Le Flux électrique

1. 1 Nm²/C ou -1 Nm²/C
2. Surface 1 : -80 Nm²/C Surface 2 : 80 Nm²/C Surface 3 : 0 Nm²/C
3. 251,3 Nm²/C ou -251,3 Nm²/C
4. 30 000 Nm²/C ou -30 000 Nm²/C

3.2 Le théorème de Gauss

5. 225 882 Nm²/C
6. 20,36 nC
7. 1,129 x 10^6 Nm²/C
8. 2,996 x 10^6 N/C dans la direction opposée au centre de la tige.
9. 5,313 x 10^{-7} C/m²
10. a) 2,157 x 10^6 N/C dans la direction opposée au centre de la sphère
    b) 0 N/C
11. a) 1,438 x 10^6 N/C vers le centre de la sphère.
    b) 2,247 x 10^5 N/C vers le centre de la sphère.
12. a) 1,573 x 10^6 N/C dans la direction opposée au centre de la tige.
    b) 0 N/C
13. a) 3,236 x 10^6 N/C dans la direction opposée au centre de la tige.
    b) 7,19 x 10^5 N/C dans la direction opposée au centre de la tige.
14. a) 2,809 x 10^5 N/C vers le centre de la sphère
    b) 0 N/C
    c) 3,595 x 10^7 N/C vers le centre de la sphère
15. a) 1,498 x 10^7 N/C dans la direction opposée au centre de la tige.
    b) 1,348 x 10^7 N/C vers le centre de la tige
16. a) 1,595 x 10^7 N/C dans la direction opposée au centre de la sphère
    b) 6,866 x 10^5 N/C dans la direction opposée au centre de la sphère
    c) 0 N/C
17. a) 1,798 x 10^7 N/C dans la direction opposée au centre de la sphère.
    b) 3,559 x 10^6 N/C vers le centre de la sphère.
    c) 3,370 x 10^6 N/C vers le centre de la sphère.
18. a) 3,137 x 10^6 N/C dans la direction opposée au centre de la sphère.
    b) 3,486 x 10^6 N/C vers le centre de la sphère.
    c) 3,915 x 10^7 N/C vers le centre de la sphère.
19. a) 1,882 x 10^7 N/C dans la direction opposée au centre de la tige.
    b) 1,255 x 10^6 N/C vers le centre de la tige.
    c) 4,141 x 10^7 N/C vers le centre de la tige.
20. $E = \dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$

3.3 Autres preuves avec le théorème de Gauss

21. 7,19 x 10^6 N/C
22. 1,771 x 10^{-6} C/m²

Défis

23.a) $E = \dfrac{1}{\kappa\varepsilon_0}\rho_0\left(\dfrac{r}{3} - \dfrac{r^2}{4R}\right)$ b) $E = \dfrac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}$ c) $r = \dfrac{2R}{3}$