Solutionnaire du chapitre 11

1. a) L'inductance mutuelle est

$$\begin{aligned}M &= \frac{\mu_0 N_1 N_2}{\ell}\pi r^2\\ &= \frac{4\pi\times10^{-7}\,\frac{H}{m}\cdot 300\cdot 25}{0,25m}\cdot\pi\cdot(0,02m)^2\\ &= 4,737\times10^{-5}\,H\end{aligned}$$

b) La différence de potentiel est

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= \left|-M\frac{dI_1}{dt}\right|\\ &= 4,737\times10^{-5}\,H\cdot 250\,\tfrac{A}{s}\\ &= 0,01184V\end{aligned}$$

c) La différence de potentiel est

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= \left|-M\frac{dI_2}{dt}\right|\\ &= 4,737\times10^{-5}\,H\cdot 150\,\tfrac{A}{s}\\ &= 0,007106V\end{aligned}$$

2. Le taux de variation du courant est

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= \frac{d\left(50A\cdot\sin\left(400\,\frac{rad}{s}\cdot t\right)\right)}{dt}\\ &= 50A\cdot 400\,\tfrac{rad}{s}\cdot\cos\left(400\,\tfrac{rad}{s}\cdot t\right)\\ &= 20\,000\,\tfrac{A}{s}\cdot\cos\left(400\,\tfrac{rad}{s}\cdot t\right)\end{aligned}$$

À t = 0,1 s, ce taux est

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= 20\,000\,\tfrac{A}{s}\cdot\cos\left(400\,\tfrac{rad}{s}\cdot 0,1s\right)\\ &= -13\,339\,\tfrac{A}{s}\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= \left| -M\frac{dI_2}{dt} \right| \\ 0,06V &= M \cdot 13\,339\,\tfrac{A}{s} \\ M &= 4,498\times 10^{-6} H\end{aligned}$$

3. a) L'inductance mutuelle est

$$\begin{aligned}M &= \frac{\mu_0 N_1 N_2}{\ell}\pi r^2 \\ &= \frac{4\pi\times 10^{-7}\,\frac{H}{m}\cdot 310\cdot 4850}{4m}\cdot\pi\cdot(0,06m)^2 \\ &= 5,342\times 10^{-3} H\end{aligned}$$

b) Le taux de variation du courant dans le solénoïde 2 est

$$\begin{aligned}\frac{dI_2}{dt} &= \frac{d\left(80A\cdot\cos\left(500\,\frac{rad}{s}\,t\right)\right)}{dt} \\ &= -80A\cdot 500\,\tfrac{rad}{s}\cdot\sin\left(500\,\tfrac{rad}{s}\cdot t\right) \\ &= -40\,000\,\tfrac{A}{s}\cdot\sin\left(500\,\tfrac{rad}{s}\cdot t\right)\end{aligned}$$

À t = 0,12 s, ce taux est

$$\begin{aligned}\frac{dI_2}{dt} &= -40\,000\,\tfrac{A}{s}\cdot\sin\left(500\,\tfrac{rad}{s}\cdot 0,12s\right) \\ &= 12\,192\,\tfrac{A}{s}\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= \left| -M\frac{dI_2}{dt} \right| \\ &= 5,342\times 10^{-3} H\cdot 12\,192\,\tfrac{A}{s} \\ &= 65,13V\end{aligned}$$

4. a) L'auto-inductance est

$$\begin{aligned}L &= \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{\ell} \\ &= \frac{4\pi\times10^{-7}\,\tfrac{H}{m}\cdot(13)^2\cdot\pi(0{,}01m)^2}{0{,}03m} \\ &= 2{,}224\mu H\end{aligned}$$

b) la différence de potentiel est

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= \left|-L\frac{dI}{dt}\right| \\ &= 2{,}224\times10^{-6}H\cdot 50\tfrac{A}{s} \\ &= 0{,}1112mV\end{aligned}$$

5. a) La valeur de l'inductance est

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= \left|-L\frac{dI}{dt}\right| \\ 0{,}00086V &= L\cdot 10\tfrac{A}{s} \\ L &= 86\mu H\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}L &= \mu_r\frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{\ell}\in \\ 8{,}6\times10^{-5}H &= 200\cdot\frac{4\pi\times10^{-7}\,\tfrac{H}{m}\cdot N^2\cdot\pi\cdot(0{,}003m)^2}{0{,}04m} \\ N &= 22\end{aligned}$$

b) Le champ magnétique est

$$\begin{aligned}B &= \mu_r\frac{\mu_0 NI}{\ell} \\ &= 200\cdot\frac{4\pi\times10^{-7}\,\tfrac{H}{m}\cdot 22\cdot 0{,}05A}{0{,}04m} \\ &= 0{,}006912T\end{aligned}$$

6. a) En allant dans le sens du courant, la différence de potentiel est

$$\Delta V = -L\frac{dI}{dt}$$
$$-5V = -L\frac{dI}{dt}$$

Si on veut obtenir une valeur de – 5V, il faudra que d*I*/d*t* soit positive. Le courant est donc en train de monter.

b) La valeur de l'inductance est

$$-5V = -L\frac{dI}{dt}$$
$$-5V = -L\cdot 10\tfrac{A}{s}$$
$$L = 0,5H$$

7. L'inductance est

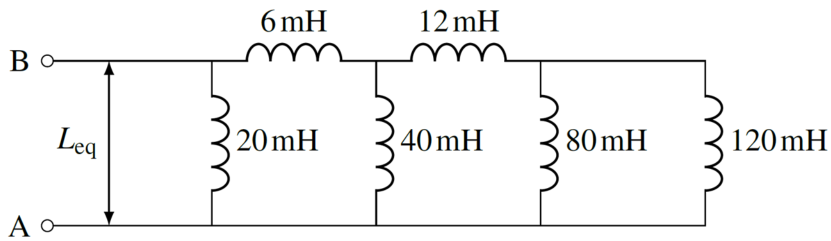
$$\begin{aligned} L &= \mu_r \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{\ell} \\ &= 200\cdot\frac{4\pi\times 10^{-7}\,\tfrac{H}{m}\cdot(300)^2\cdot\pi\cdot(0,06m)^2}{0,3m} \\ &= 0,8527H \end{aligned}$$

En allant dans le sens du courant, la différence de potentiel est, selon les lois de Kirchhoff.

$$\begin{aligned} \Delta V &= -RI - L\frac{dI}{dt} \\ &= -0,12\Omega\cdot 100A - 0,8527H\cdot\left(-50\tfrac{A}{s}\right) \\ &= -12V + 42,64V \\ &= 30,64V \end{aligned}$$

Une valeur positive signifie que le potentiel augmente quand on traverse le solénoïde dans le sens de la trajectoire qu'on avait faite, qui était ici dans le sens du courant. Le potentiel est donc plus élevé du côté gauche du solénoïde.

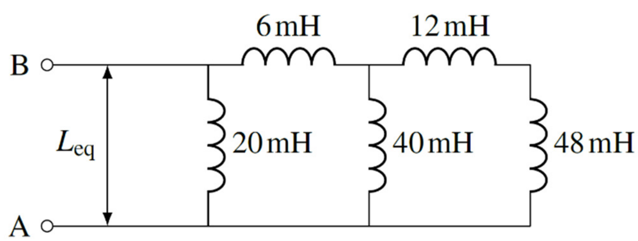
8. Les deux inducteurs de droite sont en série. Leur inductance équivalente est de L_{eq1} = 120 mH. On a alors le circuit suivant.



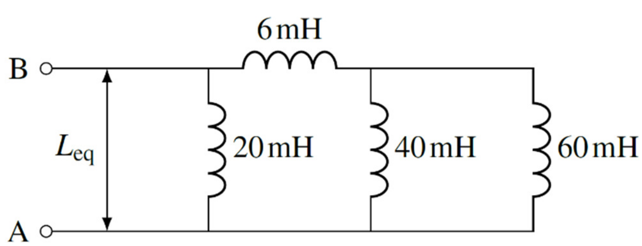
Cet inducteur de 120 mH est maintenant en parallèle avec l'inducteur de 80 mH. L'inductance équivalente est

$$\frac{1}{L_{eq2}} = \frac{1}{120mH} + \frac{1}{80mH}$$
$$L_{eq2} = 48mH$$

On a maintenant le circuit suivant.



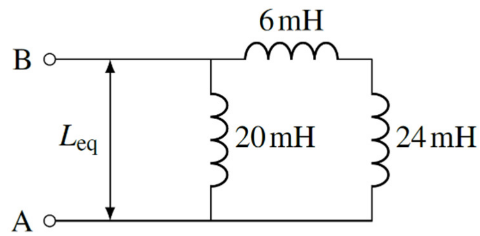
Les deux inducteurs de droite sont en série. Leur inductance équivalente est de L_{eq3} = 60 mH. On a alors le circuit suivant.



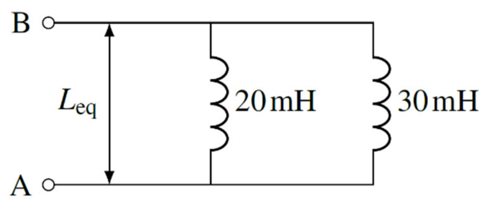
L'inducteur de 60 mH est maintenant en parallèle avec l'inducteur de 40 mH. L'inductance équivalente est

$$\frac{1}{L_{eq4}} = \frac{1}{60mH} + \frac{1}{40mH}$$
$$L_{eq4} = 24mH$$

On a maintenant le circuit suivant.



Les deux inducteurs de droite sont en série. Leur inductance équivalente est de L_{eq5} = 30 mH. On a alors le circuit suivant.

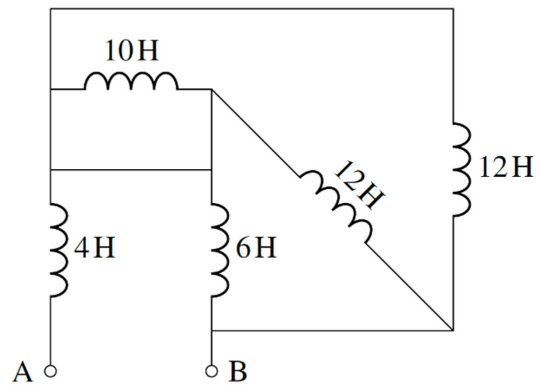


L'inducteur de 30 mH est maintenant en parallèle avec l'inducteur de 20 mH. L'inductance équivalente est

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{30mH} + \frac{1}{20mH}$$
$$L_{eq} = 12mH$$

C'est notre réponse finale.

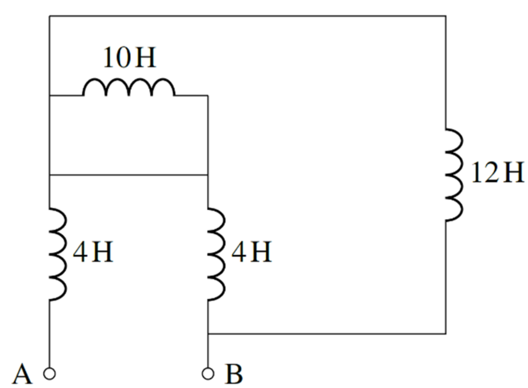
9. Premièrement, les inducteurs de 3 H et 9 H sont en série. Avec une inductance équivalente de 12 H, on arrive au circuit suivant.



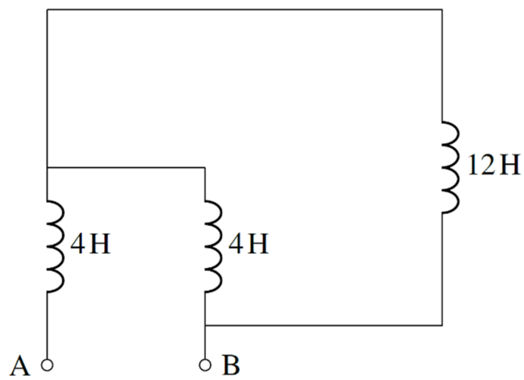
L'inducteur de 12 H sur le fil en diagonale est en parallèle avec l'inducteur de 6 H. L'inductance équivalente est

$$\frac{1}{L_{eq2}} = \frac{1}{12H} + \frac{1}{6H}$$
$$L_{eq2} = 4H$$

Il nous reste.



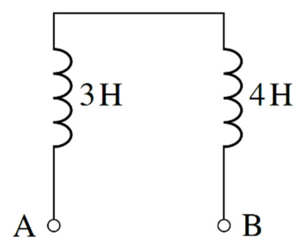
L'inducteur de 10 H étant court-circuité, on peut enlever la branche où se trouve cet inducteur pour arriver au circuit suivant.



L'inducteur de 12 H est en parallèle avec l'inducteur de 4 H à droite. L'inductance équivalente est

$$\frac{1}{L_{eq3}} = \frac{1}{12H} + \frac{1}{4H}$$
$$L_{eq3} = 3H$$

On a maintenant le circuit suivant.



L'inductance équivalente est donc de 7 H.

10. a) L'énergie est

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} L I^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0,05H \cdot (5A)^2 \\ &= 0,625J \end{aligned}$$

b) En allant dans le sens du courant, la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur est

$$\begin{aligned}\Delta V &= -L\frac{dI}{dt}\\ &= -0,05H\cdot(-2A)\\ &= 0,1V\end{aligned}$$

Une réponse positive signifie que le potentiel augmente en suivant le courant. Comme le courant ressort avec plus de potentiel, l'inducteur fournit de l'énergie. La puissance est

$$\begin{aligned}P &= \Delta V\cdot I\\ &= 0,1V\cdot 5A\\ &= 0,5W\end{aligned}$$

Encore une fois, une réponse positive signifie que l'inducteur fournit de la puissance.

11. L'inductance est

$$\begin{aligned}L &= \mu_r\frac{\mu_0 N^2\pi r^2}{\ell}\\ &= 200\cdot\frac{4\pi\times10^{-7}\frac{H}{m}\cdot(3000)^2\cdot\pi\cdot(0,002m)^2}{0,05m}\\ &= 0,5685H\end{aligned}$$

L'énergie est alors

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2}LI^2\\ &= \frac{1}{2}\cdot 0,5685H\cdot(10A)^2\\ &= 28,42J\end{aligned}$$

12. a) La densité d'énergie est

$$\begin{aligned} u_B &= \frac{1}{2\mu_0} B^2 \\ &= \frac{1}{2 \cdot 4\pi \times 10^{-7} \frac{H}{m}} \cdot (0{,}00005T)^2 \\ &= 9{,}947 \times 10^{-4} \tfrac{J}{m^3} \end{aligned}$$

b) L'énergie est

$$\begin{aligned} U_B &= u_B \cdot volume \\ &= 9{,}947 \times 10^{-4} \tfrac{J}{m^3} \cdot (1000m)^3 \\ &= 994\,718J \end{aligned}$$

13. Avec une telle densité d'énergie, le champ doit être

$$\begin{aligned} u_B &= \frac{1}{2\mu_0} B^2 \\ 1 \tfrac{J}{m^3} &= \frac{1}{2 \cdot 4\pi \times 10^{-7} \frac{H}{m}} \cdot B^2 \\ B &= 0{,}001585T \end{aligned}$$

Le courant doit donc être le suivant.

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 N I}{\ell} \\ 0{,}001585T &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \frac{H}{m} \cdot 500 \cdot I}{0{,}05m} \\ I &= 0{,}1262A \end{aligned}$$

14. a) À t = 0,4 s, le courant est donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right) \\ &= \frac{50V}{2\Omega} \cdot \left(1 - e^{\frac{-2\Omega \cdot 0{,}4s}{0{,}4H}}\right) \\ &= 21{,}62A \end{aligned}$$

b) La différence de potentiel aux bornes de la résistance est

$$\begin{aligned}\Delta V_R &= RI \\ &= 2\Omega \cdot 21,62A \\ &= 43,23V\end{aligned}$$

Ainsi, la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur est

$$\begin{aligned}\Delta V_L &= \Delta V_{source} - \Delta V_R \\ &= 50V - 43,23V \\ &= 6,77V\end{aligned}$$

c) On peut trouver le rythme d'augmentation du courant avec

$$\Delta V_L = \left| -L\frac{dI}{dt} \right|$$

$$6,77V = 0,4H \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = 16,92\tfrac{A}{s}$$

d) Le temps se trouve ainsi

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$$

$$0,9 \cdot \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{\mathscr{E}}{R} \cdot \left(1 - e^{\frac{-2\Omega \cdot t}{0,4H}}\right)$$

$$0,9 = 1 - e^{\frac{-t}{0,2s}}$$

$$e^{\frac{-t}{0,2s}} = 0,1$$

$$\frac{-t}{0,2s} = \ln(0,1)$$

$$t = -0,2s \cdot \ln(0,1)$$

$$t = 0,4605s$$

15. a) Le courant maximum est

$$
\begin{aligned}
I_{\max} &= \frac{\mathcal{E}}{R} \\
&= \frac{120V}{8\Omega} \\
&= 15A
\end{aligned}
$$

b) L'inductance équivalente est de

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{L_{eq}} &= \frac{1}{200mH} + \frac{1}{300mH} \\
L_{eq} &= 120mH
\end{aligned}
$$

Le courant est donc

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right) \\
&= \frac{120V}{8\Omega} \cdot \left(1 - e^{\frac{-8\Omega \cdot 0,02s}{0,12H}}\right) \\
&= 11,05A
\end{aligned}
$$

c) La puissance fournie par la pile est

$$
\begin{aligned}
P &= \Delta V \cdot I \\
&= 120V \cdot 11,05A \\
&= 1325,5W
\end{aligned}
$$

d) La puissance dissipée en chaleur par la résistance est

$$
\begin{aligned}
P_R &= RI^2 \\
&= 8\Omega \cdot (11,05A)^2 \\
&= 976,1W
\end{aligned}
$$

e) Puisque la source fournie par pile est de 1325,5 W et que la résistance en dissipe 976,1 W, la puissance qu'il reste pour les inducteurs est

$$
\begin{aligned}
P_L &= P_{source} - P_R \\
&= 1325,5W - 976,1W \\
&= 349,4W
\end{aligned}
$$

16. On a

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$$

$$0,4\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$$

$$0,4 = 1 - e^{\frac{-Rt}{L}}$$

$$e^{\frac{-Rt}{L}} = 0,6$$

$$\frac{-Rt}{L} = \ln(0,6)$$

$$\frac{-40\Omega \cdot 1s}{L} = \ln(0,6)$$

$$L = 78,3H$$

17. On a

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$$

$$0,1\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-R \cdot 4s}{L}}\right)$$

$$0,1 = 1 - e^{\frac{-R \cdot 4s}{L}}$$

$$e^{\frac{-R \cdot 4s}{L}} = 0,9$$

$$\frac{-R \cdot 4s}{L} = \ln(0,9)$$

$$\frac{R}{L} = \frac{-\ln(0,9)}{4s}$$

$$\frac{R}{L} = 0,02634s^{-1}$$

Pour 95 % du courant maximum, on aura donc

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$$
$$0,95\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-0,02634s^{-1}\cdot t}\right)$$
$$0,95 = 1 - e^{-0,02634s^{-1}\cdot t}$$
$$e^{-0,02634s^{-1}\cdot t} = 0,05$$
$$-0,02634s^{-1}\cdot t = \ln(0,05)$$
$$t = \frac{\ln(0,05)}{-0,02634s^{-1}}$$
$$t = 113,7s$$

18. a) Au bout d’un temps très long, le courant dans le circuit (la grande maille) est

$$\begin{aligned} I &= \frac{\mathcal{E}}{R} \\ &= \frac{50V}{100\Omega} \\ &= 0,5A \end{aligned}$$

Ce sera le courant initial de la maille de droite quand on mettra l’interrupteur à la position *b*. Au bout de 0,5 ms, le courant est maintenant

$$\begin{aligned} I &= I_0 e^{\frac{-Rt}{L}} \\ &= 0,5A\cdot e^{\frac{-140\Omega\cdot 0,0005s}{0,1H}} \\ &= 0,2483A \end{aligned}$$

b) La différence de potentiel aux bornes de la résistance équivalente est

$$\begin{aligned} \Delta V &= RI \\ &= 140\Omega\cdot 0,2483V \\ &= 34,76V \end{aligned}$$

Puisque l’inducteur est en parallèle avec la résistance équivalente, la différence de potentiel aux bornes de l’inducteur est aussi de 34,76 V.

c) On trouve le temps avec

$$
\begin{aligned}
I &= I_0 e^{\frac{-Rt}{L}} \\
0{,}1A &= 0{,}5A \cdot e^{\frac{-140\Omega \cdot t}{0{,}1H}} \\
0{,}2 &= e^{\frac{-140\Omega \cdot t}{0{,}1H}} \\
\ln(0{,}2) &= \frac{-140\Omega \cdot t}{0{,}1H} \\
t &= \frac{-0{,}1H \cdot \ln(0{,}2)}{140\Omega} \\
t &= 1{,}15ms
\end{aligned}
$$

19. a) Le courant va monter pendant 1 ms. À la fin de la période de montée, le courant est

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right) \\
&= \frac{240V}{50\Omega} \cdot \left(1 - e^{-\frac{50\Omega \cdot 0{,}001s}{0{,}02H}}\right) \\
&= 4{,}406A
\end{aligned}
$$

On aura ce courant comme courant initial pendant la phase de baisse du courant, qui commence quand on met l'interrupteur à la position 2. Cette phase de baisse dure 0,5 ms. Après 0,5 ms de baisse, le courant est

$$
\begin{aligned}
I &= I_0 e^{\frac{-Rt}{L}} \\
&= 4{,}406A \cdot e^{\frac{-50\Omega \cdot 0{,}0005s}{0{,}02H}} \\
&= 1{,}262A
\end{aligned}
$$

b) L'énergie dissipée par la résistance correspond à l'énergie perdue par l'inducteur pendant la période de baisse du courant. Au début de cette phase, l'énergie de l'inducteur est

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} L I^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot 0{,}02H \cdot (4{,}406A)^2 \\
&= 0{,}19413J
\end{aligned}
$$

0,5 ms plus tard, l'énergie est

$$\begin{aligned} U' &= \frac{1}{2} L I'^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0,02H \cdot (1,262A)^2 \\ &= 0,01593J \end{aligned}$$

La perte d'énergie est donc

$$\begin{aligned} \Delta U &= U' - U \\ &= 0,01593J - 0,19413J \\ &= -0,1782J \end{aligned}$$

Cette perte d'énergie se fait en chaleur dans les résistances. L'énergie dissipée est donc de 0,1782 J.

20. a) L'inductance est

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{\ell} \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \frac{H}{m} \cdot (200)^2 \cdot \pi \cdot (0,025m)^2}{0,2m} \\ &= 4,935 \times 10^{-4} H \end{aligned}$$

La résistance du fil est

$$\begin{aligned} R &= \rho \frac{l}{\pi r^2} \\ &= 1,678 \times 10^{-8} \Omega m \cdot \frac{200 \cdot 2\pi \cdot 0,025m}{\pi \cdot (0,001m)^2} \\ &= 0,1678\Omega \end{aligned}$$

Le courant sera donc de

$$\begin{aligned} I &= \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1-e^{\frac{-Rt}{L}}\right) \\ &= \frac{100V}{0,1678\Omega}\cdot\left(1-e^{-\frac{0,1678\Omega\cdot 0,001s}{4,935\times10^{-4}H}}\right) \\ &= 171,8A \end{aligned}$$

Le champ est donc

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 NI}{\ell} \\ &= \frac{4\pi\times10^{-7}\,\frac{H}{m}\cdot 200\cdot 171,78A}{0,2m} \\ &= 0,2159T \end{aligned}$$

b) Puisque le solénoïde est en parallèle avec la source, la différence de potentiel aux bornes du solénoïde doit être de 100 V.

(Vous pouvez aussi vérifier dans vos temps libres que

$$-RI - L\frac{dI}{dt}$$

donne aussi -100 V.)

21. a) Trouvons premièrement la fréquence angulaire

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{0,04H\cdot 100\times10^{-6}F}} \\ &= 500\,\frac{rad}{s} \end{aligned}$$

La fréquence est donc

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega_0}{2\pi} \\ &= \frac{500 \frac{rad}{s}}{2\pi} \\ &= 79,58 Hz \end{aligned}$$

b) Le courant maximal est égal à l'amplitude

$$\begin{aligned} I_0 &= Q_0 \omega_0 \\ &= 20 \times 10^{-6} C \cdot 500 \tfrac{rad}{s} \\ &= 0,01 A \end{aligned}$$

c) Le courant est

$$\begin{aligned} I &= -Q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \\ &= -0,01 A \cdot \sin\left(500 \tfrac{rad}{s} \cdot 0,001 s\right) \\ &= -4,794 mA \end{aligned}$$

Le courant est donc de 4,794 mA.

22. a)

Initialement, toute l'énergie dans le condensateur. L'énergie du système est donc égale à l'énergie initiale du condensateur.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} C \Delta V_{\max}^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0,03 F \cdot (100 V)^2 \\ &= 150 J \end{aligned}$$

b) On a

$$150 J = U_C + U_L$$

Puisqu'on veut que les deux énergies soient égales, on doit avoir $U_C = U_L$. On a donc

$$\begin{aligned} 150 J &= U_C + U_C \\ U_C &= 75 J \end{aligned}$$

La charge du condensateur doit donc être de

$$75J = \frac{Q^2}{2C}$$
$$75J = \frac{Q^2}{2 \cdot 0,03F}$$
$$Q^2 = 4,32C^2$$
$$Q = \pm 2,121C$$

La charge initiale est

$$\begin{aligned} Q_0 &= C\Delta V_0 \\ &= 0,03F \cdot 100V \\ &= 3C \end{aligned}$$

La fréquence angulaire est

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{0,012H \cdot 0,03F}} \\ &= 52,70 \tfrac{rad}{s} \end{aligned}$$

Si la charge est 2,121 C, on a (ne pas oublier qu'il y a 2 réponses à arccos qui sont la réponse donnée par la calculatrice et – la réponse donnée par la calculatrice.)

$$Q = Q_0 \cos(\omega_0 t)$$
$$2,121C = 3C \cdot \cos\left(52,70 \tfrac{rad}{s} \cdot t\right)$$
$$0,7071 = \cos\left(52,70 \tfrac{rad}{s} \cdot t\right)$$

$$\swarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \searrow$$

$$\frac{\pi}{4} = 52,70 \tfrac{rad}{s} \cdot t_1 \qquad\qquad -\frac{\pi}{4} = 52,70 \tfrac{rad}{s} \cdot t_2$$
$$t_1 = 0,0149s = 14,9ms \qquad\qquad t_2 = -0,0149s = -14,9ms$$

Comme la même configuration se répète à toutes les périodes, on ramène la 2^e réponse à une réponse positive en ajoutant la période. La période étant

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{2\pi}{\omega_0} \\
&= \frac{2\pi}{52,70\frac{rad}{s}} \\
&= 0,1192s = 119,2ms
\end{aligned}
$$

Nos deux premières réponses sont

$$
\begin{aligned}
t_1 &= 14,9ms \\
t_2 &= -14,9ms + 119,2ms = 104,3ms
\end{aligned}
$$

Si la charge est de -2,121 C, on a

$$
\begin{aligned}
Q &= Q_0 \cos(\omega_0 t) \\
-2,121C &= 3C \cdot \cos\left(52,70\tfrac{rad}{s} \cdot t\right) \\
-0,7071 &= \cos\left(52,70\tfrac{rad}{s} \cdot t\right)
\end{aligned}
$$

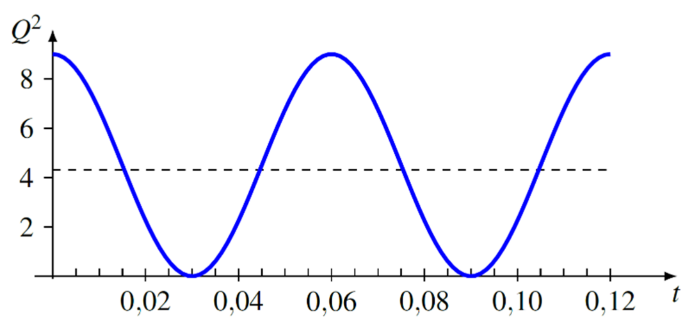
$$\swarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \searrow$$

$$
\begin{aligned}
\frac{3\pi}{4} &= 52,70\tfrac{rad}{s} \cdot t_3 & \qquad -\frac{3\pi}{4} &= 52,70\tfrac{rad}{s} \cdot t_4 \\
t_3 &= 0,04471s = 44,71ms & \qquad t_4 &= -0,04471s = -44,71ms
\end{aligned}
$$

Comme la même configuration se répète à toutes les périodes, on ramène la 2e réponse positive en ajoutant la période. Nos deux dernières réponses sont donc

$$
\begin{aligned}
t_3 &= 44,7ms \\
t_4 &= -44,7ms + 119,2ms = 74,5ms
\end{aligned}
$$

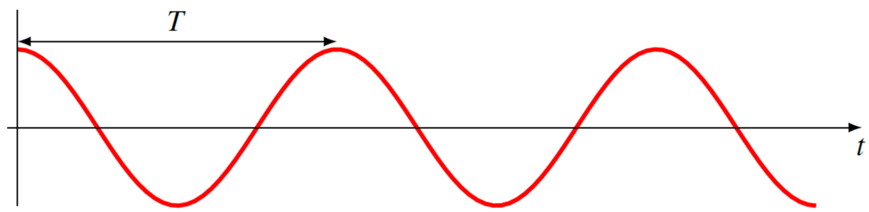
On peut comprendre pourquoi on a ces 4 valeurs en examinant le graphique de $Q^2 = 9\ C^2 \cos^2(52,70s^{-1} \cdot t)$ sur un cycle.



La ligne pointillée montre Q^2 = 4,32 C^2. On voit qu'on a cette valeur 4 fois par cycle.

La première fois est donc à t = 14,9 ms.

23. Si on passe d'un condensateur plein à un condensateur vide, c'est qu'il s'est écoulé ¼ de période.



Le temps est donc

$$t = \frac{T}{4}$$
$$t = \frac{1}{4} 2\pi\sqrt{LC}$$
$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$$
$$0,001s = \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{L\cdot 500\times 10^{-6}F}$$
$$L = 8,106\times 10^{-4}H$$

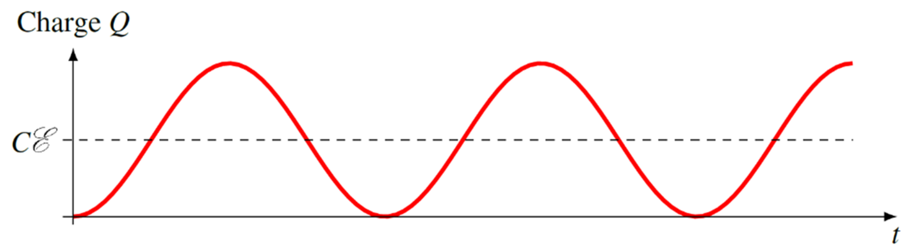
24. a) Trouvons premièrement la fréquence angulaire

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{0,04H\cdot 100\times 10^{-6}F}} \\ &= 500\tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

La fréquence est donc

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega_0}{2\pi} \\ &= \frac{500\,\frac{rad}{s}}{2\pi} \\ &= 79,58Hz \end{aligned}$$

b) On atteint la charge maximale au bout d'un demi-cycle.



Puisqu'il s'agit d'une oscillation ayant une amplitude égale à $C\mathscr{E}$ centrée autour de $C\mathscr{E}$, la valeur maximale doit être de $2C\mathscr{E}$. La charge maximale est donc de

$$\begin{aligned} Q_{\max} &= 2C\mathscr{E} \\ &= 2\cdot 100\times 10^{-6}F\cdot 20V \\ &= 4mC \end{aligned}$$

c) La charge est

$$\begin{aligned} Q &= C\mathscr{E}\left(1-\cos\omega_0 t\right) \\ &= 100\times 10^{-6}F\cdot 20V\cdot\left(1-\cos\left(500\,\tfrac{rad}{s}\cdot 0,01s\right)\right) \\ &= 1,43mC \end{aligned}$$

d) Le courant est

$$I = C\mathscr{E}\omega_0 \sin\omega_0 t$$

La valeur maximale est donc

$$\begin{aligned} I_0 &= C\mathscr{E}\omega_0 \\ &= 100\times 10^{-6}F\cdot 20V\cdot 500\,\tfrac{rad}{s} \\ &= 1A \end{aligned}$$

25. a) On a

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{R}{2L}\\ &= \frac{10\Omega}{2\cdot 5H}\\ &= 1s^{-1}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\omega' &= \sqrt{\frac{1}{LC}-\alpha^2}\\ &= \sqrt{\frac{1}{5H\cdot 0,02F}-\left(1s^{-1}\right)^2}\\ &= 3\tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

La période est donc

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{\omega'}\\ &= \frac{2\pi}{3\frac{rad}{s}}\\ &= 2,094s\end{aligned}$$

b) La charge est

$$\begin{aligned}Q &= Q_0 e^{-\alpha t}\left(\cos\omega' t + \frac{\alpha}{\omega'}\sin\omega' t\right)\\ &= 0,4C\cdot e^{-1s^{-1}\cdot 3s}\cdot\left(\cos\left(3\tfrac{rad}{s}\cdot 3s\right)+\frac{1}{3}\sin\left(3\tfrac{rad}{s}\cdot 3s\right)\right)\\ &= -0,01541C\end{aligned}$$

c) Le courant est

$$\begin{aligned}I &= -\frac{Q_0}{\omega' LC}e^{-\alpha t}\sin\omega' t\\ &= -\frac{0,4C}{3\frac{rad}{s}\cdot 5H\cdot 0,02F}\cdot e^{-1s^{-1}\cdot 3s}\cdot\sin\left(3\tfrac{rad}{s}\cdot 3s\right)\\ &= -0,02736A\end{aligned}$$

26. Si on veut qu'il y ait des oscillations, on doit avoir

$$\frac{1}{LC} > \alpha^2$$
$$\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2$$
$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$$
$$\frac{4L}{C} > R^2$$
$$\frac{4\cdot 0,4H}{50\times 10^{-6}F} > R^2$$
$$32\,000\Omega^2 > R^2$$
$$178,9\Omega > R$$

La résistance doit donc être inférieure à 178,9 Ω.

27. a) On a

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{R}{2L}\\ &= \frac{1\Omega}{2\cdot 0,5H}\\ &= 1s^{-1}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\omega' &= \sqrt{\frac{1}{LC}-\alpha^2}\\ &= \sqrt{\frac{1}{0,5H\cdot 0,04F}-\left(1s^{-1}\right)^2}\\ &= 7\,\tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

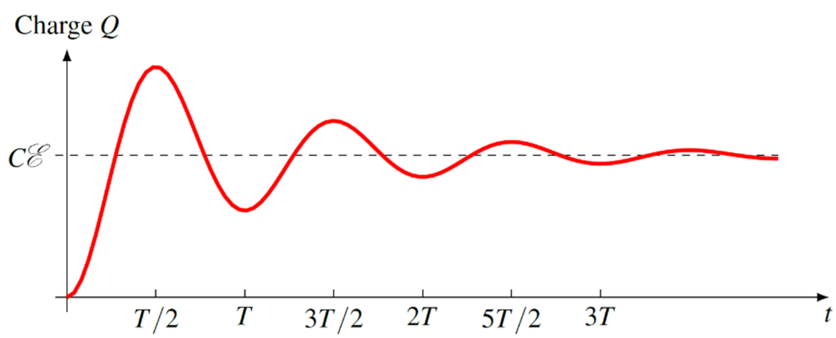
La période est donc

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega'} \\ &= \frac{2\pi}{7\frac{rad}{s}} \\ &= 0,8976s \end{aligned}$$

b) La charge est

$$\begin{aligned} Q &= C\mathscr{E}\left(1-e^{-\alpha t}\left(\cos\omega' t+\frac{\alpha}{\omega'}\sin\omega' t\right)\right) \\ &= 40\times10^{-3}F\cdot20V\cdot\left(1-e^{-1s^{-1}\cdot0,2s}\cdot\left(\cos\left(7\tfrac{rad}{s}\cdot0,2s\right)+\frac{1}{7}\cdot\sin\left(7\tfrac{rad}{s}\cdot0,2s\right)\right)\right) \\ &= 0,5965C \end{aligned}$$

c) Voici le graphique de la charge en fonction du temps.



Au bout d'un temps très long, la valeur de la charge se stabilise à $C\mathscr{E}$. La charge est donc

$$\begin{aligned} Q &= C\mathscr{E} \\ &= 40\times10^{-3}F\cdot20V \\ &= 0,8C \end{aligned}$$

d) Le maximum de la charge se produit une demi-période après le début de la charge, donc à t = 0,4488 s. À ce moment, le sinus vaut 0 et le cosinus vaut -1.

$$\begin{aligned} Q &= C\mathscr{E}\left(1-e^{-\alpha t}\left(\cos\omega' t+\frac{\alpha}{\omega'}\sin\omega' t\right)\right) \\ &= 40\times10^{-3}F\cdot20V\cdot\left(1-e^{-1s^{-1}\cdot0,4488s}\cdot(-1+0)\right) \\ &= 1,311C \end{aligned}$$

e) La formule du courant est

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\omega' L} e^{-\alpha t} \sin \omega' t$$

Au maximum du courant, on a $dI/dt = 0$. On a donc

$$\begin{gathered}
\frac{dI}{dt} = 0 \\
\frac{d\left(\frac{\mathcal{E}}{\omega' L} e^{-\alpha t} \sin \omega' t\right)}{dt} = 0 \\
\frac{\mathcal{E}}{\omega' L}\left(-\alpha e^{-\alpha t} \sin \omega' t + e^{-\alpha t} \omega' \cos \omega' t\right) = 0 \\
-\alpha \sin \omega' t + \omega' \cos \omega' t = 0 \\
\alpha \sin \omega' t = \omega' \cos \omega' t \\
\tan \omega' t = \frac{\omega'}{\alpha} \\
\tan\left(7 \tfrac{rad}{s} \cdot t\right) = 7 \\
7 \tfrac{rad}{s} \cdot t = 1,4289 + n\pi \\
t = 0,20413 s + n\frac{\pi}{7}
\end{gathered}$$

La première réponse positive est

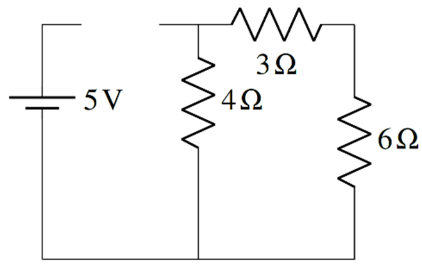
$$t = 0,20413 s$$

e) À ce moment, le courant

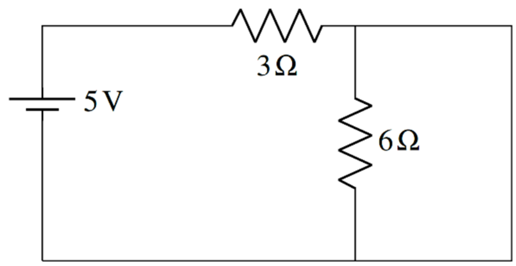
$$\begin{aligned}
I &= \frac{\mathcal{E}}{\omega' L} e^{-\alpha t} \sin \omega' t \\
&= \frac{20V}{7 \tfrac{rad}{s} \cdot 0,5H} \cdot e^{-1s^{-1} \cdot 0,20413s} \cdot \sin\left(7 \tfrac{rad}{s} \cdot 0,21413s\right) \\
&= 4,612A
\end{aligned}$$

28. a)

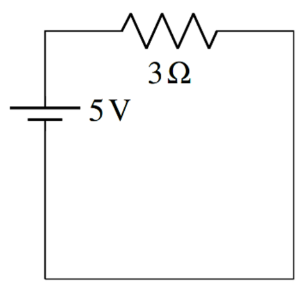
À $t = 0$, les inducteurs bloquent le courant. Comme il y a un inducteur sur la branche sur laquelle on retrouve la source, le courant fourni par la source est donc nul.



b) À $t = \infty$, les condensateurs bloquent le courant et les inducteurs n'ont plus d'effet. On enlève donc les branches avec des condensateurs et on remplace les inducteurs par des fils. On a alors le circuit suivant.



Comme la résistance de 6 Ω est court-circuitée, on enlève la branche de cette résistance et on arrive au circuit suivant.

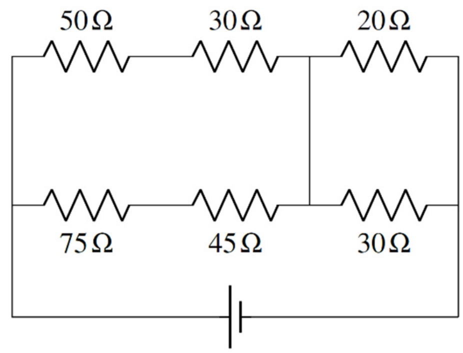


Le courant est donc

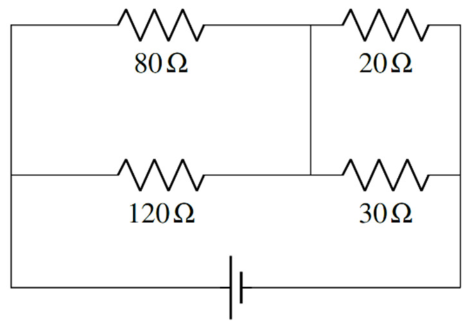
$$I = \frac{5V}{3\Omega} = 1,667A$$

29. a)

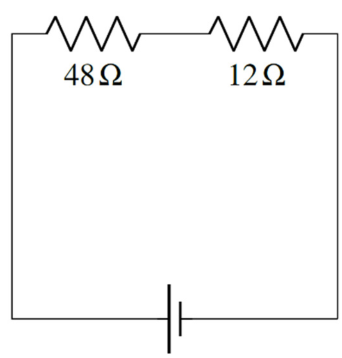
À $t = 0$, les inducteurs bloquent le courant et les condensateurs n'ont pas d'effet. On enlève donc les branches avec des inducteurs et on remplace les condensateurs par des fils. On a alors le circuit suivant.



Ce qui donne le circuit suivant.



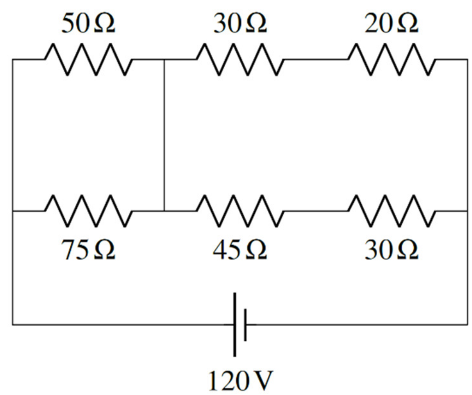
En prenant les résistances en parallèle équivalentes, on arrive au circuit suivant.



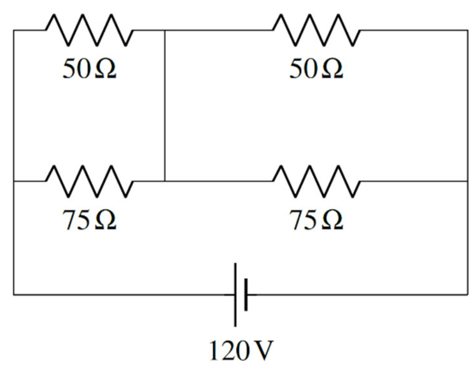
La résistance équivalente étant donc de 60 Ω, le courant est

$$I = \frac{120V}{60\Omega} = 2A$$

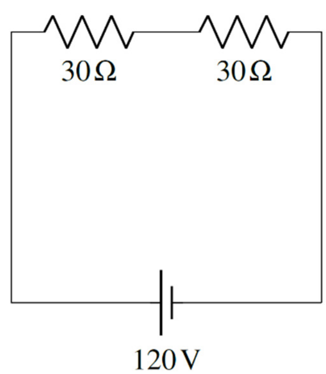
b) À $t = \infty$, les condensateurs bloquent le courant et les inducteurs n'ont plus d'effet. On enlève donc les branches avec des condensateurs et on remplace les inducteurs par des fils. On a alors le circuit suivant.



Ce qui donne le circuit suivant.



En prenant les résistances en parallèle équivalentes, on arrive au circuit suivant.



La résistance équivalente étant donc de 60 Ω, le courant est

$$I = \frac{120V}{60\Omega} = 2A$$