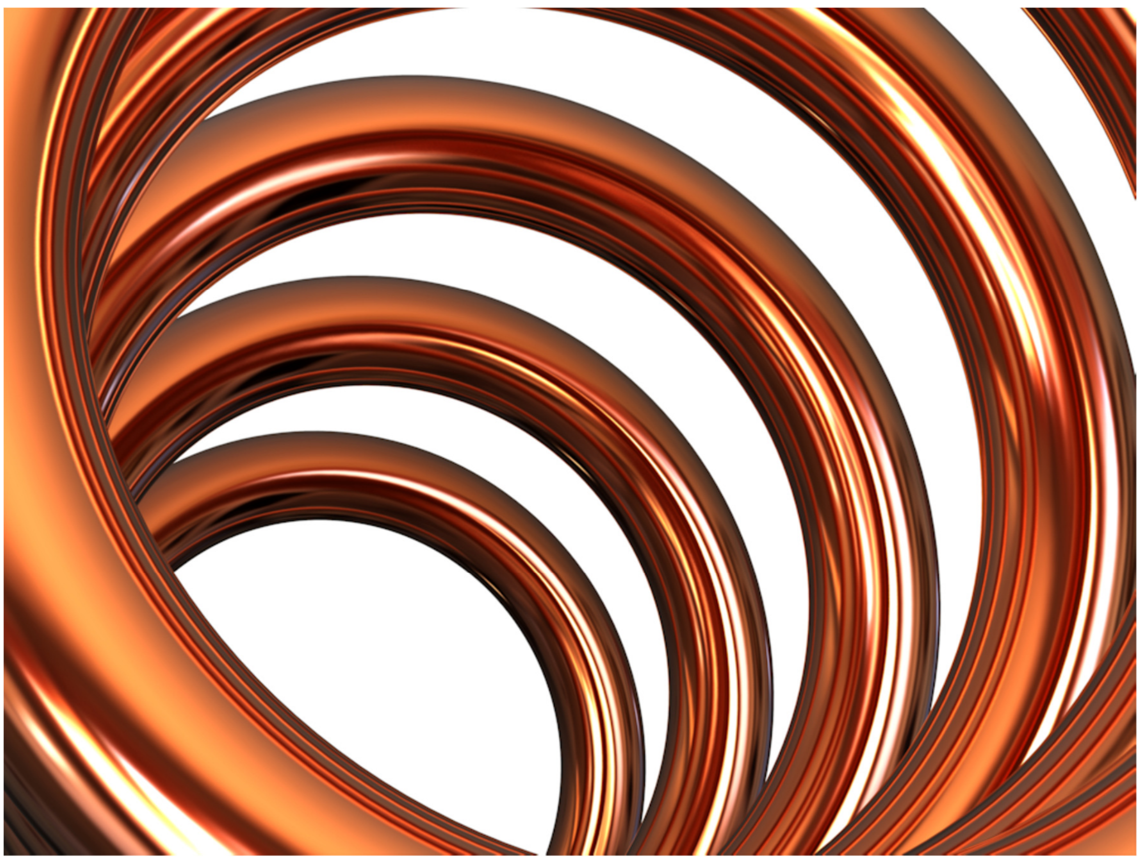
11 LES INDUCTEURS

Le solénoïde montré sur la figure a une inductance de 200 mH et est traversé par un courant de 100 A. Le fil qui forme le solénoïde a une résistance de 0,05 Ω. Quelle est la différence de potentiel entre les deux extrémités du solénoïde si le courant augmente au rythme de 50 A/s ?



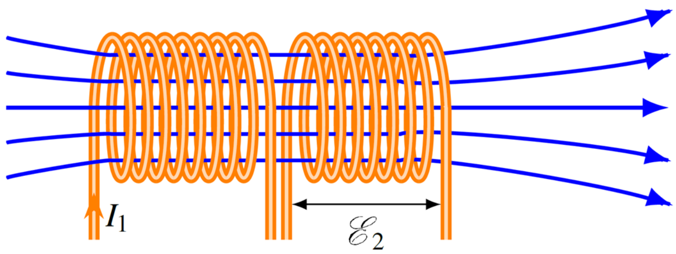
www.copperconsultancy.com/about-us/about-copper/

Découvrez comment résoudre ce problème dans ce chapitre.

11.1 L'INDUCTANCE MUTUELLE

Définition de l'inductance mutuelle

Nous allons développer ici un raccourci pour calculer la différence de potentiel induite. Bien qu'on puisse le faire pour des boucles de fils de n'importe quelle forme, on va prendre deux solénoïdes près l'un de l'autre pour illustrer la situation.



Si le courant I_1 varie, on a alors la séquence suivante :

- Si le courant I_1 varie, alors le champ fait par le solénoïde 1 (B_1) varie.
- Si le champ B_1 varie, alors le flux fait dans le solénoïde 2 (ϕ_2) varie.
- Si le flux ϕ_2 varie, alors il y a une différence de potentiel induite aux bornes du solénoïde 2 ($\mathscr{E}_2$).

Tout ça pour dire que si I_1 varie, alors il y a une différence de potentiel induite aux bornes du solénoïde 2 ($\mathscr{E}_2$). On veut pouvoir trouver $\mathscr{E}_2$ directement à partir de dI_1/dt.

Premièrement, on sait que la différence de potentiel induite est

$$\mathscr{E}_2 = -N_2 \frac{d\phi_2}{dt}$$

Comme le flux est proportionnel au champ fait par la bobine 1

$$\phi_2 \propto B_1$$

et que le champ est proportionnel au courant dans la bobine 1

$$B_1 \propto I_1$$

On devrait avoir que

$$\phi_2 \propto I_1$$

et donc que

$$\mathscr{E}_2 \propto -\frac{dI_1}{dt}$$

Cela veut dire que

Définition de l'inductance mutuelle

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$$

où M, appelée l'*inductance mutuelle*, est la constante de proportionnalité entre $\mathcal{E}_2$ et dI_1/dt.

Remarquez que l'effet peut se faire dans le sens inverse, ce qui signifie qu'une variation de courant dans le circuit 2 entraine la création d'une force électromotrice dans le circuit 1.

$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{dI_2}{dt}$$

Ce qui est remarquable, c'est que la valeur de M est exactement la même quand on inverse le rôle des bobines. Le choix que vous allez faire pour désigner un circuit comme étant le « circuit 1 » et l'autre circuit comme étant le « circuit 2 » n'a donc aucune influence et ce choix est arbitraire. (Pour ceux qui veulent voir la preuve que la valeur de M reste la même si on inverse les bobines, la voici :
http://physique.merici.ca/electricite/Imutuelle.pdf)

Comme $\mathcal{E}_2$ est en volts et que dI_1/dt est en ampères par seconde, M doit être en Vs/A. On a donné le nom de *henry* à cette unité.

Le henry (H)

$$1H = 1\tfrac{Vs}{A}$$

Calcul de l'inductance mutuelle

La valeur de M dépend de la forme et de la position des deux circuits (celui où le courant circule et l'autre où il y a un courant induit). Comme la différence de potentiel induite peut être calculée avec ces deux formules.

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\phi_2}{dt} \qquad \mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$$

On doit avoir

$$N_2 \frac{d\phi_2}{dt} = M \frac{dI_1}{dt}$$

Puisque M et N_2 sont des constantes, on peut écrire

$$\frac{d\left(N_2\phi_2\right)}{dt} = \frac{d\left(MI_1\right)}{dt}$$

En intégrant, on a

$$N_2\phi_2 = MI_1$$

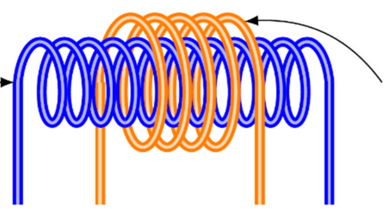
(Il n'y a pas de constante d'intégration, car le flux est nul si le courant est nul). On a finalement l'équation suivante.

$$M = \frac{N_2\phi_2}{I_1}$$

Ça semble simple à calculer, mais ce ne l'est pas. Pour obtenir la valeur du flux, il faut connaitre le champ magnétique fait par le courant I_1 partout à l'intérieur du circuit 2. On a vu au chapitre 9 que le calcul du champ magnétique n'est pas toujours facile. Une fois qu'on a le champ partout à l'intérieur du circuit, on doit l'intégrer sur toute la surface délimitée par le circuit pour calculer le flux dans le circuit, ce qui peut être aussi un bon défi.

Inductance mutuelle de deux solénoïdes ayant le même axe

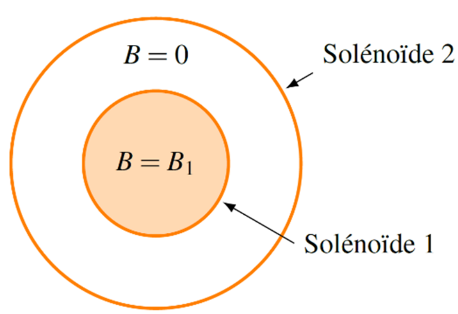
Il n'y a en fait qu'un seul cas simple : deux solénoïdes coaxiaux.



Pour trouver le flux que le solénoïde 1 fait dans le solénoïde 2, on doit trouver le champ fait par le solénoïde 1 dans l'autre solénoïde. C'est facile parce qu'à l'intérieur d'un solénoïde, le champ est uniforme et vaut

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{\ell_1}$$

Le flux dans le solénoïde 2 est facile à calculer puisque le champ est uniforme. Toutefois, il n'y a pas du champ partout à l'intérieur du solénoïde puisque le petit solénoïde ne fait que du champ à l'intérieur du petit solénoïde. On a donc la situation illustrée sur la figure. Pour calculer le flux, on doit donc prendre uniquement l'aire du solénoïde 1.



$$\begin{aligned}\phi_2 &= B_1 A_1 \\ &= \frac{\mu_0 N_1 I_1}{\ell_1}\pi r_1^2\end{aligned}$$

L'inductance mutuelle est donc

$$M = \frac{N_2 \phi_2}{I_1}$$
$$= \frac{N_2 \frac{\mu_0 N_1 I_1}{\ell_1} \pi r_1^2}{I_1}$$

Ce qui donne

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{\ell_1} \pi r_1^2$$

En fait, cette formule permet de calculer l'inductance mutuelle de tous les cas où un solénoïde entoure un autre solénoïde. Dans ce cas, on a

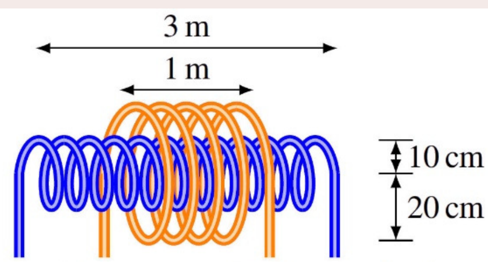
L'inductance mutuelle de deux solénoïdes coaxiaux

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{\ell} \pi r^2$$

où r est le rayon du solénoïde ayant le plus petit rayon et ℓ est toujours la longueur du solénoïde le plus long.

Exemple 11.1.1

Voici les deux solénoïdes ayant le même axe.



Le solénoïde interne a 3 000 tours de fil
Le solénoïde externe a 500 tours de fil

a) Quelle est l'inductance mutuelle ?

L'inductance mutuelle est

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{\ell} \pi r^2$$
$$= \frac{4\pi \times 10^{-7} \frac{Tm}{A} \cdot 3000 \cdot 500}{3m} \cdot \pi \cdot (0,1m)^2$$
$$= 0,01974H = 19,74mH$$

b) Quelle est la différence de potentiel induite dans le solénoïde ayant un rayon de 20 cm à t = 2 s si le courant dans le solénoïde ayant un rayon de 10 cm est donné par la formule suivante ?

$$I = 10A \sin\left(100 \tfrac{rad}{s} t\right)$$

La différence de potentiel est donnée par la formule suivante.

$$\mathcal{E}_2 = \left| -M\frac{dI_1}{dt} \right|$$

(Puisqu'on s'intéresse uniquement à la valeur de la différence de potentiel, le signe de la différence de potentiel n'a pas d'importance. C'est pour cela qu'on fait la valeur absolue. On s'occupera du signe uniquement quand on demandera quel bout du fil a un potentiel plus élevé.)

Il nous faut donc le taux de variation du courant. Ce taux est

$$\frac{dI_1}{dt} = 10A \cdot 100s^{-1} \cdot \cos\left(100\tfrac{rad}{s} t\right)$$

À t = 2 s, ce taux de variation vaut

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= 10A \cdot 100s^{-1} \cos\left(100\tfrac{rad}{s} \cdot 2s\right) \\ &= 487,2\tfrac{A}{s}\end{aligned}$$

La différence de potentiel induite est donc

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= \left| -M\frac{dI_1}{dt} \right| \\ &= \left| -0,01974H \cdot 487,2\tfrac{A}{s} \right| \\ &= 9,617V\end{aligned}$$

Autre unité pour μ_0

Puisque

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{\ell}\pi r^2$$

donne des henrys, μ_0 doit être en H/m, car il n'y a pas d'unité pour les N, et r et ℓ sont en mètres. On a donc

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

L'inductance mutuelle dans d'autres situations

Généralement, l'inductance mutuelle entre deux circuits est difficile à calculer. Par contre, elle peut être assez facile à mesurer expérimentalement. On envoie un courant variable dans le circuit 1 et on mesure la différence de potentiel induite dans le circuit 2. L'inductance mutuelle est alors simplement

$$M = \left| \frac{\mathcal{E}_2}{\left(\frac{dI_1}{dt}\right)} \right|$$

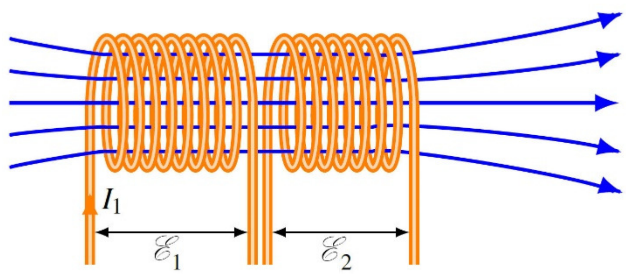
Généralement, la valeur de l'inductance mutuelle n'est pas très grande, ce qui est souvent souhaité. On ne veut pas que les lumières de la maison s'allument pendant un bref instant quand le réfrigérateur démarre. C'est ce qui se passerait si l'inductance mutuelle entre le circuit qui alimente le réfrigérateur et celui qui alimente les lampes était grande.

L'inductance mutuelle est donc très souvent négligeable, à moins que ce soit ce qu'on cherche à faire, comme dans un transformateur.

11.2 L'AUTO-INDUCTANCE

Définition de l'auto-inductance

Reprenons notre situation de la section précédente.



La bobine 1 ne fait pas uniquement un flux magnétique dans la bobine 2, elle en fait un aussi dans elle-même. Si le champ magnétique change, il y aura un changement de flux dans la bobine 2 **et** dans la bobine 1. Ainsi, le changement de courant dans la bobine 1 va entrainer la création d'une différence de potentiel aux bornes des deux bobines. La variation de courant dans la bobine 1 agit donc sur elle-même pour créer une différence de potentiel à ses bornes. Ce phénomène, appelé *auto-induction,* fut découvert par Joseph Henry en 1832 (bien que Faraday suspectât son existence l'année précédente, mais il ne parvint pas à le mettre en évidence).

On peut trouver cette différence de potentiel induite avec la loi d'induction de Faraday, mais on va plutôt tenter de la trouver en prenant le même raccourci qu'on a fait dans la section précédente : on veut trouver la différence de potentiel directement à partir du taux de variation de courant. On veut donc travailler avec la règle suivante.

Définition de l'auto-inductance

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$$

où L, appelé *l'auto-inductance*, est la constante de proportionnalité entre $\mathcal{E}$ et dI/dt. L'auto-inductance L est aussi mesurée en henry.

Calcul de l'auto-inductance

La valeur de L dépend de la forme du circuit dans lequel passe le courant. Comme la différence de potentiel induite peut être calculée avec ces deux formules.

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\phi}{dt} \qquad \mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$$

On doit avoir

$$N\frac{d\phi}{dt} = L\frac{dI}{dt}$$

Puisque M et N sont des constantes, on peut écrire

$$\frac{d(N\phi)}{dt} = \frac{d(LI)}{dt}$$

En intégrant, on a

$$N\phi = LI$$

(Il n'y a pas de constante d'intégration, car le flux est nul si le courant est nul.) On a finalement la formule suivante.

$$L = \frac{N\phi}{I}$$

L'auto-inductance d'un solénoïde

Le cas le plus simple est l'auto-inductance d'un solénoïde. C'est aussi le cas le plus important, car ce sont souvent les solénoïdes qui ont l'auto-inductance la plus grande. Elle est tellement plus grande, qu'on va toujours négliger l'auto-inductance de tout le reste du circuit.

Pour trouver le flux, on doit trouver le champ fait par le solénoïde à l'intérieur de lui-même. C'est facile parce qu'à l'intérieur d'un solénoïde, le champ est uniforme et vaut

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell}$$

Le flux dans le solénoïde est facile à calculer puisque le champ est uniforme. Ce flux vaut

$$\begin{aligned}\phi &= BA \\ &= \frac{\mu_0 NI}{\ell}\pi r^2\end{aligned}$$

L'inductance mutuelle est donc

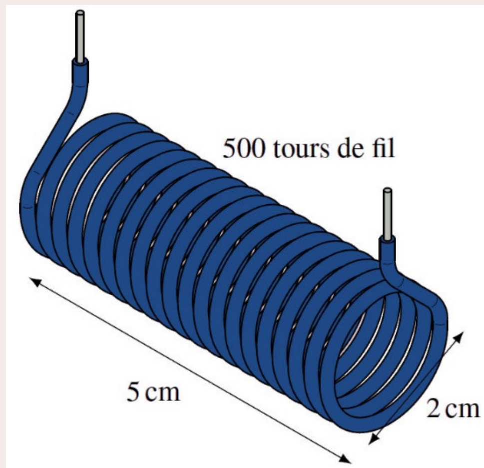
$$L = \frac{N\phi}{I}$$
$$= \frac{N\frac{\mu_0 NI}{\ell}\pi r^2}{I}$$

Ce qui donne

L'auto-inductance d'un solénoïde

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{\ell}$$

Exemple 11.2.1



Voici un solénoïde.

a) Quelle est l'auto-inductance de ce solénoïde ?

L'auto-inductance est

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{\ell}$$
$$= \frac{4\pi \times 10^{-7} \frac{Tm}{A} \cdot (500)^2 \cdot \pi \cdot (0,01m)^2}{0,05m}$$
$$= 1,974 \times 10^{-3} H = 1,974 mH$$

b) Quelle est la différence de potentiel induite dans le solénoïde à t = 1 s si le courant dans le solénoïde est donné par la formule suivante ?

$$I = 100 \tfrac{A}{s^2} \cdot t^2$$

La différence de potentiel se trouve avec

$$\mathcal{E} = \left| -L\frac{dI}{dt} \right|$$

(Puisqu'on s'intéresse uniquement à la valeur de la différence de potentiel, le signe de la différence de potentiel n'a pas d'importance. C'est pour cela qu'on fait la valeur absolue. On s'occupera du signe uniquement quand on demandera quel bout du fil a un potentiel plus élevé.)

Pour trouver la différence de potentiel, il nous faut le taux de variation du courant. Ce taux est

$$\frac{dI}{dt} = 200\tfrac{A}{s^2}\cdot t$$

À t = 1 s, ce taux de variation vaut

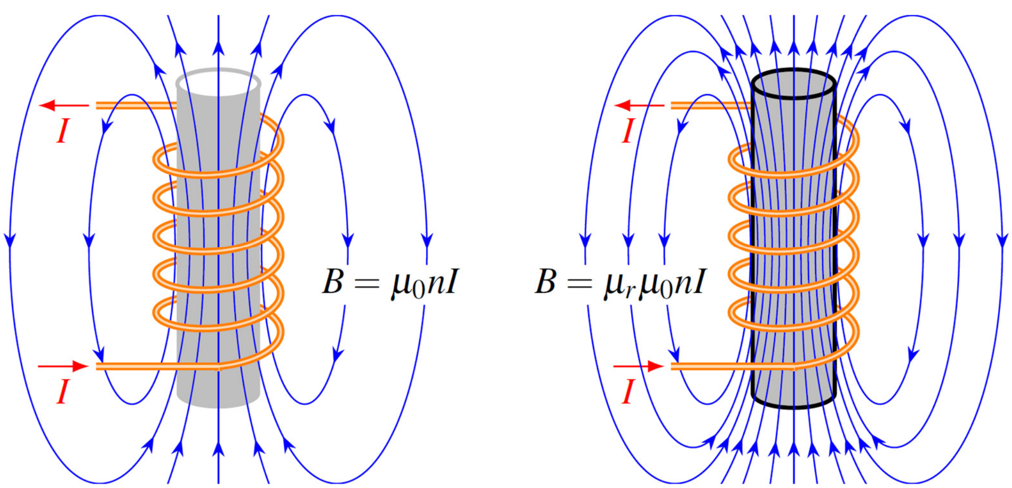
$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= 200\tfrac{A}{s^2}\cdot 1s \\ &= 200\tfrac{A}{s}\end{aligned}$$

La différence de potentiel induite est donc

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= \left|-L\frac{dI}{dt}\right| \\ &= \left|-1,974\times 10^{-3} H\cdot 200\tfrac{A}{s}\right| \\ &= 0,3948V\end{aligned}$$

L'auto-inductance avec un noyau de fer

On augmente beaucoup l'inductance d'un solénoïde en plaçant un noyau de fer à l'intérieur du solénoïde. Le fer étant dans un champ magnétique, il devient lui-même une source de champ magnétique. Le champ magnétique est maintenant plus grand à l'intérieur du solénoïde puisque le champ de fer s'ajoute à celui fait par le courant.



En fait, on peut mettre n'importe quelle substance ferromagnétique à l'intérieur du solénoïde. Avec la substance, le champ devient μ_r fois plus fort, où μ_r est la perméabilité relative de la substance. Voici la valeur approximative de la perméabilité relative typique pour quelques substances ferromagnétiques.

Substance	Perméabilité relative (μ_r)
Fer	200
Nickel	100
Permalloy (78,5 % nickel, 21,5 % fer)	8 000
Mu-métal (75 % nickel, 2 % chrome, 5 % cuivre, 18 % fer)	20 000

(Notez que la valeur de la perméabilité du fer change beaucoup selon la pureté et la structure cristalline du fer.)

Puisque le champ est multiplié par μ_r, le flux est aussi multiplié par μ_r. Puisque l'inductance est

$$L = \frac{N\phi}{I}$$

elle est aussi multipliée par μ_r. On a donc

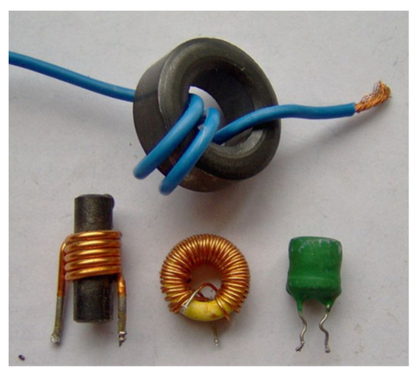
Auto-inductance avec un noyau de substance ferromagnétique

$$L_{\text{avec ferromagnétique}} = \mu_r L_{\text{avec vide}}$$

Le fait de mettre un cœur de fer dans un solénoïde multiplie donc par 200 l'inductance du solénoïde.

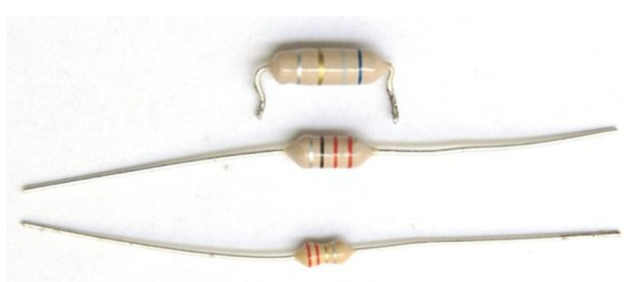
11.3 LES INDUCTEURS

Un objet ayant une auto-inductance élevée placé dans un circuit est un inducteur. Généralement, il s'agit d'une bobine de fil qui joue ce rôle. Voici quelques exemples d'inducteurs utilisés dans des circuits.



de.wikipedia.org/wiki/Spule_(Elektrotechnik)

Parfois, ça ressemble un peu moins à une bobine, mais c'est parce qu'elle est simplement recouverte de céramique.

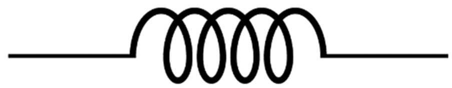


de.wikipedia.org/wiki/Spule_(Elektrotechnik)

Symbole de l'inducteur

On utilise le symbole suivant pour représenter un inducteur dans un circuit.

On utilise aussi le symbole suivant.



Mais il semble que ce soit un symbole dont l'usage disparait lentement au profit du premier symbole montré.

Lois de Kirchhoff avec les inducteurs

On pourra utiliser les lois de Kirchhoff dans les circuits comportant des inducteurs. On doit donc savoir ce qu'on doit faire avec les inducteurs avec la loi de maille.

Quand un inducteur est dans un circuit, il est rare qu'on note la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur avec $\mathcal{E}$, qu'on réserve pour les sources. On utilise simplement ΔV_L. On sait que la différence de potentiel (en valeur absolue) aux bornes de l'inducteur est

$$\Delta V_L = L\frac{dI}{dt}$$

Reste à trouver si le potentiel monte (ΔV positif) ou diminue (ΔV négatif) quand on traverse l'inducteur.

Quand le courant augmente dans un inducteur, alors le flux dans l'inducteur augmente, ce qui induit un champ magnétique dans la direction opposée au champ initial (loi de Lenz), ce qui signifie que le courant induit est dans la direction opposée au courant initial, ce qui signifie que la différence de potentiel induite est opposée au courant.

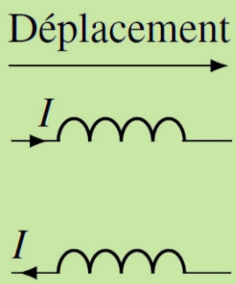
Quand le courant diminue dans un inducteur, alors le flux dans l'inducteur diminue, ce qui induit un champ magnétique dans la même direction que champ initial (loi de Lenz), ce qui signifie que le courant induit est dans le même sens que le courant initial, ce qui signifie que la différence de potentiel induite est dans le sens de courant.

On pourrait ainsi croire qu'on peut facilement savoir si le potentiel monte ou diminue quand on passe à travers l'inducteur. Le problème, c'est qu'on ne sait pas toujours si le courant monte ou descend. On va donc supposer que le courant augmente pour faire nos équations.

Avec notre supposition, on a la situation suivante.

Si on va dans le sens du courant, on va passer du potentiel le plus haut au potentiel le plus bas et le potentiel va baisser (ΔV négatif). Si on va dans le sens contraire du courant, on va passer du potentiel le plus bas au potentiel le plus haut et le potentiel va monter (ΔV positif).

Loi de Kirchhoff pour les inducteurs

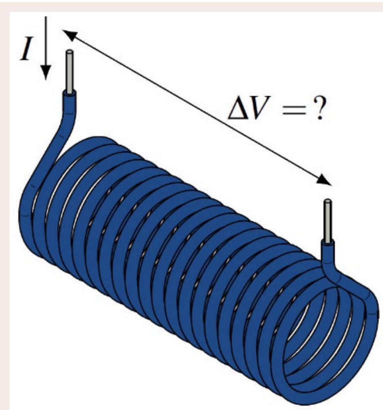


$$\Delta V_L = -L\frac{dI}{dt}$$

$$\Delta V_L = L\frac{dI}{dt}$$

En fait, même si on a supposé que la courant montait, ces équations sont bonnes dans toutes les situations. Si le courant descend, alors dI/dt est négatif et les ΔV s'inversent comme on doit avoir quand le courant diminue.

Exemple 11.3.1



Le solénoïde montré sur la figure a une inductance de 200 mH et est traversé par un courant de 100 A. Le fil qui forme le solénoïde a une résistance de 0,05 Ω.

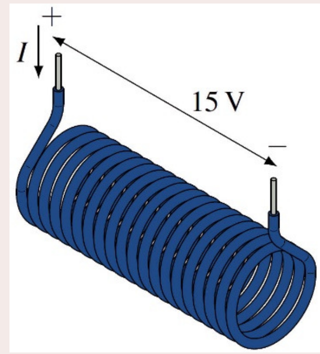
a) Quelle est la différence de potentiel entre les deux extrémités du solénoïde si le courant augmente au rythme de 50 A/s ?

En allant dans le sens du courant, la différence de potentiel est, selon les lois de Kirchhoff,

$$\Delta V = -L\frac{dI}{dt} - RI$$

Puisque dI/dt vaut + 50 A/s (positif quand le courant monte), on a

$$\begin{aligned}\Delta V &= -L\frac{dI}{dt} - RI \\ &= -0,2H \cdot 50\tfrac{A}{s} - 0,05\Omega \cdot 100A \\ &= -10V - 5V \\ &= -15V\end{aligned}$$



Puisque la réponse est négative, le potentiel diminue en allant dans le sens du courant. Le potentiel est donc plus élevé du côté où le courant arrive dans le solénoïde.

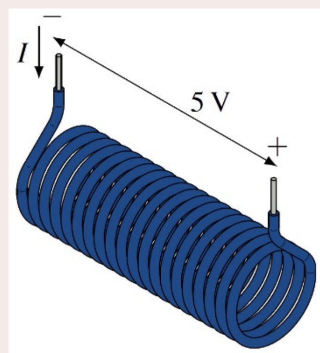
b) Quelle est la différence de potentiel entre les deux extrémités du solénoïde si le courant diminue au rythme de 50 A/s ?

En allant dans le sens du courant, la différence de potentiel est, selon les lois de Kirchhoff,

$$\Delta V = -L\frac{dI}{dt} - RI$$

Puisque d*I*/d*t* vaut -50 A/s (négatif quand le courant diminue), on a

$$\begin{aligned}\Delta V &= -L\frac{dI}{dt} + -RI \\ &= -0,2H \cdot \left(-50\tfrac{A}{s}\right) - 0,05\Omega \cdot 100A \\ &= 10V - 5V \\ &= 5V\end{aligned}$$



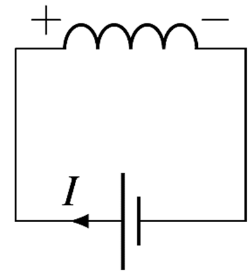
Puisque la réponse est positive, le potentiel augmente en allant dans le sens du courant. Le potentiel est donc plus élevé du côté où le courant sort du solénoïde.

Quand le courant monte, la différence de potentiel induite s'oppose à l'augmentation, ce qui signifie que la différence de potentielle induite cherche à faire un courant qui s'oppose au changement de courant.

Quand le courant diminue, la différence de potentiel induite s'oppose à la diminution, ce qui signifie que la différence de potentielle induite cherche à faire un courant dans la même direction que le courant de départ.

C'est un peu comme si l'inducteur était un genre de vieux conservateur qui s'oppose à tout changement.

Circuit avec une source et un inducteur



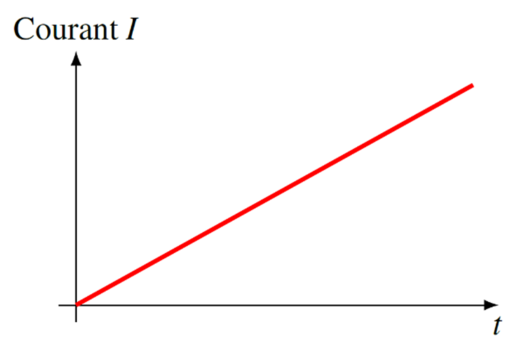
Branchons un inducteur à une source.

La loi des mailles de ce circuit est (en allant dans le sens du courant)

$$\mathcal{E} - L\frac{dI}{dt} = 0$$

On a alors

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L}$$



Puisque $\mathcal{E}$ et L sont des constantes, cela signifie que le courant monte à un rythme constant dans ce circuit. On a donc le graphique de droite pour le courant en fonction du temps.

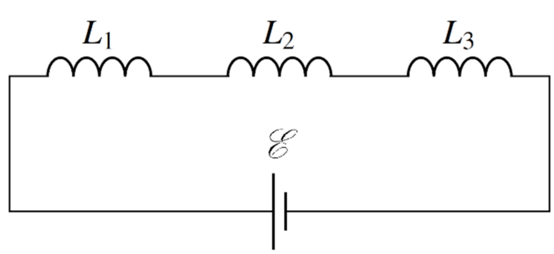
La pente de la droite dans ce graphique est $\mathcal{E}/L$.

Ici aussi, l'inducteur s'oppose au changement. Comme il n'y a pas de résistance, le courant dans ce circuit devrait être infini. L'opposition au changement de l'inducteur apparait alors par une montée graduelle du courant plutôt qu'un passage direct d'un courant nul à un courant infini.

11.4 LES INDUCTEURS EN SÉRIE ET EN PARALLÈLE

Inducteurs en série

Supposons qu'on ait plusieurs inducteurs branchés en série tels qu'illustrés sur cette figure.



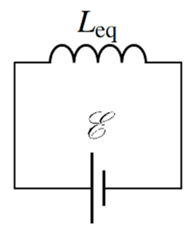
Puisque le courant doit toujours être le même dans tous les inducteurs, le taux de variation du courant doit être le même dans les trois inducteurs.

$$\frac{dI}{dt} \text{ est le même pour les trois inducteurs.}$$

La loi des mailles de ce circuit est donc

$$\mathcal{E} - L_1 \frac{dI}{dt} - L_2 \frac{dI}{dt} - L_3 \frac{dI}{dt} = 0$$
$$\mathcal{E} = L_1 \frac{dI}{dt} + L_2 \frac{dI}{dt} + L_3 \frac{dI}{dt}$$

On veut trouver l'inducteur équivalent qui va nous donner le courant donc le même taux de variation du courant. La loi des mailles de ce circuit est



$$\mathcal{E} - L_{eq} \frac{dI}{dt} = 0$$
$$\mathcal{E} = L_{eq} \frac{dI}{dt}$$

Puisqu'on a la même source dans les deux cas, on peut égaler les $\mathcal{E}$ pour obtenir.

$$L_{eq} \frac{dI}{dt} = L_1 \frac{dI}{dt} + L_2 \frac{dI}{dt} + L_3 \frac{dI}{dt}$$
$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3$$

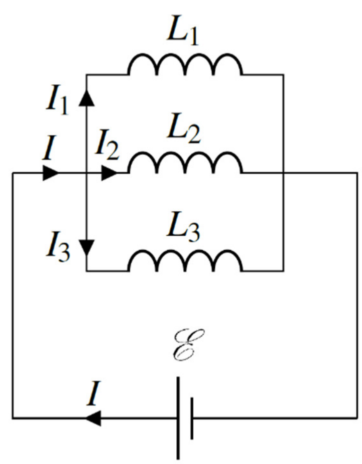
On peut facilement extrapoler à plusieurs inducteurs pour obtenir

Inducteur équivalent : inducteurs en série

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + $$

Inducteurs en parallèle

Supposons qu'on ait plusieurs inducteurs branchés en parallèle tels qu'illustrés sur cette figure.



Dans ce cas, la différence de potentiel aux bornes des trois inducteurs est $\mathcal{E}$.

Selon la loi des nœuds, on doit avoir

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

Ce qui signifie que

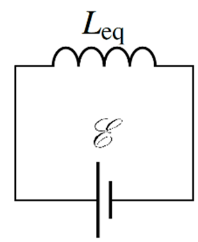
$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} + \frac{dI_3}{dt}$$

et donc que

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathscr{E}}{L_1} + \frac{\mathscr{E}}{L_2} + \frac{\mathscr{E}}{L_3}$$

Puisqu'on doit avoir $\Delta V_L = \mathscr{E} = L\frac{dI}{dt}$ pour chaque inducteur.

On veut trouver l'inducteur équivalent qui va nous donner le même courant, donc le même taux de variation du courant. La loi des mailles de ce circuit est



$$\mathscr{E} - L_{eq}\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\mathscr{E} = L_{eq}\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathscr{E}}{L_{eq}}$$

Puisqu'on doit avoir le même taux de variation du courant qu'avec les trois inducteurs, on a

$$\frac{\mathscr{E}}{L_{eq}} = \frac{\mathscr{E}}{L_1} + \frac{\mathscr{E}}{L_2} + \frac{\mathscr{E}}{L_3}$$

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}$$

On peut facilement extrapoler à plusieurs inducteurs pour obtenir

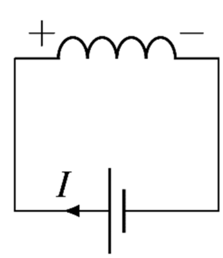
Inducteur équivalent : inducteurs en parallèle

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_4} + \dots$$

11.5 L'ÉNERGIE DANS UN INDUCTEUR

Quand une source fait un courant, elle fournit une énergie. Dans ce circuit simple, l'inducteur reçoit donc de l'énergie.

On trouve la puissance reçue par l'inducteur avec la formule valide pour tous les éléments d'un circuit.



$$P_L = \Delta V_L I$$

Avec la formule de la différence de potentiel aux bornes d'un inducteur, on obtient

$$P_L = L\frac{dI}{dt}I$$

Si le courant augmente, *dI/dt* est positive et l'inducteur reçoit de l'énergie. Si le courant diminue, *dI/dt* est négative et l'inducteur donne de l'énergie.

On trouve l'énergie totale accumulée dans l'inducteur traversé par un courant I en intégrant la puissance reçue en fonction du temps en partant d'un courant nul jusqu'au courant I (qu'on va appeler momentanément, pour faire l'intégrale, I_f pour le distinguer du courant au temps t).

$$U_L = \int_0^{t_f} L\frac{dI}{dt}Idt = \int_0^{I_f} LIdI = \left[\frac{1}{2}LI^2\right]_0^{I_f} = \frac{1}{2}LI_f^2$$

L'énergie accumulée dans l'inducteur est donc

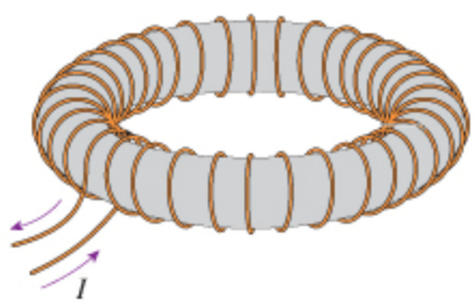
Énergie dans un inducteur traversé par un courant *I*

$$U_L = \frac{1}{2}LI^2$$

11.6 LA DENSITÉ D'ÉNERGIE DU CHAMP MAGNÉTIQUE

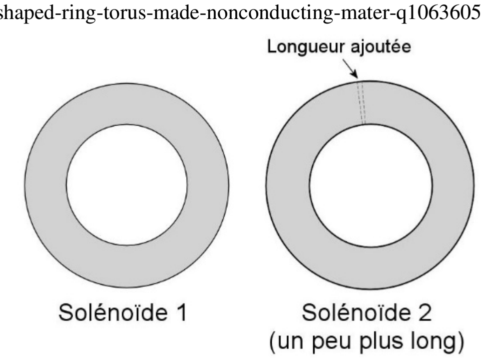
Nous allons maintenant montrer qu'il faut une certaine quantité d'énergie pour faire un champ magnétique. En fait, nous trouverons ici une formule donnant la densité d'énergie du champ magnétique.

Pour trouver cette formule, imaginons un très long solénoïde qui se referme sur lui-même pour former un tore (une forme de beigne pour les incultes).



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/toroid-figure-coil-wire-wrapped-around-doughnut-shaped-ring-torus-made-nonconducting-mater-q1063605

Dans cette configuration, il n'y a que du champ magnétique dans le solénoïde (zone en gris sur la figure). On va alors imaginer qu'on a deux solénoïdes de même diamètre en forme de tore, mais le solénoïde 2 est à peine plus long que le solénoïde 1.



On va dire que le solénoïde 2 est x plus long que le solénoïde 1. Ceci fait qu'il y a un peu plus de champ magnétique dans le solénoïde 2 (région entre les deux lignes pointillées sur la figure de gauche). On pourra alors trouver l'énergie de ce nouveau champ en calculant la différence d'énergie entre les deux solénoïdes. Il ne faut toutefois pas changer le champ ailleurs dans le tore, ce qui signifie que le champ, qui est

$$B = \mu_0 nI$$

doit être le même pour que l'énergie dans le reste des solénoïdes soit la même. Cela signifie qu'il faut garder la même densité de fil ($n = N / \ell$) dans les deux solénoïdes. Il y a donc un peu plus de tours de fils sur le solénoïde 2.

Pour trouver la différence d'énergie, il nous faut l'inductance des solénoïdes. Cette inductance vaut

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{\ell} \\ &= \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{\ell^2} \ell \\ &= \mu_0 n^2 \pi r^2 \ell \end{aligned}$$

Ce sera plus facile de travailler avec cette forme, car on sait que n est le même pour les deux solénoïdes. L'énergie des solénoïdes est alors

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} L I^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi r^2 \ell I^2 \end{aligned}$$

La différence d'énergie entre les deux solénoïdes est donc

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi r^2 \ell_2 I^2 - \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi r^2 \ell_1 I^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi r^2 I^2 \left(\ell_2 - \ell_1 \right) \end{aligned}$$

Comme $\ell_2 - \ell_1 = x$, on a

$$\Delta U = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi r^2 I^2 x$$

Cette différence d'énergie est l'énergie du champ, qu'on notera U_B.

Pour trouver la densité d'énergie, on va diviser cette énergie par le volume du champ qu'il y a de plus dans le solénoïde 2. Ce volume est une mince tranche de forme circulaire d'épaisseur x. Le volume de cette couche est

$$Volume = \pi r^2 x$$

L'énergie du champ par unité de volume est donc

$$\frac{U_B}{Volume} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 n^2 \pi r^2 I^2 x}{\pi r^2 x} = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2$$

Puisque le champ est $B = \mu_0 n I$, on arrive à

$$\frac{U_B}{Volume} = \frac{1}{2\mu_0}\mu_0^2 n^2 I^2 = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

En utilisant le symbole u_B pour représenter cette densité d'énergie du champ magnétique, on a

Densité d'énergie du champ magnétique

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Pour calculer l'énergie dans un champ magnétique, on multiplie cette densité par le volume occupé par le champ.

Énergie du champ magnétique

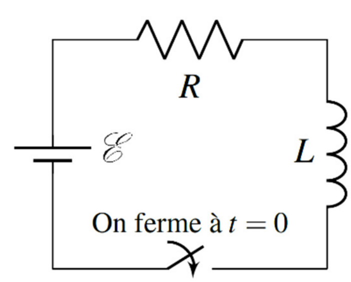
$$\begin{aligned}\text{Énergie du champ magnétique} &= u_B \times volume \quad (\vec{B} \text{ uniforme}) \\ &= \int u_B dV \quad (\vec{B} \text{ non uniforme})\end{aligned}$$

Il faut donc de l'énergie pour faire un champ magnétique. C'est sous cette forme qu'est l'énergie dans un inducteur. Plus on augmente le courant dans l'inducteur, plus le champ magnétique fait par l'inducteur est grand et plus il accumule de l'énergie.

11.7 CIRCUIT RL

Montée du courant

Le circuit RL en courant continu est le circuit montré à droite.



On veut savoir comment va changer le courant en fonction du temps quand on va fermer l'interrupteur. Pour y arriver, on va faire les lois de Kirchhoff de ce circuit. En partant du coin inférieur gauche et en faisant le tour du circuit dans le sens des aiguilles d'une montre, on a

$$\mathcal{E} - RI - L\frac{dI}{dt} = 0$$

On doit donc résoudre cette équation pour connaitre le courant en fonction du temps. Il s'agit d'une équation différentielle. Comme on n'est pas dans un cours d'équation différentielle, on va donner immédiatement la solution de cette équation. (Cliquez ici si vous voulez la voir http://physique.merici.ca/electricite/RL.pdf.) La solution de cette équation est

Courant en fonction du temps pour un circuit RL (montée du courant)

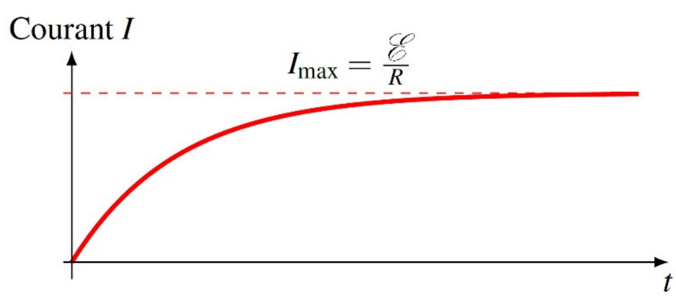
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$$

Dans l'exposant, on retrouve *L/R* dont la valeur est en seconde. On appelle souvent cette combinaison *la constante de temps* du circuit et elle est notée τ.

Constante de temps d'un circuit RL

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Le courant dans ce circuit est donc un courant qui monte en fonction du temps tel qu'illustré sur ce graphique.



Sans l'inducteur, le courant aurait aussitôt monté à $\mathcal{E}/R$, la valeur du courant qu'on aurait avec seulement la source et la résistance. Avec l'inducteur, la montée du courant est graduelle. L'inducteur donne donc un genre d'inertie au courant qui l'empêche de varier trop rapidement.

On ne peut donc pas répondre directement à la question « *Combien faut-il de temps pour que le courant atteigne sa valeur maximale ?* » puisque le courant n'atteint jamais, en théorie, la valeur maximale. On peut cependant se donner une idée en définissant la demi-vie du circuit comme le temps qu'il faut pour le courant atteigne 50 % de la valeur maximale. On a alors

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$$

$$\frac{\mathcal{E}}{2R} = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt_{1/2}}{L}}\right)$$

En isolant $t_{½}$, on obtient

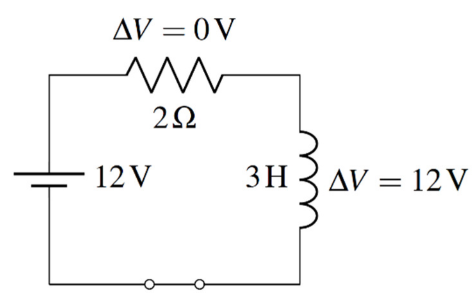
Demi-vie d'un circuit RL

$$t_{1/2} = \frac{L}{R}\ln 2$$

Examinons ce qui se passe dans ce circuit pour mieux comprendre ces résultats.

Circuit à t = 0

Immédiatement après la fermeture de l'interrupteur, le courant est nul et on a la situation montrée à droite.



(On a mis des valeurs uniquement pour simplifier l'explication.) À $t = 0$, toute la différence de potentiel de la source (12 V) se retrouve aux bornes de l'inducteur puisque le courant est nul, ce qui implique qu'il n'y a pas de différence de potentiel aux bornes de la résistance. Puisque la grandeur de la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur est de

$$\Delta V_L = L\frac{dI}{dt}$$

et que toute la différence de potentiel de la source se retrouve aux bornes de l'inducteur, on a

$$\mathcal{E} = L\frac{dI}{dt}$$

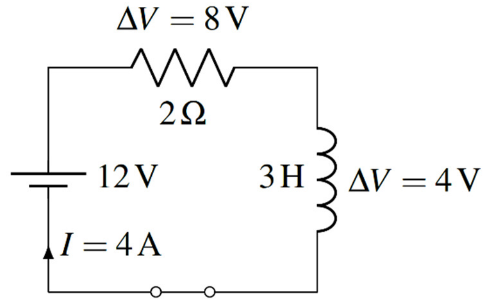
L'inducteur impose donc que le courant varie initialement avec au rythme

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

(ce qui signifie dans notre exemple que le courant monte à un rythme de 4 A/s). Ceci doit être la pente du graphique du courant à $t = 0$. Plus l'inducteur aura une inductance élevée, plus la montée du courant se fera lentement.

Ainsi, à $t = 0$, les courants sur les fils où il y a des inducteurs sont initialement nuls et ils montent au rythme imposé par les inducteurs.

Circuit pendant la montée du courant



Dans notre circuit, le courant maximal est de 6 A. Le courant monte donc lentement de 0 A à 6 A. Voici la situation quand le courant est de 4 A.

Avec un courant de 4 A, la différence de potentiel aux bornes de la résistance est maintenant de 8 V. Comme on a une source de 12 V, on doit avoir 4 V aux bornes de la résistance de l'inducteur. À mesure que le courant monte, la différence de potentiel aux bornes de la résistance augmente alors que la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur diminue puisque la somme des deux différences de potentiel doit être égale à celle de la source.

Toutefois, puisque la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur est

$$\Delta V_L = L\frac{dI}{dt}$$

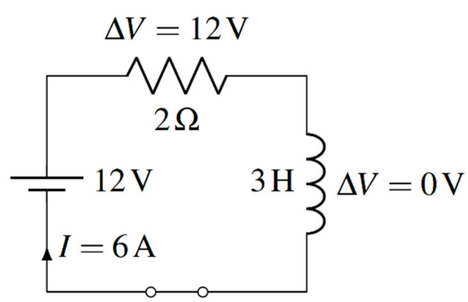
on a que le rythme de variation du courant est

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\Delta V_L}{L}$$

Dans notre exemple, le rythme de montée du courant n'est plus que de 1,333 A/s alors qu'il était de 4 A/s au départ.

Donc, à mesure que la différence de potentiel diminue aux bornes de l'inducteur, le rythme de montée du courant diminue. C'est pour ça que la pente diminue continuellement sur le graphique du courant en fonction du temps.

Circuit au bout d'un temps très long

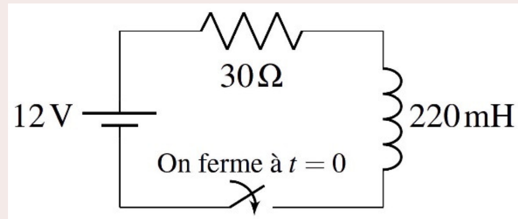


Au bout d'un temps très long, le courant dans le circuit atteint sa valeur maximale de 6 A.

La différence de potentiel aux bornes de la résistance est maintenant de 12 V, ce qui veut dire qu'elle est de 0 V pour l'inducteur. S'il n'y a pas de différence de potentiel aux bornes d'un inducteur, c'est que le courant ne varie pas. Le courant est donc stable à sa valeur maximale. On a alors le courant qu'on doit avoir s'il n'y a pas d'inducteur. Ce sera toujours le cas dans un circuit : au bout d'un temps très long, le circuit a atteint l'équilibre et les inducteurs n'ont plus aucun effet dans le circuit.

Exemple 11.7.1

Dans le circuit de droite, on ferme l'interrupteur à $t = 0$.



a) Combien faudra-t-il de temps pour que le courant atteigne le quart de sa valeur maximale ?

Comme le courant maximum est $\mathscr{E} / R$, on veut que le courant atteigne une valeur de

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} I_{\max} \\ &= \frac{1}{4} \frac{\mathscr{E}}{R} \end{aligned}$$

Le temps pour atteindre ce courant est

$$\begin{aligned} I &= \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \\ \frac{1}{4}\frac{\mathscr{E}}{R} &= \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \\ \frac{1}{4} &= \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \\ e^{-\frac{Rt}{L}} &= \frac{3}{4} \\ -\frac{Rt}{L} &= \ln\left(\frac{3}{4}\right) \\ t &= -\frac{L}{R}\ln\left(\frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

Le temps est donc

$$\begin{aligned} t &= -\frac{0,22H}{30\Omega} \cdot \ln\left(\frac{3}{4}\right) \\ &= 2,110 ms \end{aligned}$$

b) Quelle est la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur et de la résistance à ce moment ?

La différence de potentiel aux bornes de la résistance est

$$\begin{aligned}\Delta V_R &= RI \\ &= R\cdot\frac{1}{4}\frac{\mathscr{E}}{R} \\ &= \frac{\mathscr{E}}{4} \\ &= \frac{12V}{4} \\ &= 3V\end{aligned}$$

La différence de potentiel aux bornes de l'inducteur est donc de 9 V (car la somme des deux différences de potentiel doit être égale à celle de la source)

c) À quel rythme varie le courant à ce moment ?

Puisque

$$\Delta V_L = L\frac{dI}{dt}$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \frac{\Delta V_L}{L} \\ &= \frac{9V}{0,22H} \\ &= 40,91\tfrac{A}{s}\end{aligned}$$

d) Quelle est la puissance de chaque élément du circuit à ce moment ?

La puissance fournie par la pile à ce moment est

$$\begin{aligned}P_S &= I\Delta V \\ &= \frac{1}{4}\frac{\mathscr{E}}{R}\cdot\mathscr{E} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{12V}{30\Omega}\cdot 12V \\ &= 1,2W\end{aligned}$$

La puissance dissipée dans la résistance est

$$\begin{aligned}P_R &= I\Delta V_R \\ &= \frac{1}{4}\frac{\mathscr{E}}{R}\cdot 3V \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{12V}{30\Omega}\cdot 3V\end{aligned}$$

$$= 0,3W$$

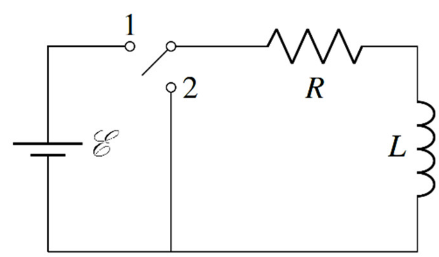
La puissance reçue par l'inducteur est

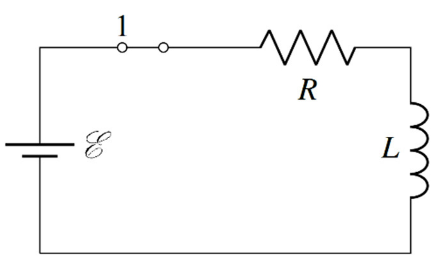
$$\begin{aligned} P_L &= I\Delta V_V \\ &= \frac{1}{4}\frac{\mathscr{E}}{R}\cdot 9V \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{12V}{30\Omega}\cdot 9V \\ &= 0,9W \end{aligned}$$

On remarque que la puissance reçue par l'inducteur et la résistance est égale à la puissance fournie par la pile. Ceci doit toujours être vrai. Évidemment, l'énergie reçue par l'inducteur est utilisée pour faire un champ magnétique de plus en plus grand.

Baisse du courant

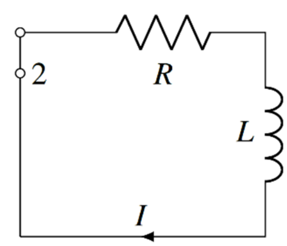
Il peut arriver qu'un courant circule dans un inducteur et qu'il n'y ait plus de source. Par exemple, on peut y arriver avec le circuit de droite.





Initialement, on place l'interrupteur à la position 1. Le fil central devient inutile et on a le circuit de gauche. Le courant à travers l'inducteur va alors monter lentement tel que vu à la section précédente.

Puis soudainement, pendant qu'il y a un courant dans l'inducteur, on place l'interrupteur à la position 2, ce qui élimine le fil où il y a la source. On a alors le circuit de droite.



On a alors un courant dans ce circuit, qu'on va appeler le courant initial I_0. Le courant va ensuite diminuer lentement parce que l'énergie est dissipée lentement par la résistance. La loi de Kirchhoff de ce circuit est

$$-RI - L\frac{dI}{dt} = 0$$

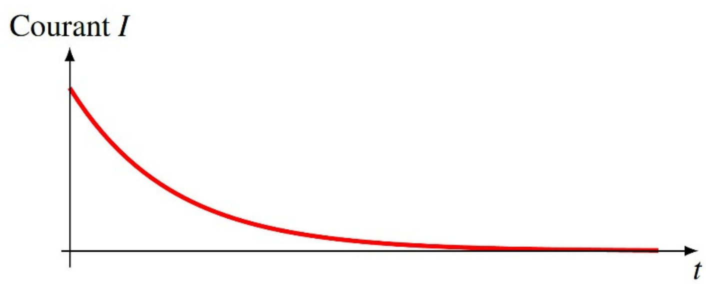
La solution de cette équation différentielle est, en utilisant la condition initiale que $I = I_0$ à $t = 0$, la suivante.

Courant en fonction du temps pour un circuit RL (baisse du courant)

$$I = I_0 e^{\frac{-Rt}{L}}$$

(Cliquez ici si vous voulez voir la solution de l'équation http://physique.merici.ca/electricite/RL2.pdf.)

Ce qui nous donne le graphique suivant pour le courant en fonction du temps.



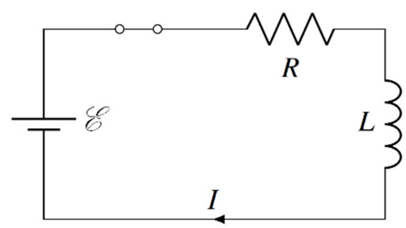
Même s'il n'y a plus de source dans ce circuit, on voit que le courant continue à circuler. C'est alors l'inducteur qui joue le rôle de source. On remarque encore une fois que l'inducteur donne une certaine inertie au courant et que celui-ci ne peut pas tomber à 0 immédiatement quand on débranche la source.

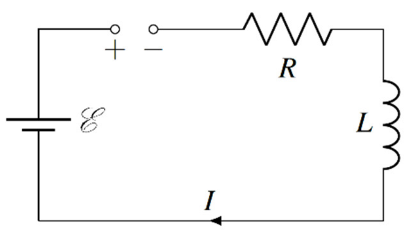
La baisse du courant se fait à un rythme tel que la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur est toujours égale à la différence de potentiel aux bornes de la résistance.

$$RI = L\frac{dI}{dt}$$

À mesure que le courant baisse, la dérivée du courant doit aussi baisser. C'est pour ça que la pente du graphique diminue à mesure que le courant diminue.

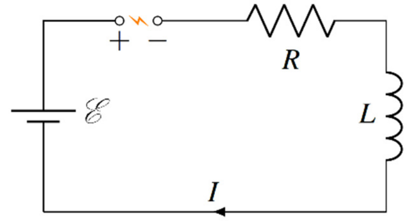
Ce courant qui continue peut être assez dangereux si l'inductance est élevée. Prenons le circuit de droite, dans lequel il y a un courant, pour illustrer la situation.





Si on ouvre l'interrupteur (qui est en haut à gauche), le courant ne peut pas immédiatement tomber à une valeur nulle et il va continuer à circuler pendant un certain temps. Mais comme le circuit est ouvert, il va s'accumuler des charges aux extrémités du fil.

Cette accumulation de charge va créer un champ électrique entre les deux extrémités de l'interrupteur. Si l'inductance est très grande, le courant sera difficile à arrêter et il y aura



beaucoup de charges qui vont s'accumuler. Le champ peut alors devenir tellement grand qu'il va dépasser la rigidité électrique de l'air et il y aura une étincelle entre les deux côtés de l'interrupteur.

On peut d'ailleurs voir de telles étincelles dans ce vidéo.
http://www.youtube.com/watch?v=aSmMFog10D0

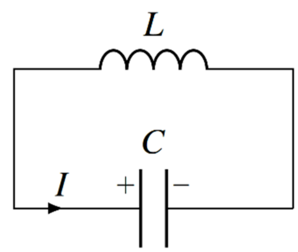
Soyez donc sur vos gardes si vous coupez le courant dans un circuit ayant beaucoup d'inductance.

11.8 CIRCUIT LC

Décharge du condensateur (Circuit LC sans source)

La charge et le courant

Dans un premier cas, on va étudier un circuit LC formé d'un condensateur initialement chargé avec une charge Q_0 et d'un inducteur.



La figure nous montre le sens positif pour le courant et la charge. (En fait, la seule convention utilisée est que le courant positif arrive sur la plaque positive du condensateur.) Ce n'est pas nécessairement le véritable sens du courant. On verra plus loin si on obtient une valeur positive ou négative.

La loi des mailles de ce circuit est (en allant dans le sens du courant en partant du coin inférieur gauche)

$$-\frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0$$

La solution de cette équation différentielle est
(Cliquez ici si vous voulez la voir http://physique.merici.ca/electricite/LC.pdf.)

Charge du condensateur en fonction du temps pour un circuit LC sans source

$$Q = Q_0 \cos \omega_0 t$$

$$\text{où } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

(On verra au chapitre suivant pourquoi il y a un indice 0 à ω.)

Le courant dans le circuit est la dérivée de la charge du condensateur. Il est donc

Courant en fonction du temps dans un circuit LC sans source

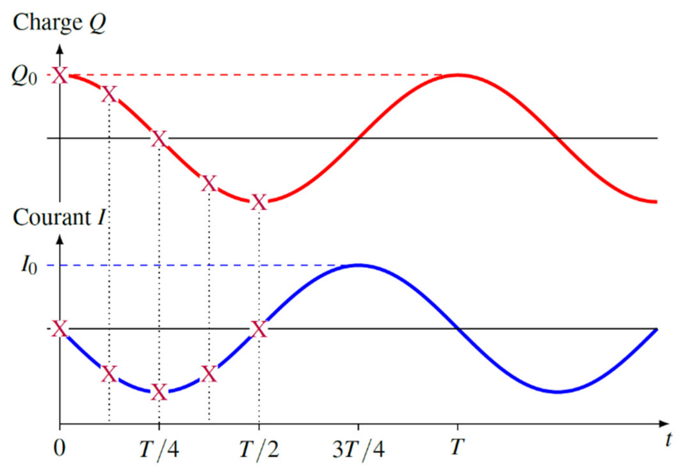
$$I = -Q_0\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

Le courant varie donc aussi de façon sinusoïdale. En avant du sinus, on retrouve l'amplitude.

Amplitude du courant dans un circuit LC sans source

$$I_0 = Q_0\omega_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}}$$

Les graphiques de la charge et du courant sont donc



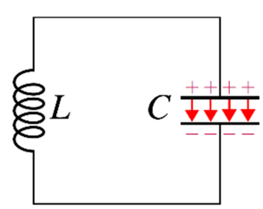
(Les X sont là pour l'explication du circuit qu'on va maintenant donner.)

Examinons le circuit pendant son évolution pour comprendre un peu plus pourquoi il y a ces oscillations.

Circuit à t = 0

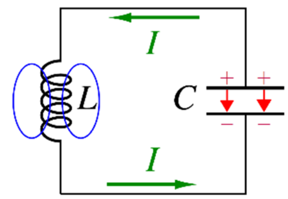
À ce moment, le condensateur est plein et il n'y a pas de courant dans le circuit. Le courant commence à monter, mais pas à n'importe quel rythme. Le rythme de montée du courant doit faire en sorte que la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur doit être égale à celle aux bornes du condensateur. Cela nous permet de déterminer la grandeur du taux de variation du courant.

$$0 = -\frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt}$$
$$L\frac{dI}{dt} = -\frac{Q}{C}$$
$$\frac{dI}{dt} = -\frac{Q}{LC}$$



Cela montre que le rythme de changement du courant est proportionnel à la charge du condensateur. Plus la charge est grande, plus le courant change vite. Le courant change donc très rapidement au début puisque le condensateur est plein.

Circuit à $t = T/8$

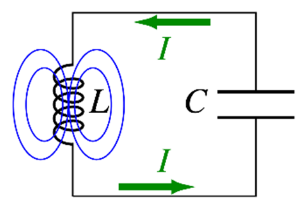


Le courant circule maintenant dans le circuit et la charge du condensateur a diminué puisque le courant est fait par la décharge du condensateur. Le courant est négatif, tout simplement parce qu'il est dans le sens contraire de la convention donnée avec les lois de Kirchhoff (ce qui se produit toujours quand un condensateur se vide). Selon notre équation

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{Q}{LC}$$

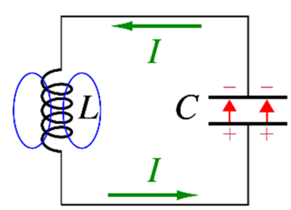
le courant monte moins rapidement, car la charge du condensateur a diminué. On remarque d'ailleurs que la grandeur de la pente a diminué sur le graphique du courant. Remarquez aussi que le courant est de plus en plus grand, car *dI/dt* est toujours du même signe tant que la charge du condensateur ne change pas de signe.

Circuit à $t = T/4$



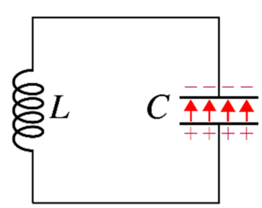
Le condensateur est maintenant vide, ce qui veut dire qu'à ce moment *dI/dt* est maintenant nul, car la charge est nulle. Le courant cesse donc d'augmenter alors qu'il avait augmenté continuellement lors de la décharge. Conséquemment, c'est à ce moment qu'on a le courant maximum dans le circuit. On peut voir sur le graphique que le courant est maximum quand la charge du condensateur est nulle. Cependant, le courant ne pourra pas tomber immédiatement à 0 à cause de l'inducteur et il va continuer à circuler dans le circuit, ce qui va charger le condensateur dans le sens contraire de sa charge initiale.

Circuit à $t = 3T/8$



Avec la charge du condensateur qui s'inverse, *dI/dt* s'inverse également. Le courant dans le circuit commence alors à diminuer. Plus le temps avance, plus la charge du condensateur augmente et plus le courant diminue rapidement. Pendant tout ce temps, le condensateur augmente sa charge.

Circuit à $t = T/2$



À ce moment, le courant a fini par s'arrêter, mais le condensateur est à nouveau chargé, mais avec une polarité inversée par rapport à sa charge initiale. Le condensateur va alors recommencer à se vider et le cycle recommencera sans fin.

L'énergie

L'énergie dans le condensateur est

$$U_C = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_0^2 \cos^2(\omega_0 t)}{2C}$$

et l'énergie dans l'inducteur est

$$U_L = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L Q_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

L'énergie totale du circuit est

$$\begin{aligned} U &= U_C + U_L \\ &= \frac{Q_0^2 \cos^2(\omega_0 t)}{2C} + \frac{1}{2} L Q_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Mais puisque

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

on a

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q_0^2 \cos^2(\omega_0 t)}{2C} + \frac{1}{2} L Q_0^2 \frac{1}{LC} \sin^2(\omega_0 t) \\ &= \frac{Q_0^2}{2C}\left(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right) \\ &= \frac{Q_0^2}{2C} \end{aligned}$$

qui ne varie pas en fonction du temps. Il ne se perd donc pas d'énergie dans un circuit LC. La valeur obtenue est simplement l'énergie initiale du condensateur. De plus, puisque

$$I_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}}$$

L'énergie totale est aussi

$$U = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{LCI_0^2}{2C} = \frac{1}{2} L I_0^2$$

C'est aussi l'énergie de l'inducteur quand le courant est maximal, donc quand toute l'énergie du circuit est dans l'inducteur. On a donc

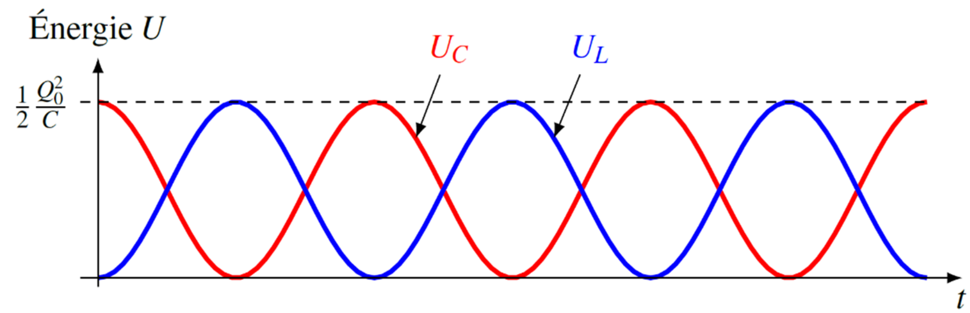
Énergie dans un circuit LC sans source

$$U_C = \frac{Q_0^2 \cos^2(\omega_0 t)}{2C}$$

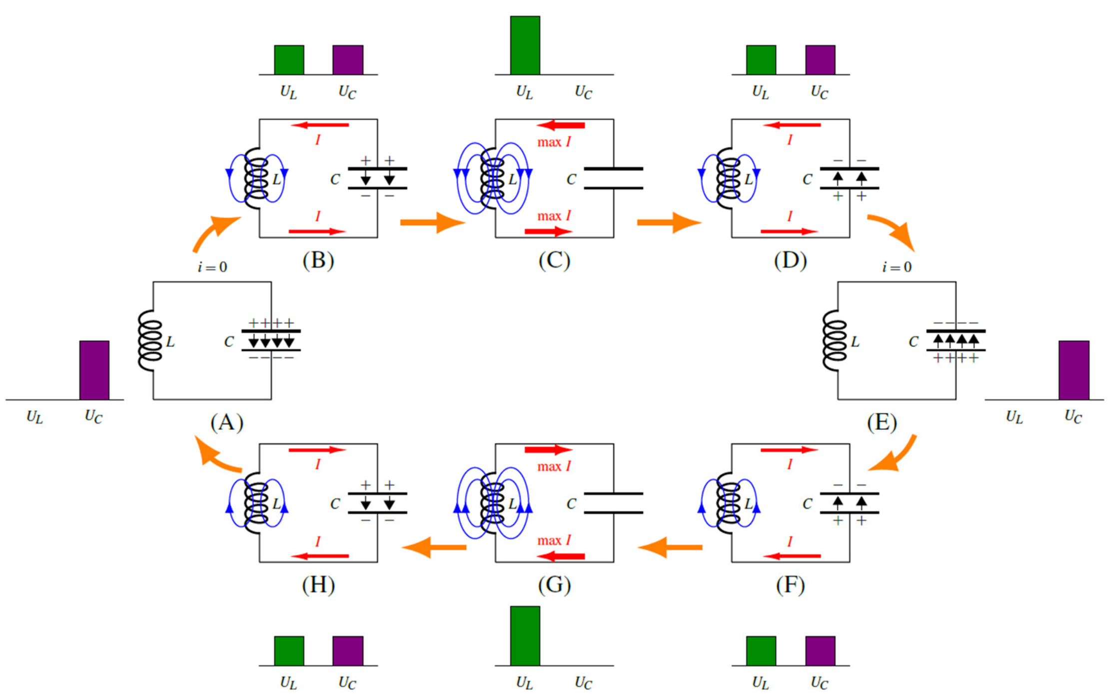
$$U_L = \frac{1}{2} L Q_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

$$U = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{1}{2} L I_0^2$$

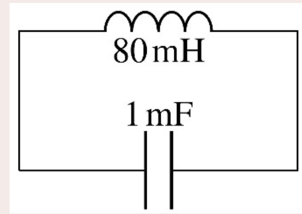
Ce qui nous donne les graphiques suivants.



Il y a donc un échange continuel d'énergie entre le condensateur et l'inducteur.



Exemple 11.8.1



Dans le circuit de droite, le courant initial est nul et la différence de potentiel initiale aux bornes du condensateur est de 50 V.

a) Quelle est la période des oscillations du courant dans le circuit ?

Comme pour n'importe quel phénomène d'oscillation, la période est donnée par

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

On doit donc trouver la fréquence angulaire. La fréquence angulaire est

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{0,08H \cdot 0,001F}} \\ &= 111,8 \tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

La période est donc

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{\omega_0} \\ &= \frac{2\pi}{111,8 \tfrac{rad}{s}} \\ &= 0,0562s = 56,2ms\end{aligned}$$

b) Quel est le courant maximum dans ce circuit ?

L'amplitude du courant est

$$I_0 = Q_0\omega_0$$

Pour trouver l'amplitude, on a besoin de la charge initiale du condensateur. Cette charge est

$$\begin{aligned}Q_0 &= C\Delta V_0 \\ &= 10^{-3} F \cdot 50V \\ &= 0,05C\end{aligned}$$

L'amplitude du courant est donc

$$I_0 = Q_0\omega_0$$

$$= 0,05C \cdot 111,8 \tfrac{rad}{s}$$
$$= 5,59A$$

c) Quelle est l'énergie totale dans ce circuit ?

L'énergie totale est

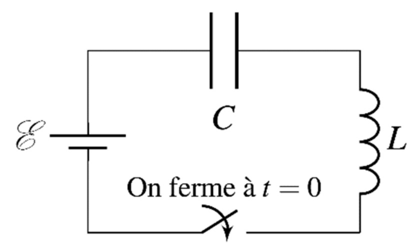
$$U = \frac{Q_0^2}{2C}$$
$$= \frac{(0,05C)^2}{2 \cdot 0,001F}$$
$$= 1,25J$$

Notez qu'on aurait pu y arriver aussi avec

$$U = \frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{1}{2} 80mH \cdot (5,59A)^2 = 1,25J$$

Charge du condensateur (Circuit LC avec une source)

La solution n'est pas très différente s'il y a une source que l'on branche à un condensateur déchargé et à un inducteur. La loi des mailles de Kirchhoff donne alors l'équation suivante.



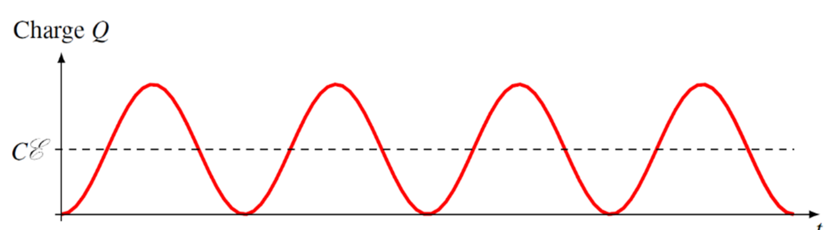
$$\mathcal{E} - \frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0$$

La solution de cette équation nous permet d'obtenir les formules suivantes.
(Cliquez ici si vous voulez voir la solution http://physique.merici.ca/electricite/LC2.pdf.)

Charge et courant en fonction du temps pour un circuit LC avec une source

$$Q = C\mathcal{E}\left(1 - \cos \omega_0 t\right)$$
$$I = C\mathcal{E}\omega_0 \sin \omega_0 t$$
$$\text{où } \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

Le graphique de la charge en fonction du temps est alors le suivant.



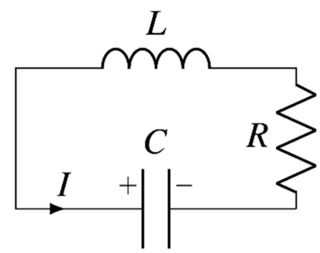
On a encore des oscillations et la fréquence des oscillations est exactement la même que quand il n'y a pas de source. L'oscillation se fait autour de la charge qu'aurait le condensateur s'il n'y avait pas d'inducteur, de sorte que l'amplitude des oscillations est $C\mathcal{E}$.

11.9 CIRCUIT RLC

Décharge du condensateur (Circuit RLC sans source)

La charge du condensateur

Dans ce circuit RLC, il y a un inducteur, une résistance et un condensateur initialement chargé avec une charge initiale Q_0.



La figure nous montre le sens positif pour le courant et la charge. (En fait, la seule convention utilisée est que le courant positif arrive sur la plaque positive du condensateur.) Ce n'est pas nécessairement le véritable sens du courant. On verra plus loin si on obtient une valeur positive ou négative.

La loi des mailles de ce circuit est (en allant dans le sens du courant en partant du coin supérieur gauche)

$$-\frac{Q}{C} - RI - L\frac{dI}{dt} = 0$$

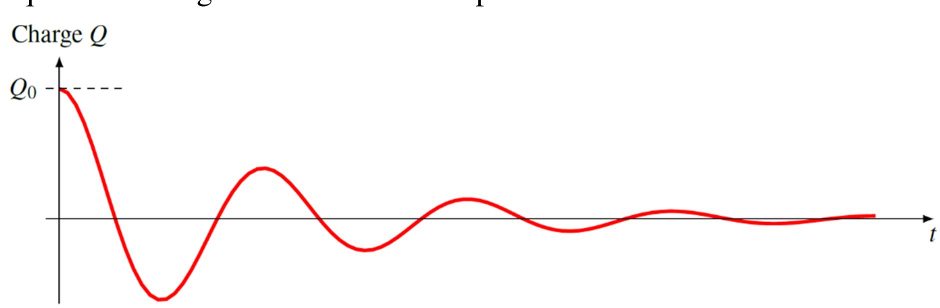
La solution de cette équation différentielle est
(Cliquez ici si vous voulez la voir http://physique.merici.ca/electricite/RLC.pdf.)

Charge du condensateur en fonction du temps pour un circuit RLC sans source

$$Q = Q_0 e^{-\alpha t}\left(\cos\omega' t + \frac{\alpha}{\omega'}\sin\omega' t\right) \qquad \left(\text{si } \frac{1}{LC} > \alpha^2\right)$$

$$\text{où} \quad \alpha = \frac{R}{2L} \qquad \text{et} \qquad \omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}$$

Le graphique de la charge en fonction du temps ressemble donc à ceci.



En gros, on retrouve nos oscillations du circuit LC, mais l'amplitude des oscillations diminue parce que de l'énergie se perd en chaleur dans la résistance. Il en reste donc de moins en moins pour charger le condensateur ou pour faire le champ magnétique dans l'inducteur.

Le courant

Pour obtenir le courant, on n'a qu'à dériver la charge par rapport au temps. Au premier coup d'œil, on peut s'attendre à une formule assez complexe puisqu'il y a trois t dans la formule de la charge, mais le résultat est quand même assez simple.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{dQ}{dt} \\
&= \frac{d\left(Q_0 e^{-\alpha t}\left(\cos\omega' t + \frac{\alpha}{\omega'}\sin\omega' t\right)\right)}{dt} \\
&= Q_0(-\alpha)e^{-\alpha t}\left(\cos\omega' t + \frac{\alpha}{\omega'}\sin\omega' t\right) + Q_0 e^{-\alpha t}\left(-\omega'\sin\omega' t + \alpha\cos\omega' t\right) \\
&= -Q_0\alpha e^{-\alpha t}\cos\omega' t - Q_0 e^{-\alpha t}\frac{\alpha^2}{\omega'}\sin\omega' t - Q_0\omega' e^{-\alpha t}\sin\omega' t + Q_0\alpha e^{-\alpha t}\cos\omega' t
\end{aligned}$$

Le premier et le quatrième terme s'annulent et il reste

$$I = -Q_0\left(\frac{\alpha^2}{\omega'} + \omega'\right)e^{-\alpha t}\sin\omega' t$$

Mais le terme entre parenthèses est

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^2}{\omega'} + \omega' &= \frac{1}{\omega'}\left(\alpha^2 + \omega'^2\right) \\
&= \frac{1}{\omega'}\left(\alpha^2 + \left(\frac{1}{LC} - \alpha^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{\omega' LC}
\end{aligned}$$

Le courant est donc

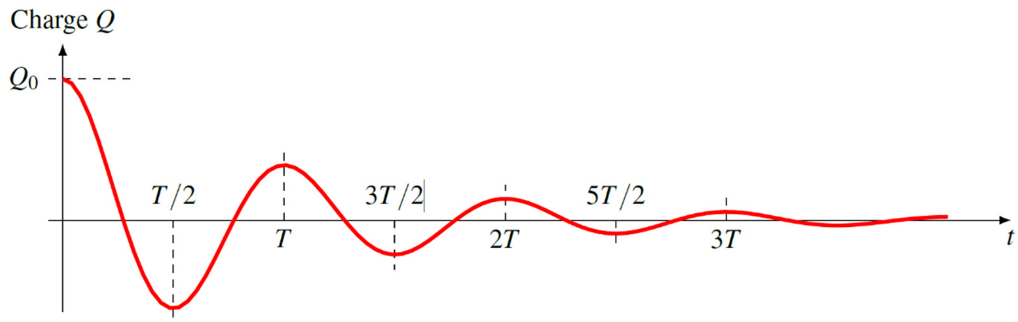
Courant en fonction du temps pour un circuit RLC sans source

$$I = -\frac{Q_0}{\omega' LC}e^{-\alpha t}\sin\omega' t$$

Cette forme assez simple permet de constater que le courant devient nul quand le sinus est nul, donc quand

$$t = \frac{T}{2}, T, \frac{3T}{2}, 2T, \ldots$$

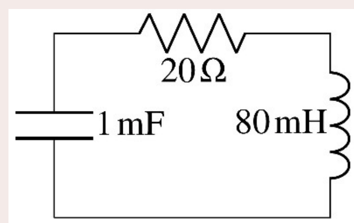
Donc le courant est nul à chaque demi-période. Ces instants correspondent aussi aux moments où on a un maximum relatif de la charge du condensateur.



Autres solutions

Les solutions sont complètement différentes si $1/LC < \alpha^2$ ou si $1/LC = \alpha^2$. Ce sont des situations où l'effet de la résistance est plus grand que l'effet de l'inducteur. Dans ce cas, le circuit ressemble davantage à un circuit RC qu'à un circuit LC. Il n'y a pas d'oscillations et le condensateur se vide simplement à travers la résistance et sa charge diminue graduellement. Au pire, le condensateur se recharge un peu dans le sens contraire, puis se vide à nouveau, mais c'est tout. Nous n'étudierons pas plus que ça ces solutions.

Exemple 11.9.1



Dans le circuit de droite, le courant initial est nul et la différence de potentiel initiale aux bornes du condensateur est de 50 V. Quelle est la période des oscillations du courant dans le circuit ?

La période est donnée par

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Il nous faut donc la fréquence angulaire. La fréquence angulaire est

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}$$

Commençons par calculer la valeur de α.

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$= \frac{20\Omega}{2 \cdot 0,08H}$$
$$= 125s^{-1}$$

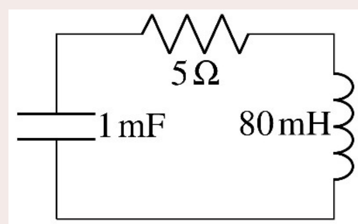
La fréquence angulaire est donc

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{0,08H \cdot 0,001F} - \left(125s^{-1}\right)^2}$$
$$= \sqrt{12500 \tfrac{rad^2}{s^2} - 15625 \tfrac{rad^2}{s^2}}$$
$$= \sqrt{-3125 \tfrac{rad^2}{s^2}}$$

Si on arrive à une racine d'un nombre négatif, c'est parce que $1/LC < \alpha^2$. Dans ce cas, il n'y a pas d'oscillations et donc pas de fréquence.

Dans cet exemple, la résistance est trop grande pour qu'il y ait des oscillations. Même avec une petite résistance, on peut arriver à ce genre de solution avec des condensateurs de grande capacité. Dans ce cas, le condensateur prend beaucoup de temps à se vider et le courant ne varie pas autant que ce qu'on aurait avec une capacité plus petite. Quand le courant ne varie pas beaucoup, l'effet de l'inducteur est peu important et l'effet de la résistance domine.

Exemple 11.9.2



Dans le circuit de droite, le courant initial est nul et la différence de potentiel initiale aux bornes du condensateur est de 50 V.

a) Quelle est la période des oscillations du courant dans le circuit ?

La période est donnée par

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Il nous faut donc la fréquence angulaire. La fréquence angulaire est

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}$$

Commençons par calculer la valeur de α.

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$= \frac{5\Omega}{2 \cdot 0,08H}$$
$$= 31,25s^{-1}$$

La fréquence angulaire est donc

$$\begin{aligned}\omega' &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{0,08H \cdot 0,001F} - \left(31,25s^{-1}\right)^2} \\ &= \sqrt{12500\tfrac{rad^2}{s^2} - 976,6\tfrac{rad^2}{s^2}} \\ &= 107,35\tfrac{rad}{s}\end{aligned}$$

La période est donc

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{\omega'} \\ &= \frac{2\pi}{107,35\frac{rad}{s}} \\ &= 0,05853s = 58,53ms\end{aligned}$$

Remarquez comme la période est plus longue par rapport à ce qu'on avait quand la résistance était nulle (56,2 ms). L'oscillation est un peu plus lente parce que le condensateur a un peu plus de difficulté à se décharger à travers un inducteur et une résistance qu'à travers un inducteur seul.

b) Quelle sera la charge du condensateur au bout d'un cycle ?

La charge du condensateur en fonction du temps est donnée par

$$Q = Q_0 e^{-\alpha t}\left(\cos\omega' t + \frac{\alpha}{\omega'}\sin\omega' t\right)$$

Au bout d'un cycle, il s'est écoulé une période qui vaut $2\pi/\omega'$. On a donc

$$\begin{aligned}Q &= Q_0 e^{-\alpha T}\left(\cos\omega'\frac{2\pi}{\omega'} + \frac{\alpha}{\omega'}\sin\omega'\frac{2\pi}{\omega'}\right) \\ &= Q_0 e^{-\alpha T}\left(\cos 2\pi + \frac{\alpha}{\omega'}\sin 2\pi\right) \\ &= Q_0 e^{-\alpha T}\left(1 + \frac{\alpha}{\omega'}\cdot 0\right) \\ &= Q_0 e^{-\alpha T}\end{aligned}$$

Pour la calculer, il nous faut la charge initiale du condensateur. Cette charge est

$$\begin{aligned}Q_0 &= C\Delta V_0 \\ &= 0{,}001F \cdot 50V \\ &= 0{,}05C\end{aligned}$$

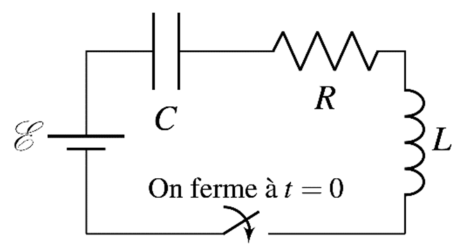
Ainsi, au bout d'un cycle, la charge est

$$\begin{aligned}Q &= Q_0 e^{-\alpha T} \\ &= 0{,}05C \cdot e^{-31{,}25s^{-1} \cdot 0{,}05853s} \\ &= 0{,}00803C\end{aligned}$$

Notez finalement que la résistance et l'inducteur peuvent en fait venir du même objet. Un solénoïde est à la fois une résistance (résistance du fil) et un inducteur. Même si R et L viennent du même objet, la solution se fait de la même façon que ce qu'on a fait au dernier exemple.

Charge du condensateur (Circuit RLC avec une source)

La solution n'est pas très différente s'il y a une source que l'on branche à un condensateur déchargé à un inducteur et à une résistance. La loi des mailles de Kirchhoff donne alors l'équation suivante.



$$\mathscr{E} - \frac{Q}{C} - RI - L\frac{dI}{dt} = 0$$

La solution de cette équation différentielle donne les formules suivantes.
(Cliquez ici si vous voulez voir la solution http://physique.merici.ca/electricite/RLC2.pdf.)

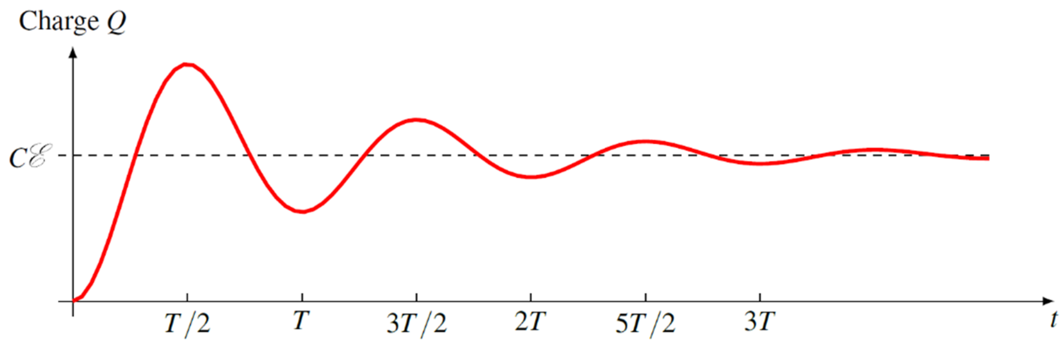
Charge et courant en fonction du temps pour un circuit RLC avec une source

$$Q = C\mathscr{E}\left(1 - e^{-\alpha t}\left(\cos\omega' t + \frac{\alpha}{\omega'}\sin\omega' t\right)\right) \qquad \left(\text{si } \frac{1}{LC} > \alpha^2\right)$$

$$I = \frac{\mathscr{E}}{\omega' L} e^{-\alpha t} \sin\omega' t$$

$$\text{où} \quad \alpha = \frac{R}{2L} \qquad \text{et} \qquad \omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}$$

Le graphique de la charge en fonction du temps est alors le suivant.



On a encore des oscillations (si $1/LC > \alpha^2$) et la fréquence des oscillations est exactement la même que quand il n'y a pas de source. L'oscillation se fait autour de la charge qu'aurait le condensateur s'il n'y avait pas d'inducteur et de résistance. Les maximums relatifs de la charge se produisent toujours à toutes les demi-périodes. Au bout d'un temps très long, la charge du condensateur se stabilise à $C\mathscr{E}$.

11.10 AUTRES CIRCUITS AVEC DES INDUCTEURS

Il est possible de résoudre des circuits plus complexes avec les lois de Kirchhoff, mais cela demande une bonne connaissance des équations différentielles. Toutefois, on peut trouver assez facilement la valeur du courant au départ et au bout d'un temps très long dans des circuits comportant des sources, des résistances, des inducteurs et des condensateurs initialement vides.

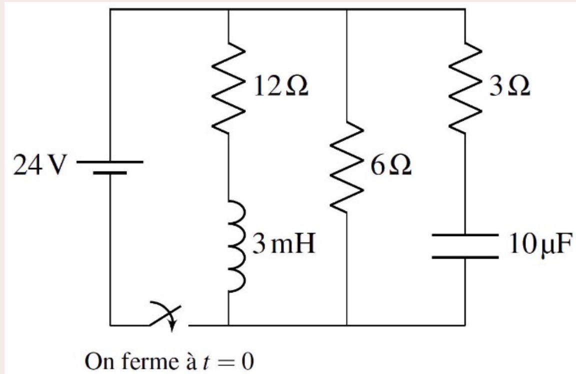
Pour y arriver, résumons ce qu'on a découvert au sujet des condensateurs et des inducteurs. Entre parenthèses, on donne les règles qu'il faut employer pour résoudre le circuit. Ces règles s'inspirent de ce qu'on avait trouvé avec les condensateurs.

Courant à $t = 0$ et $t = \infty$ avec des condensateurs et des inducteurs

	$t = 0$	$t = \infty$
Inducteur	Courant nul (On enlève le fil.)	Aucun effet (On remplace l'inducteur par un fil.)
Condensateur	Aucun effet (On remplace le condensateur par un fil.)	Courant nul (On enlève le fil.)

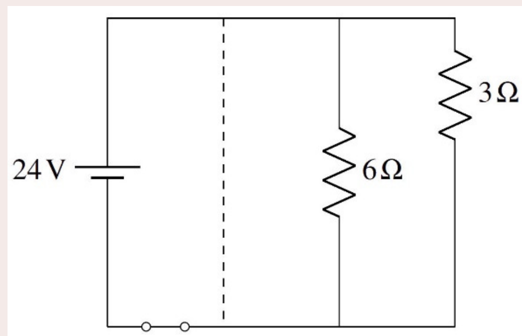
Exemple 11.10.1

Dans le circuit suivant, on ferme l'interrupteur à $t = 0$.



a) Quel est le courant fourni par la pile immédiatement après la fermeture de l'interrupteur (donc à $t = 0$) ?

À $t = 0$, les condensateurs n'ont aucun effet et les inducteurs bloquent le courant. On remplace donc les condensateurs par des fils et on enlève les fils avec des inducteurs. On a alors le circuit de droite.



La résistance équivalente de ce circuit est

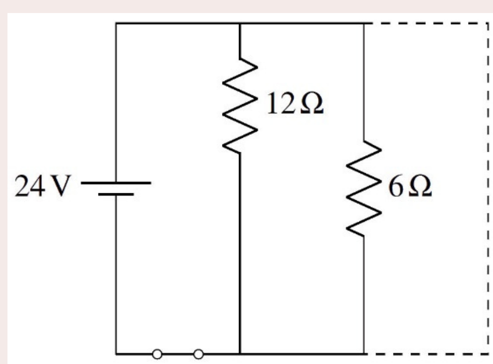
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{6\Omega}$$
$$R_{eq} = 2\Omega$$

et le courant fourni par la pile est donc

$$I = \frac{24V}{2\Omega}$$
$$= 12A$$

b) Quel est le courant fourni par la pile longtemps après la fermeture de l'interrupteur (donc à $t = \infty$) ?

À $t = \infty$, les inducteurs n'ont aucun effet et les condensateurs bloquent le courant. On remplace donc les inducteurs par des fils et on enlève les fils avec des condensateurs. On a alors le circuit suivant.



La résistance équivalente de ce circuit est

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{12\Omega} + \frac{1}{6\Omega}$$

$$R_{eq} = 4\Omega$$

et le courant fourni par la pile est donc

$$I = \frac{24V}{4\Omega}$$
$$= 6A$$

Cet exemple nous montre qu'avec les inducteurs et les condensateurs, on peut changer la valeur du courant fourni par une pile en fonction du temps.

RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS

Définition de l'inductance mutuelle

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$$

Le henry (H)

$$1H = 1\tfrac{Vs}{A}$$

L'inductance mutuelle de deux solénoïdes coaxiaux

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{\ell} \pi r^2$$

r est le rayon du solénoïde ayant le plus petit rayon
ℓ est la longueur du solénoïde le plus long.

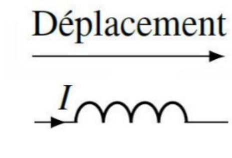
Définition de l'auto-inductance

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$$

L'auto-inductance d'un solénoïde

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{\ell}$$

Loi de Kirchhoff pour les inducteurs



$$\Delta V_L = -L\frac{dI}{dt}$$

$$\Delta V_L = L\frac{dI}{dt}$$

Auto-inductance avec un noyau de substance ferromagnétique

$$L_{\text{avec ferromagnétique}} = \mu_r L_{\text{avec vide}}$$

Inducteur équivalent : inducteurs en série

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 +$$

Inducteur équivalent : inducteurs en parallèle

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_4} + \ldots$$

Énergie dans un inducteur traversé par un courant *I*

$$U_L = \frac{1}{2}LI^2$$

Densité d'énergie du champ magnétique

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Énergie du champ magnétique

$$\begin{aligned}\text{Énergie du champ magnétique} &= u_B \times volume \quad \left(\vec{B}\text{ uniforme}\right)\\ &= \int u_B dV \quad \left(\vec{B}\text{ non uniforme}\right)\end{aligned}$$

Courant en fonction du temps pour un circuit RL (montée du courant)

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$$

Constante de temps d'un circuit RL

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Demi-vie d'un circuit RL

$$t_{1/2} = \frac{L}{R}\ln 2$$

Courant en fonction du temps pour un circuit RL (baisse du courant)

$$I = I_0 e^{\frac{-Rt}{L}}$$

Charge du condensateur en fonction du temps pour un circuit LC sans source

$$Q = Q_0 \cos \omega_0 t \qquad \text{où } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Courant en fonction du temps dans un circuit LC sans source

$$I = -Q_0 \omega_0 \sin\left(\omega_0 t\right)$$

Amplitude du courant dans un circuit LC sans source

$$I_0 = Q_0 \omega_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}}$$

Énergie dans un circuit LC sans source

$$U_C = \frac{Q_0^2 \cos^2\left(\omega_0 t\right)}{2C}$$

$$U_L = \frac{1}{2} L Q_0^2 \omega_0^2 \sin^2\left(\omega_0 t\right)$$

$$U = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{1}{2} L I_0^2$$

Charge et courant en fonction du temps pour un circuit LC avec une source

$$Q = C\mathscr{E}\left(1 - \cos \omega_0 t\right)$$

$$I = C\mathscr{E}\omega_0 \sin \omega_0 t \qquad \text{où } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Charge et courant en fonction du temps pour un circuit RLC sans source

$$Q = Q_0 e^{-\alpha t}\left(\cos \omega' t + \frac{\alpha}{\omega'}\sin \omega' t\right)$$

$$I = -\frac{Q_0}{\omega' LC} e^{-\alpha t} \sin \omega' t \qquad \left(\text{si } \frac{1}{LC} > \alpha^2\right)$$

$$\text{où } \alpha = \frac{R}{2L} \text{ et } \omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}$$

Charge et courant en fonction du temps pour un circuit RLC avec une source

$$Q = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-\alpha t}\left(\cos\omega' t + \frac{\alpha}{\omega'}\sin\omega' t\right)\right)$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\omega' L}e^{-\alpha t}\sin\omega' t$$

(si $\frac{1}{LC} > \alpha^2$)

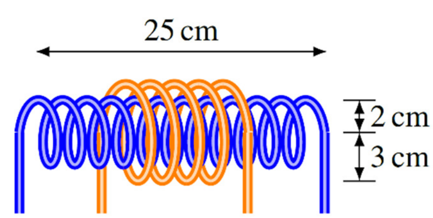
Courant à t = 0 et t = ∞ avec des condensateurs et des inducteurs

	$t = 0$	$t = \infty$
Inducteur	Courant nul (On enlève le fil.)	Aucun effet (On remplace l'inducteur par un fil.)
Condensateur	Aucun effet (On remplace le condensateur par un fil.)	Courant nul (On enlève le fil.)

EXERCICES

11.1 L'inductance mutuelle

1. Voici deux solénoïdes coaxiaux. Le solénoïde ayant un rayon de 2 cm est le solénoïde 1 et le solénoïde ayant un rayon de 3 cm est le solénoïde 2.



Le solénoïde interne 1 a 300 tours de fil
Le solénoïde externe 2 a 25 tours de fil

   a) Quelle est l'inductance mutuelle ?
   b) Quelle est la différence de potentiel induite aux bornes du solénoïde 2 quand le courant varie au rythme de 250 A/s dans le solénoïde 1 ?
   c) Quelle est la différence de potentiel induite aux bornes du solénoïde 1 quand le courant varie au rythme de 150 A/s dans le solénoïde 2 ?

2. Dans un circuit, le courant est donné par

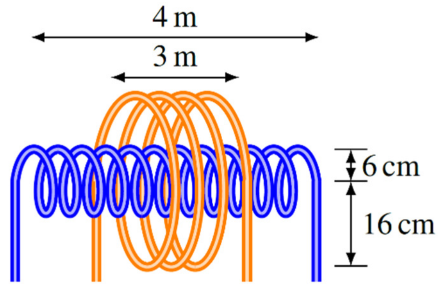
$$I_1 = 50A \cdot \sin\left(400\tfrac{rad}{s} \cdot t\right)$$

À t = 0,1 s, on mesure qu'il y a une différence de potentiel de 0,06 V induite dans un circuit voisin. Quelle est l'inductance mutuelle de ces deux circuits ?

3. Voici deux solénoïdes coaxiaux.

   a) Quelle est l'inductance mutuelle ?
   b) Quelle est la différence de potentiel aux bornes du solénoïde 2 à t = 0,12 s si le courant dans le solénoïde 1 est donné par la formule

$$I_1 = 80A \cdot \cos\left(500 \tfrac{rad}{s} \cdot t\right)$$



Le solénoïde interne 1 a 4 850 tours de fil
Le solénoïde externe 2 a 310 tours de fil

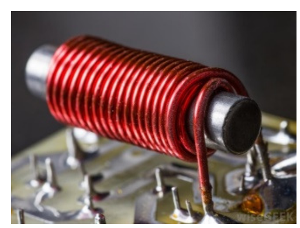
11.2 L'auto-inductance

4. Ce solénoïde à un diamètre de 2 cm et une longueur de 3 cm.

   a) Quelle est son inductance s'il y a 13 tours de fil ?
   b) Quelle est la différence de potentiel aux bornes de ce solénoïde s'il est parcouru par un courant qui varie au rythme de 50 A/s ? (Si on néglige la résistance du fil.)

www.p-wholesale.com/subcat/5/119/passive-component-p11.html

5. Cette petite bobine a un diamètre de 6 mm et une longueur de 4 cm. Le fil est entouré autour d'un cœur de fer, dont la perméabilité relative est de 200. À un certain moment, le courant dans la bobine est de 50 mA, la différence de potentiel aux bornes de la bobine est de 0,86 mV et le courant varie au rythme de 10 A/s. On va négliger la résistance du fil.



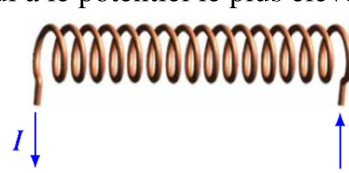
www.ottawalife.com/2013/07/putting-the-science-in-science-fiction-in-praise-of-electromagnets/

   a) Combien y a-t-il de tours de fil sur cette bobine ?
   b) Quelle est la grandeur du champ magnétique dans la bobine ? (N'oubliez pas l'effet du cœur de mu-métal.)

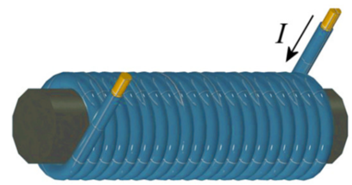
11.3 Les inducteurs

6. Dans ce solénoïde, il y a une différence de potentiel de 5 V entre les deux extrémités du fil formant le solénoïde quand le courant varie au rythme de 10 A/s, même si le fil n'a pas de résistance. C'est l'extrémité de droite qui a le potentiel le plus élevé.

   a) Est-ce que le courant augmente ou diminue ?
   b) Quelle est l'inductance de ce solénoïde ?



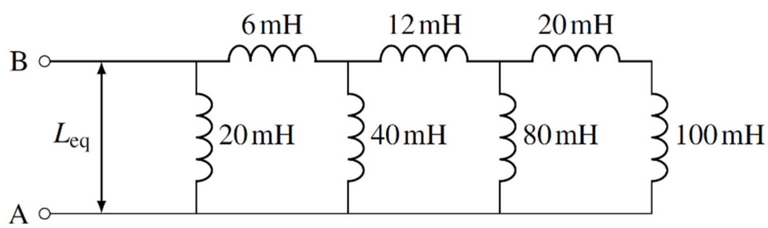
7. Ce solénoïde a un rayon de 6 cm et une longueur de 30 cm. Il y a 300 tours de fil et le fil est enroulé autour d'un noyau de fer dont la perméabilité relative est de 200. Il y a un courant de 100 A dans le solénoïde dans la direction montrée sur la figure. Toutefois, ce courant diminue au rythme de 50 A/s. Le fil a une résistance de 0,12 Ω. Déterminez la différence de potentiel entre les bornes du solénoïde et laquelle des extrémités du fil a le potentiel le plus élevé.



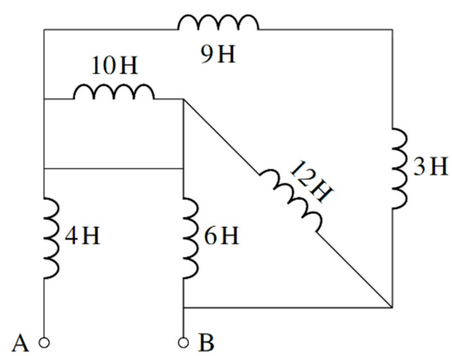
en.wikipedia.org/wiki/Electromagnet

11.4 Les inducteurs en série et en parallèle

8. Quelle est l'inductance équivalente de ce circuit ?



9. Quelle est l'inductance équivalente de ce circuit ?



11.5 L'énergie dans un inducteur

10. Il y a un courant de 5 A dans un inducteur de 50 mH.

a) Quelle est l'énergie emmagasinée dans l'inducteur ?
b) Quelle est la puissance de l'inducteur si ce courant diminue au rythme de 2 A/s ? Spécifiez si l'inducteur accumule ou donne de l'énergie.

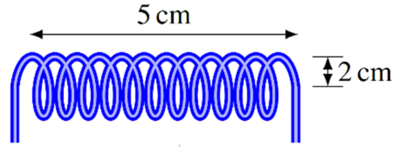
11. Un inducteur est formé d'un fil faisant 3000 tours autour d'un cœur de fer dont la perméabilité relative est de 200. L'inducteur a une longueur de 5 cm et un diamètre de 4 mm. Quelle est l'énergie dans cet inducteur quand il est parcouru par un courant de 10 A ?

11.6 La densité d'énergie du champ magnétique

12. Le champ magnétique de la Terre a une intensité de près de 0,5 G près de la surface de la Terre.

    a) Quelle est la densité d'énergie de ce champ ?
    b) Combien y a-t-il d'énergie du champ magnétique dans un volume de 1 km³ près de la surface de la Terre ?

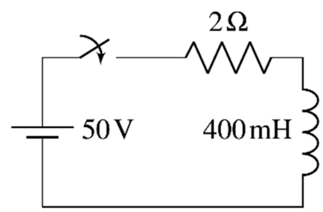
13. Quel doit être le courant dans ce solénoïde pour que la densité d'énergie du champ magnétique à l'intérieur soit de 1 J/m³ ?



11.7 Les circuits RL

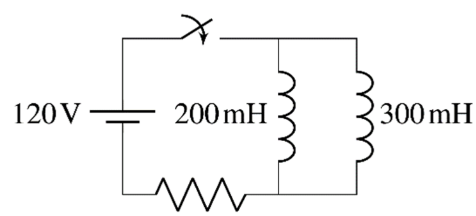
14. Dans le circuit suivant, on ferme l'interrupteur à $t = 0$ s.

    a) Quel est le courant à $t = 0{,}4$ s ?
    b) Quelle est la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur à ce moment ?
    c) À quel rythme augmente le courant à ce moment ? (On cherche donc dI/dt)
    d) Combien faudra-t-il de temps pour que le courant atteigne 90 % de sa valeur maximale ?

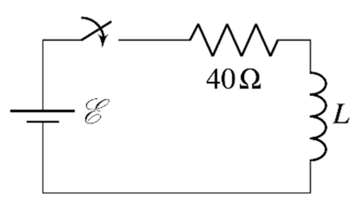


15. Dans le circuit suivant, on ferme l'interrupteur à $t = 0$ s.

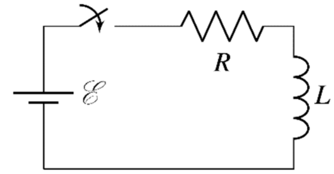
    a) Quel est le courant maximal ?
    b) Quel est le courant à $t = 0{,}02$ s ?
    c) Quelle est la puissance fournie par la pile à ce moment ?
    d) Quelle est la puissance dissipée en chaleur par la résistance à ce moment ?
    e) Quelle est la puissance des inducteurs à ce moment ? (On ne veut pas la puissance de chaque inducteur, mais la puissance totale des inducteurs.)



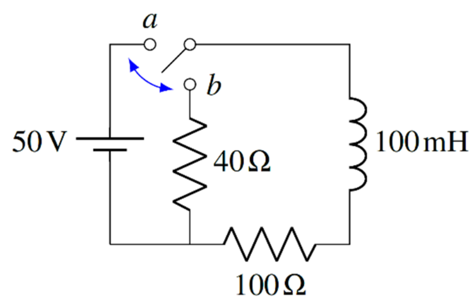
16. Dans le circuit de droite, on ferme l'interrupteur à $t = 0$ s. Quelle est la valeur de l'inductance si le courant atteint 40 % de sa valeur maximale en 1 seconde ?



17. Dans ce circuit, le courant atteint 10 % de sa valeur maximale 4 secondes après la fermeture de l'interrupteur. Combien faudra-t-il de temps pour que le courant atteigne 95 % de sa valeur maximale ?

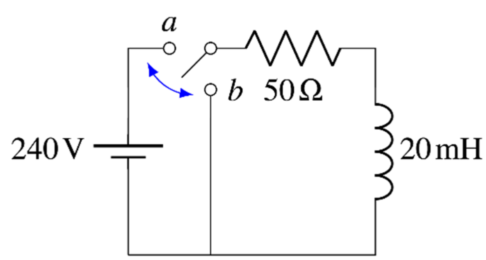


18. Dans le circuit suivant, on a placé l'interrupteur à la position *a* pendant très longtemps, de sorte qu'on peut dire que le courant dans le circuit a atteint sa valeur maximale. Quand on a ainsi atteint le courant maximum, on met l'interrupteur à la position *b*.



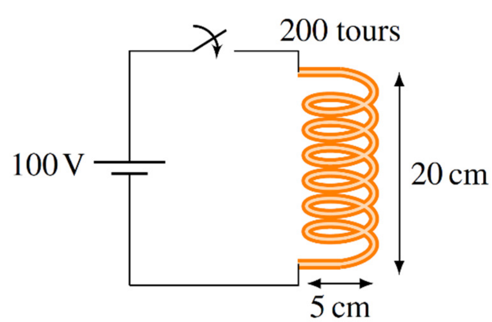
a) Quelle est le courant dans l'inducteur 0,5 ms après qu'on ait mis l'interrupteur à la position *b* ?
b) Quelle est la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur 0,5 ms après qu'on ait mis l'interrupteur à la position *b* ?
c) Combien faudra-t-il de temps pour que le courant dans l'inducteur baisse à 0,1 A ?

19. Dans le circuit suivant, on a placé l'interrupteur à la position 1 à t = 0 s. Ensuite, on a placé l'interrupteur à la position 2 à t = 1 ms.



a) Quel est le courant dans l'inducteur à t = 1,5 ms ?
b) Combien d'énergie a été dissipée en chaleur par la résistance entre t = 1 ms et t = 1,5 ms ?

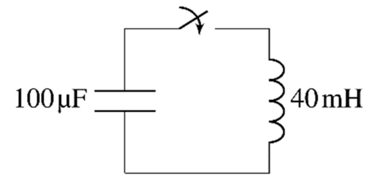
20. On branche un solénoïde aux bornes d'une batterie, tel qu'illustré sur la figure. Le solénoïde est fait d'un fil de cuivre, dont la résistivité est 1,678 x 10^{-8} Ωm, ayant un diamètre de 2 mm. Les autres fils du circuit ont une résistance négligeable.



a) Quel sera le champ magnétique dans le solénoïde 1 ms après la fermeture de l'interrupteur ?
b) Quelle sera la différence de potentiel aux bornes du solénoïde 1 ms après la fermeture de l'interrupteur ?

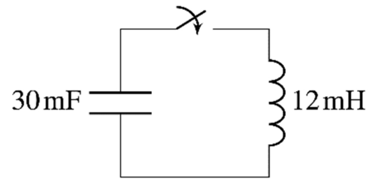
11.8 Les circuits LC

21. Dans le circuit LC suivant, le condensateur a une charge initiale de 20 μC. On ferme l'interrupteur à t = 0 s.



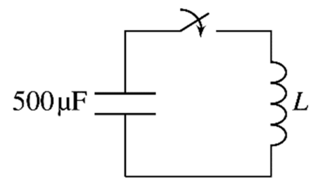
a) Quelle est la fréquence des oscillations ?
b) Quel est le courant maximal ?
c) Quel est le courant 1 ms après la fermeture de l'interrupteur ?

22. Dans le circuit LC suivant, la différence de potentiel aux bornes du condensateur est initialement de 100 V. On ferme l'interrupteur à t = 0 s.

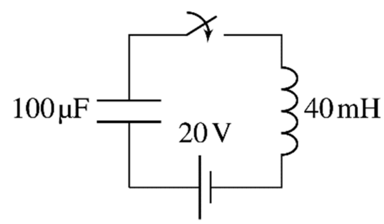


a) Quelle est l'énergie dans ce circuit ?
b) Quand, pour la première fois, l'énergie dans le condensateur sera-t-elle égale à l'énergie dans l'inducteur ?

23. Dans ce circuit LC, la charge du condensateur atteint, pour la première fois, une valeur nulle 0,001 s après la fermeture de l'interrupteur. Quelle est la valeur de l'inductance ?



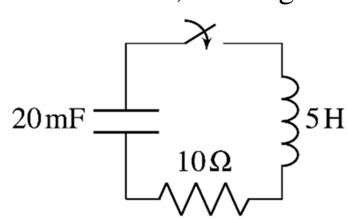
24. Dans le circuit LC suivant, le condensateur a une charge initiale nulle. On ferme l'interrupteur à t = 0 s.



a) Quelle est la fréquence des oscillations ?
b) Quelle est la charge maximale du condensateur ?
c) Quelle est la charge du condensateur 10 ms après la fermeture de l'interrupteur ?
d) Quel est le courant maximal ?

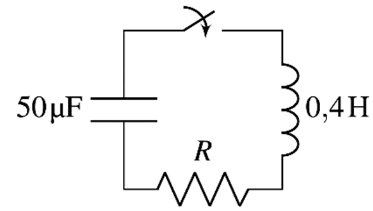
11.9 Les circuits RLC

25. Dans le circuit suivant, on ferme l'interrupteur à t = 0 s. Initialement, la charge du condensateur est de 0,4 C.

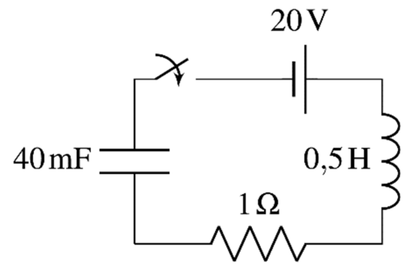


a) Quelle est la période des oscillations ?
b) Quelle est la charge du condensateur à t = 3 s ?
c) Quel est le courant à t = 3 s ?

26. Si on veut qu'il y ait des oscillations dans ce circuit, quelle est la valeur maximale que la résistance peut avoir ?



27. Dans le circuit suivant, on ferme l'interrupteur à t = 0 s. Initialement, la charge du condensateur est nulle.

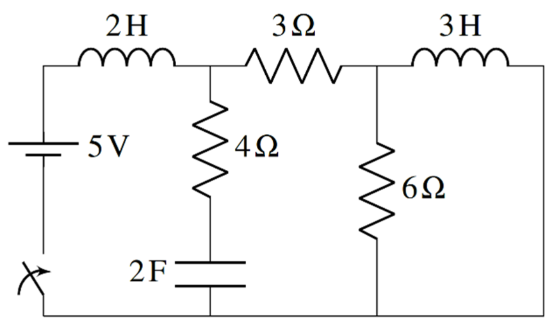


a) Quelle est la période des oscillations ?
b) Quelle est la charge du condensateur 0,2 s après la fermeture de l'interrupteur ?
c) Quelle sera la charge du condensateur au bout d'un temps très long ?
d) Quelle sera la charge maximale du condensateur ?
e) À quel moment le courant sera-t-il à son maximum ?
f) Quel sera le courant maximum dans ce circuit ?

11.10 Autres circuits avec des inducteurs

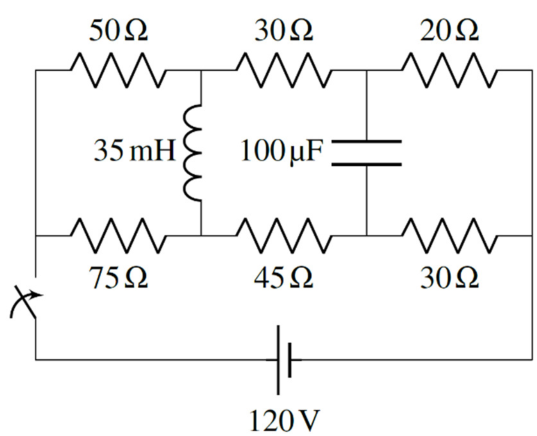
28. Dans le circuit suivant, quel est le courant fourni par la pile…

a) immédiatement après la fermeture de l'interrupteur (t = 0 s) ?
b) longtemps après la fermeture de l'interrupteur ($t = \infty$) ?



29. Dans ce circuit, quel est le courant fourni par la pile…

a) immédiatement après la fermeture de l'interrupteur (t = 0 s) ?
b) longtemps après la fermeture de l'interrupteur ($t = \infty$) ?



RÉPONSES

11.1 L’inductance mutuelle

1. a) 47,37 µH b) 0,01184 V c) 0,007106 V
2. 4,498 µH
3. a) 5,342 mH b) 65,13 V

11.2 L’auto-inductance

4. a) 2,224 µH b) 0,1112 mV
5. a) 22 tours de fil b) 6,912 mT

11.3 Les inducteurs

6. a) Le courant monte b) 0,5 H
7. 30,64 V. Le potentiel est plus élevé du côté gauche du solénoïde.

11.4 Les inducteurs en série et en parallèle

8. 12 mH
9. 7 H

11.5 L’énergie dans un inducteur

10. a) 0,625 J b) 0,5 W L’inducteur donne de l’énergie (fournit de la puissance)
11. 28,42 J

11.6 La densité d’énergie du champ magnétique

12. a) $9{,}947 \times 10^{-4}$ J/m³ b) 994 718 J
13. 0,1262 A

11.7 Les circuits RL

14. a) 21,62 A b) 6,77 V c) 16,92 A/s d) 0,4605 s
15. a) 15 A b) 11,05 A c) 1325,5 W d) 976,1 W e) 349,4 W
16. 78,3 H
17. 113,7 s
18. a) 0,2483 A b) 34,76 V c) 1,15 ms
19. a) 1,262 A b) 0,1782 J
20. a) 0,2159 T b) 100 V

11.8 Les circuits LC

21. a) 79,58 Hz b) 10 mA c) 4,794 mA
22. a) 150 J b) t = 14,9 ms
23. 810,6 μH
24. a) 79,58 Hz b) 4 mC c) 1,43 mC d) 1 A

11.9 Les circuits RLC

25. a) 2,094 s b) -15,41 mC c) 27,36 mA
26. 178,9 Ω
27. a) 0,8976 s b) 0,5965 C c) 0,8 C d) 1,311 A e) 0,20413 s f) 4,612 A

11.10 Autres circuits avec des inducteurs

28. a) 0 A b) 1,667 A
29. a) 2 A b) 2 A