

Les champs faits par une tige ou une plaque qui accélère

Quand une tige ou une plaque chargée accélère, il y a des champs électrique et magnétique qui sont produits. Ces champs vont apparaître près des objets qui accélèrent pour ensuite se propager de plus en plus loin à la vitesse de la lumière. Il s'agit en fait d'une onde électromagnétique qui se propage à la vitesse de la lumière.

Plusieurs vont dire que le champ magnétique variable fait par l'objet qui accélère est la source du champ électrique qui apparaît en même temps. On veut montrer ici que cela est faux et que les champs électrique et magnétique sont bel et bien faits par les charges de l'objet qui accélère.

Tige

Supposons qu'il y ait 2 tiges superposées immobiles : une positive et une négative. Ainsi, le champ électrique est nul quand les tiges sont au repos.

La tige négative reste toujours immobile, mais la tige positive commence soudainement à se déplacer vers le haut à vitesse constante à $t = 0$, ce qui génère un courant.

Le courant est donc nul pour $t < 0$ et I pour $t > 0$.

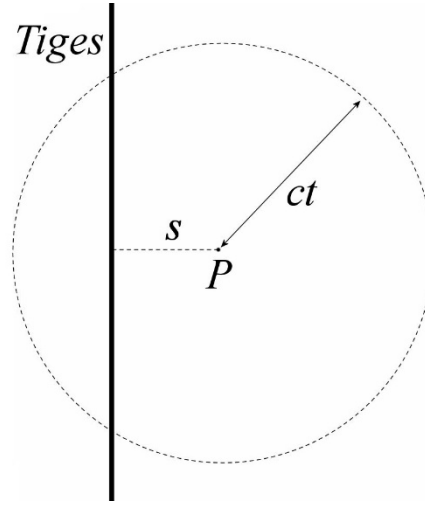
On va trouver les champs électrique et magnétique générés par ce courant à partir du vecteur potentiel A . C'est une technique très efficace pour trouver ces champs, mais elle n'est pas enseignée au collégial puisqu'elle est d'un niveau mathématique plus élevée.

Un courant génère un vecteur potentiel. Si on veut connaître le vecteur A à un endroit, il faut sommer tous les

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}}{r} dV$$

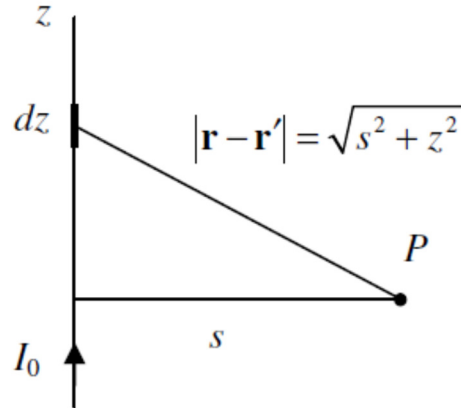
faits par les courants dans tout le volume autour du point (J est la densité de courant et r est la distance entre le point où on veut savoir le champ et le petit élément de volume).

Quand on calcule le vecteur A à un endroit près des tiges à un certain moment t après le départ de la tige positive, on considère le courant dans la tige jusqu'à la distance ct du point P . Au-delà de cette distance, le mouvement de la tige ne génère pas encore de vecteur A au point P . Le vecteur A fait par un courant apparaît autour du courant, mais pas instantanément partout. Il apparaît en se propageant à la vitesse de la lumière. Ainsi, les courants à l'extérieur d'une sphère de rayon ct autour de notre point P n'ont pas encore eu le temps de générer un vecteur A au point P .



En considérant uniquement le courant I dans la direction des z à l'intérieur de la sphère de rayon ct , le vecteur potentiel fait par les charges en mouvement est

$$\begin{aligned}
 \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{k} \int \frac{I}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dz \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{k} \int_{-\sqrt{c^2t^2 - s^2}}^{\sqrt{c^2t^2 - s^2}} \frac{I}{\sqrt{s^2 + z^2}} dz \\
 &= \frac{2\mu_0}{4\pi} \vec{k} \int_0^{\sqrt{c^2t^2 - s^2}} \frac{I}{\sqrt{s^2 + z^2}} dz \\
 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \vec{k} \operatorname{asinh} \left(\frac{z}{s} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{c^2t^2 - s^2}} \\
 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \vec{k} \operatorname{asinh} \left(\frac{\sqrt{c^2t^2 - s^2}}{s} \right)
 \end{aligned}$$



Le champ électrique se trouve avec

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

À une distance s des tiges, le champ est donc

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\
&= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^2 t^2 - s^2}{s^2}}} \frac{1}{2} \frac{1}{s} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - s^2}} 2c^2 t \vec{k} \\
&= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{s^2 + c^2 t^2 - s^2}} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - s^2}} c^2 t \vec{k} \\
&= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{ct} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - s^2}} c^2 t \vec{k} \\
&= -\frac{\mu_0 I c}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - s^2}} \vec{k}
\end{aligned}$$

Le champ magnétique se trouve avec

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

À une distance s des tiges, le champ est donc (où $\vec{\phi}$ est un vecteur unitaire entrant de la feuille)

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\
&= -\frac{\partial A_z}{\partial s} \vec{\phi} \\
&= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^2 t^2 - s^2}{s^2}}} \left(-\frac{1}{s^2} \sqrt{c^2 t^2 - s^2} + \frac{1}{s} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - s^2}} (-2s) \right) \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{s^2 + c^2 t^2 - s^2}} \left(\frac{1}{s} \sqrt{c^2 t^2 - s^2} + \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - s^2}} s \right) \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{ct} \left(\frac{1}{s} \sqrt{c^2 t^2 - s^2} - \frac{s}{\sqrt{c^2 t^2 - s^2}} \right) \vec{\phi} \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{ct} \left(\frac{1}{s} \frac{c^2 t^2 - s^2}{\sqrt{c^2 t^2 - s^2}} + \frac{1}{s} \frac{s^2}{\sqrt{c^2 t^2 - s^2}} \right) \vec{\phi} \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{ct} \left(\frac{1}{s} \frac{c^2 t^2}{\sqrt{c^2 t^2 - s^2}} \right) \vec{\phi} \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{s} \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - s^2}} \vec{\phi}
\end{aligned}$$

Voici donc ce qui se passe au point P quand la tige positive commence à se déplacer.

Au départ, il n'y a pas de champs. Les champs apparaissent près de la tige quand elle commence son mouvement et se propagent à la vitesse de la lumière dans toutes les directions. Le point P étant à une certaine distance de la tige, les champs n'ont pas encore eu le temps d'arriver au point P . Dans les formules, on a alors une racine négative, ce qui montre qu'il n'y a pas de champ.

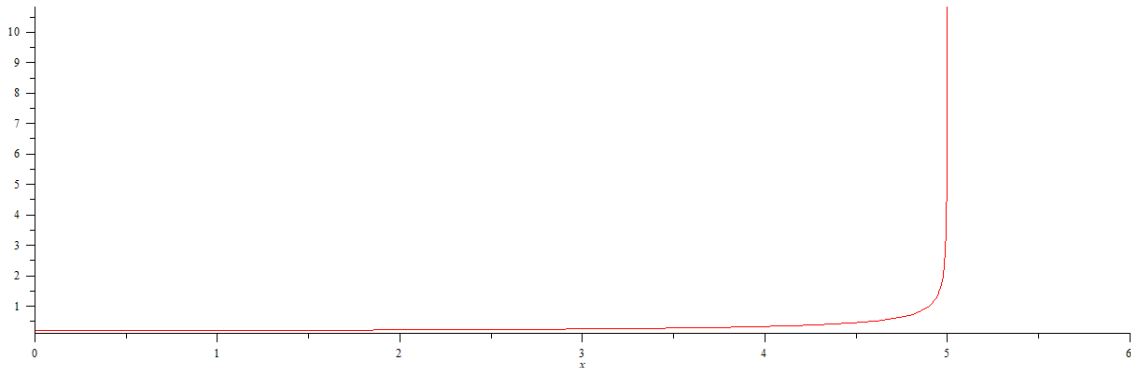
Quand $ct = s$, les champs arrivent au point P . Alors les champs sont très grands (infini selon notre formule !)

Ensuite, les champs diminuent à mesure que le temps avance. Au bout d'un temps très long, le champ électrique devient nul et le champ magnétique s'approche de

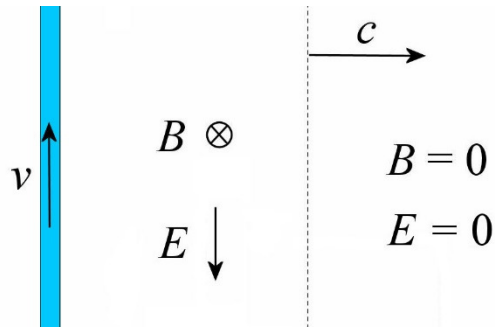
$$\frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

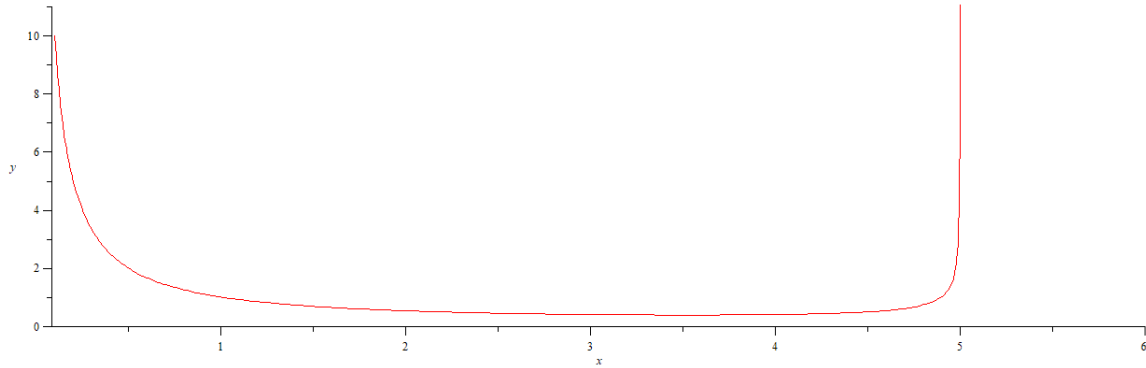
C'est le champ fait par un courant constant.

Voici un graphique montrant la grandeur du champ électrique en fonction de la distance des tiges pour un champ ayant eu le temps de se propager jusqu'à $x = 5$ m des tiges.



Voici un graphique montrant la grandeur du champ magnétique en fonction de la distance des tiges pour un champ ayant eu le temps de se propager jusqu'à $x = 5$ m des tiges.





Notez que le rapport E/B est

$$\frac{E}{B} = \frac{\mu_0 c I}{2\pi \sqrt{R^2 - s^2}} \frac{2\pi s \sqrt{R^2 - s^2}}{\mu_0 c I t}$$

$$= \frac{s}{t}$$

Quand la frontière arrive au point P , $ct = s$ et le rapport est c comme on doit avoir pour une onde électromagnétique (c'est ce qu'on a à la frontière du champ qui avance). Puis ce rapport augmente.

On n'a pas calculé le champ électrique à partir des variations de champ magnétique. On a calculé le champ électrique à partir de vecteur potentiel A fait par les charges en mouvement. Ce champ est donc fait par les charges en mouvement et non pas par le champ magnétique variable.

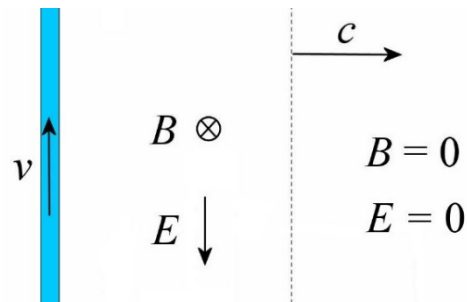
Plaque

Supposons maintenant qu'il y ait 2 plaques infinies superposées immobiles : une positive et une négative. On fait cela pour que le champ électrique soit nul quand les plaques sont au repos.

La plaque négative reste toujours immobile, mais la plaque positive commence soudainement à se déplacer vers le haut à la vitesse v à $t = 0$, ce qui génère un courant.

Le courant est donc nul pour $t < 0$ et I pour $t > 0$.

Il y aura alors des champs qui vont apparaître près de la plaque. Ces champs vont alors se propager à la vitesse de la lumière en s'éloignant de la plaque.



Le vecteur potentiel fait par les charges en mouvement est

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'$$

Le courant dans un petit morceau de plaque d'aire dA est

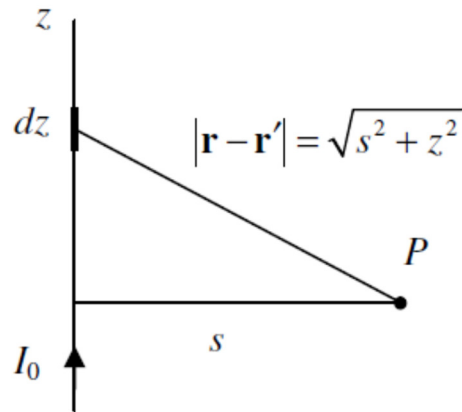
$$\begin{aligned} I &= \frac{dq}{dt} \\ &= \frac{\sigma dx dy}{dt} \\ &= \sigma v dx \end{aligned}$$

La densité de courant dans un petit morceau de plaque est

$$\begin{aligned} J &= \frac{I}{A} \\ &= \frac{\sigma v dx}{dx \cdot e} \\ &= \frac{\sigma v}{e} \end{aligned}$$

Si on intègre sur la plaque en coordonnées polaires sur cercle de rayon $\sqrt{c^2 t^2 - s^2}$ (la partie de la plaque dans la sphère de rayon ct), on obtient le A suivant.

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{k} \int \frac{\frac{\sigma v}{e}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e dA \\ &= \frac{\mu_0 \sigma v}{4\pi} \vec{k} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{c^2 t^2 - s^2}} \frac{1}{\sqrt{s^2 + \rho^2}} \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{\mu_0 \sigma v}{4\pi} \vec{k} 2\pi \sqrt{s^2 + \rho^2} \Big|_0^{\sqrt{c^2 t^2 - s^2}} \\ &= \frac{\mu_0 \sigma v}{2} \vec{k} \left(\sqrt{s^2 + c^2 t^2 - s^2} - s \right) \\ &= \frac{\mu_0 \sigma v}{2} \vec{k} (ct - s) \end{aligned}$$



Le champ électrique à une distance s est

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ &= -\frac{\mu_0 \sigma v c}{2} \vec{k}\end{aligned}$$

Le champ magnétique à une distance s est (où $\vec{\phi}$ est un vecteur unitaire entrant de la feuille)

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ &= -\frac{\partial A_z}{\partial s} \vec{\phi} \\ &= \frac{\mu_0 \sigma v}{2} \vec{\phi}\end{aligned}$$

Ici, les champs sont constants et le rapport des champs reste toujours

$$\frac{E}{B} = c$$

Encore une fois, on a des champs électrique et magnétique. Ce ne sont pas les variations du champ magnétique qui se font à la frontière de la zone de champ qui avance à la vitesse de la lumière qui font apparaître le champ électrique. Ce champ électrique est fait, tout comme le champ magnétique, par les charges en mouvement de la plaque. C'est ce que nous avons montré ici puisque nous avons calculé ce champ électrique à partir du vecteur potentiel fait par les charges en mouvement.

Quelques petites vérifications

Conservation de l'énergie pour la plaque

Le champ électrique s'oppose au mouvement de la plaque positive. Il faut donc faire un travail pour déplacer la plaque. C'est normal puisque l'énergie dans les champs électrique et magnétique augmente. Le travail fait pour déplacer la plaque positive devrait être le travail qu'il faut faire pour augmenter le volume des champs électrique et magnétique.

La force électrique sur un petit morceau de plaque est

$$\begin{aligned}dF &= Edq \\ &= \frac{v}{c} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sigma dA \\ &= \frac{v}{c} \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dA\end{aligned}$$

Pour déplacer la plaque à vitesse constante, on doit exercer cette même force dans le sens du déplacement. La puissance qu'on doit fournir pour déplacer ce petit morceau est donc

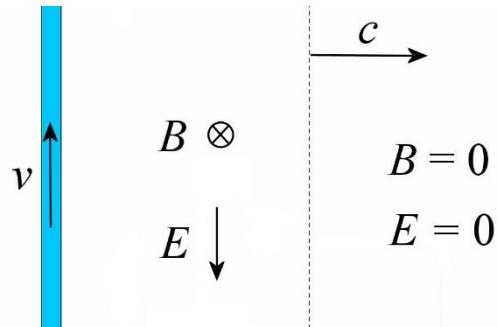
$$\begin{aligned} dP &= dF \cdot v \\ &= \frac{v^2}{c} \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dA \end{aligned}$$

La puissance fournie par unité de surface est donc

$$\frac{dP}{dA} = \frac{v^2}{c} \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

Voyons voir si cela correspond au rythme d'augmentation de l'énergie des champs qui sont de chaque côté de ce petit morceau de surface de la plaque.

L'énergie du champ qui apparait durant le temps dt correspond à l'énergie qui il a dans le volume qui s'ajoute quand la frontière avant d'une distance cdt . Un petit morceau de ce volume est $cdtdA$. L'énergie dans le champ électrique qui s'ajoute dans ce petit morceau de volume est



$$\begin{aligned} dU_E &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dA c dt \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{v^2}{c^2} \frac{\sigma^2}{4\epsilon_0^2} dA c dt \\ &= \frac{\sigma^2 v^2}{8\epsilon_0 c} dA dt \end{aligned}$$

L'énergie dans le champ magnétique qui s'ajoute est

$$\begin{aligned} dU_B &= \frac{1}{2\mu_0} B^2 dA c dt \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \frac{\mu_0^2 \sigma^2 v^2}{4} dA c dt \\ &= \frac{\sigma^2 v^2}{8\epsilon_0 c} dA dt \end{aligned}$$

L'énergie totale dans ce petit volume est donc

$$dU = dU_E + dU_B$$

$$= \frac{\sigma^2 v^2}{4\epsilon_0 c} dA dt$$

Comme chaque petit morceau de plaque fait un petit volume de chaque côté de la plaque, l'énergie dans ces deux volumes est

$$dU = \frac{\sigma^2 v^2}{2\epsilon_0 c} dA dt$$

La puissance par unité de surface est donc

$$\frac{dU}{dA dt} = \frac{\sigma^2 v^2}{2\epsilon_0 c}$$

C'est la même puissance que celle nécessaire pour déplacer la plaque !

Conservation de l'énergie pour la tige

Le champ électrique s'oppose au mouvement de la tige positive. Il faut donc faire un travail pour déplacer la tige. C'est normal puisque l'énergie dans les champs électrique et magnétique augmente. Le travail fait pour déplacer la tige positive devrait être le travail qu'il faut faire pour augmenter le volume des champs électrique et magnétique.

À la tige ($s = 0$), le champ est

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 I c}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - 0}} \vec{k}$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{2\pi t} \vec{k}$$

La force sur un petit morceau de longueur dz est donc

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$= -\lambda dz \frac{\mu_0 I}{2\pi t} \vec{k}$$

Pour déplacer la tige à vitesse constante, on doit exercer cette même force dans le sens du déplacement. La puissance qu'on doit fournir pour déplacer ce petit morceau est donc

$$\begin{aligned}
P &= dF \cdot v \\
&= \lambda dz \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{t} v \\
&= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \frac{1}{t} dz
\end{aligned}$$

Voyons voir si cela correspond au rythme d'augmentation de l'énergie des champs qui sont tout autour de ce petit morceau de la tige.

Ici, ce n'est pas aussi facile parce que les champs baissent en fonction du temps. On ne peut donc pas uniquement regarder ce qui s'ajoute devant la frontière parce que le champ baisse derrière la frontière, ce qui fait baisser l'énergie derrière la frontière. On va devoir calculer l'énergie totale des champs au temps t et ensuite l'énergie totale des champs au temps $t + dt$. L'écart entre les 2 sera l'augmentation d'énergie.

Au temps t , l'énergie est

$$\begin{aligned}
U &= \int \left(\frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right) dV \\
&= \int \left(\frac{1}{2\mu_0} \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2} \frac{1}{s^2} \frac{c^2 t^2}{c^2 t^2 - s^2} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\mu_0^2 I^2 c^2}{4\pi^2} \frac{1}{c^2 t^2 - s^2} \right) dV \\
&= \int \left(\frac{1}{2\mu_0} \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2} \frac{1}{s^2} \frac{c^2 t^2}{c^2 t^2 - s^2} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\mu_0^2 I^2 c^2}{4\pi^2} \frac{1}{c^2 t^2 - s^2} \right) s ds d\theta dz \\
&= 2\pi \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2} \int_{\epsilon}^{ct-\delta} \left(\frac{1}{s} \frac{c^2 t^2}{c^2 t^2 - s^2} + \frac{1}{s} \frac{s^2}{c^2 t^2 - s^2} \right) ds dz \\
&= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_{\epsilon}^{ct-\delta} \left(\frac{1}{s} \frac{c^2 t^2 + s^2}{c^2 t^2 - s^2} \right) ds dz \\
&= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{s}{c^2 t^2 - s^2} \right) \right]_{\epsilon}^{ct-\delta} dz \\
&= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\ln \left(\frac{ct}{c^2 t^2 - c^2 (t-\delta)^2} \right) - \ln \frac{\epsilon}{c^2 t^2} \right) dz \\
&= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \left(\frac{ct}{c^2 t^2 - c^2 t^2 + 2c^2 t\delta} \cdot \frac{c^2 t^2}{\epsilon} \right) dz \\
&= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \left(\frac{ct^2}{2c^2 \delta} \cdot \frac{1}{\epsilon} \right) dz
\end{aligned}$$

où δ et ε sont de très petits nombres. (On a dû utiliser ces très petits nombres pour éviter que l'intégrale diverge. On trouverait l'énergie totale en faisant tendre ces nombres vers 0, mais on n'aura pas besoin de la faire ici.)

Au temps dt plus tard, on a

$$\begin{aligned} U' &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \left(\frac{c(t+dt)^2}{2c^2\delta} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \right) dz \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \left(\frac{ct^2 + 2ctdt}{2c^2\delta} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \right) dz \end{aligned}$$

La différence d'énergie est

$$\begin{aligned} U' - U &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \left(\frac{ct^2 + 2ctdt}{2c^2\delta} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \right) dz - \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \left(\frac{ct^2}{2c^2\delta} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \right) dz \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{ct^2 + 2ctdt}{2c^2\delta} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \right) - \ln \left(\frac{ct^2}{2c^2\delta} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \right) \right] dz \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \left(\frac{\frac{ct^2 + 2ctdt}{2c^2\delta} \cdot \frac{1}{\varepsilon}}{\frac{ct^2}{2c^2\delta} \cdot \frac{1}{\varepsilon}} \right) dz \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \left(\frac{ct^2 + 2ctdt}{ct^2} \right) dz \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \left(1 + \frac{2dt}{t} \right) dz \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \frac{dt}{t} dz \end{aligned}$$

La puissance est donc

$$\begin{aligned} P &= \frac{dU}{dt} \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \frac{1}{t} dz \end{aligned}$$

C'est la même puissance que celle nécessaire pour tirer la tige.

Vérification que les champs des tiges sont en accord avec les équations de Maxwell dans le vide

Selon les équations de Maxwell, on doit avoir

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Le côté gauche de l'équation est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial E_z}{\partial s} \vec{\phi} \\ &= \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \frac{1}{2} (c^2 t^2 - s^2)^{-3/2} (-2s) \vec{\phi} \\ &= -\frac{\mu_0 I c}{2\pi} \frac{s}{(c^2 t^2 - s^2)^{3/2}} \vec{\phi}\end{aligned}$$

Le côté droit de l'équation est

$$\begin{aligned}-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi s} \left(\frac{c}{\sqrt{c^2 t^2 - s^2}} - c t \frac{1}{2} (c^2 t^2 - s^2)^{-3/2} (2c^2 t) \right) \vec{\phi} \\ &= -\frac{\mu_0 I c}{2\pi s} \left(\frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - s^2}} - \frac{c^2 t^2}{(c^2 t^2 - s^2)^{3/2}} \right) \vec{\phi} \\ &= -\frac{\mu_0 I c}{2\pi s} \left(\frac{c^2 t^2 - s^2}{(c^2 t^2 - s^2)^{3/2}} - \frac{c^2 t^2}{(c^2 t^2 - s^2)^{3/2}} \right) \vec{\phi} \\ &= -\frac{\mu_0 I c}{2\pi s} \left(\frac{-s^2}{(c^2 t^2 - s^2)^{3/2}} \right) \vec{\phi} \\ &= \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \frac{s}{(c^2 t^2 - s^2)^{3/2}} \vec{\phi}\end{aligned}$$

Bingo, les deux côtés donnent le même résultat.

On doit aussi avoir que

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Le côté gauche de l'équation est

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{s} \frac{\partial (sB_\phi)}{\partial s} \vec{k} \\
&= \frac{1}{s} \frac{\mu_0 I c t}{2\pi} \left(-\frac{1}{2} (c^2 t^2 - s^2)^{-3/2} (-2s) \right) \vec{k} \\
&= \frac{1}{s} \frac{\mu_0 I c t}{2\pi} \frac{s}{(c^2 t^2 - s^2)^{3/2}} \vec{k} \\
&= \frac{\mu_0 I c t}{2\pi} \frac{1}{(c^2 t^2 - s^2)^{3/2}} \vec{k}
\end{aligned}$$

Le côté droit de l'équation est

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{1}{c^2} \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \frac{1}{2} (c^2 t^2 - s^2)^{-3/2} (2c^2 t) \vec{k} \\
&= \frac{\mu_0 I c t}{2\pi} \frac{1}{(c^2 t^2 - s^2)^{3/2}} \vec{k}
\end{aligned}$$

Bingo, les deux côtés donnent le même résultat.

Annexe : Calcul du champ loin pour la plaque en mouvement à partir du champ fait par une particule qui accélère

Supposons qu'il y ait 2 plaques superposées immobiles : une positive et une négative. On fait cela pour que le champ électrique soit nul quand les plaques sont au repos.

La plaque négative reste toujours immobile, mais la plaque positive commence soudainement à se déplacer vers le haut à la vitesse v à $t = 0$, ce qui génère un courant.

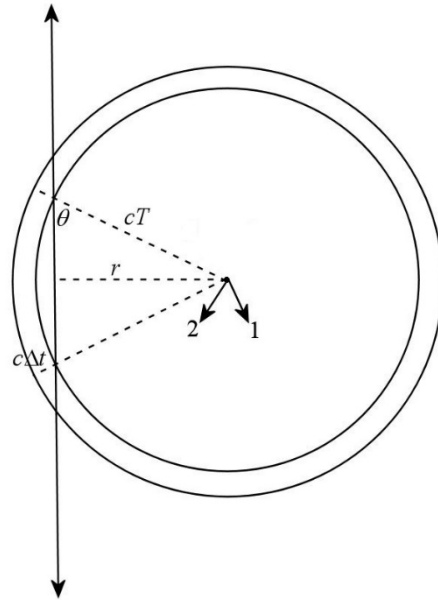
La plaque accélère vers le haut durant le temps Δt . Pendant l'accélération, la charge fait un champ électrique.

Chaque morceau entre les cercles (ce sont eux qui accélèrent) fait un champ vers le bas donné par

$$E_T = \frac{a \sin \theta}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Si on suppose que le point P est loin de la plaque, alors $\sin \theta = 1$. Loin de la plaque, ceci est déjà composante du champ vers le bas. Le champ vers le bas est donc

$$E = \frac{a}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$



La charge qui accélère entre les cercles est

$$2\sigma \cdot \text{surface} = \sigma 2\pi y \cdot \frac{c\Delta t}{\cos \theta}$$

Comme

$$\cos \theta = \frac{y}{cT}$$

la charge est

$$\begin{aligned} q &= \sigma 2\pi y \cdot \frac{c\Delta t cT}{y} \\ &= \sigma 2\pi c^2 \Delta t T \end{aligned}$$

On a donc

$$E = \frac{a}{c^2} \frac{\sigma 2\pi c^2 \Delta t T}{4\pi \epsilon_0 R}$$

Comme $R = cT$, on a

$$\begin{aligned} E &= \frac{a}{c^2} \frac{\sigma 2\pi c^2 \Delta t T}{4\pi \epsilon_0 R} \\ &= \frac{a}{c^2} \frac{\sigma 2\pi c^2 \Delta t T}{4\pi \epsilon_0 c T} \\ &= \frac{a}{c} \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

Comme $a\Delta t = v$, on a

$$E = \frac{v}{c} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$