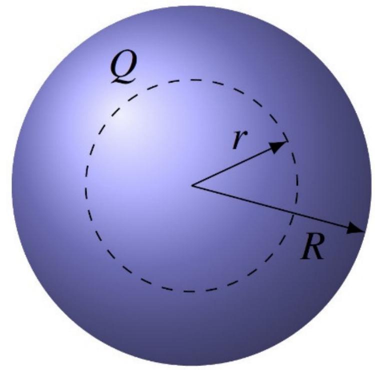
Le champ et le potentiel à l'intérieur d'une sphère uniformément chargée

Le champ électrique

Pour trouver ce champ, on va séparer la sphère en 2 parties : une sphère de rayon r (sphère 1) et une sphère ayant un rayon R et possédant une cavité ayant un rayon r (sphère 2).



Pour la sphère 1, le point où on veut savoir le champ est à l'extérieur de la sphère. Le champ fait par cette sphère est donc

$$E_1 = \frac{kQ_1}{r^2}$$

Pour la sphère 2, le point où on veut savoir le champ est à l'intérieur de la cavité de la sphère. Le champ fait par cette sphère est donc

$$E_2 = 0$$

Le champ total est donc

$$\begin{aligned} E_{tot} &= E_1 + E_2 \\ &= \frac{kQ_1}{r^2} \end{aligned}$$

Pour trouver le champ, il nous faut la charge de la sphère ayant un rayon r. Pour trouver cette charge, on commence par trouver la charge volumique de la sphère. Cette densité de charge est

$$\rho = \frac{\text{charge}}{\text{volume}} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

La charge de la sphère ayant un rayon r est donc

$$\begin{aligned} Q_1 &= \rho V \\ &= \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{Qr^3}{R^3} \end{aligned}$$

Le champ est donc

$$
\begin{aligned}
E_{tot} &= \frac{kQ_1}{r^2} \\
&= \frac{kQ\frac{r^3}{R^3}}{r^2} \\
&= \frac{kQr}{R^3}
\end{aligned}
$$

Toutefois, à la distance r du centre, on est à l'intérieur de la matière qui compose la sphère. Puisque la permittivité relative de cette matière est de κ, le champ est

$$
E = \frac{kQr}{\kappa R^3}
$$

Le potentiel électrique

Le potentiel est

$$
\begin{aligned}
V &= -\int E dr \\
&= -\int \frac{kQr}{\kappa R^3} dr \\
&= -\frac{kQr^2}{2\kappa R^3} + Cst
\end{aligned}
$$

On sait que le potentiel est nul à l'infini, mais on ne peut pas utiliser cette information puisque cette formule n'est pas valide à l'infini. Elle n'est valide que pour l'intérieur de la sphère. Par contre, cette formule doit donner le même potentiel que celui obtenu avec la formule valide à l'extérieur de la sphère quand on calcule le potentiel à la surface de la sphère. Selon la formule valide à l'extérieur, le potentiel à la surface est

$$
V = \frac{kQ}{R}
$$

Puisque la formule valide à l'intérieur doit donner la même valeur à la surface, on a

$$
\begin{aligned}
-\frac{kQR^2}{2\kappa R^3} + C &= \frac{kQ}{R} \\
-\frac{kQ}{2\kappa R} + C &= \frac{kQ}{R}
\end{aligned}
$$

On peut alors trouver la constante.

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{kQ}{R} + \frac{kQ}{2\kappa R} \\
&= \frac{kQ}{R}\left(1 + \frac{1}{2\kappa}\right)
\end{aligned}
$$

La formule du potentiel à l'intérieur de la sphère est donc

$$\begin{aligned} V &= -\frac{kQr^2}{2R^3} + C \\ &= -\frac{kQr^2}{2R^3} + \frac{kQ}{R}\left(1 + \frac{1}{2\kappa}\right) \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$V = \frac{kQ}{2R}\left(2 + \frac{1}{\kappa} - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Examinons ce que ça donne pour une sphère uniformément chargée faite d'une substance ayant une permittivité relative de 1. Dans ce cas, le potentiel est

$$V = \frac{kQ}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

La figure suivante montre les graphiques du potentiel et du champ électrique en fonction de la distance du centre de cette sphère. On remarque que le potentiel augmente tant qu'il y a du champ électrique. Plus E est grand, plus le potentiel augmente vite.