

Preuve de la solution de l'équation différentielle pour le circuit RLC avec une source

(Cette solution demande une connaissance des méthodes de résolution des équations différentielles vue en calcul avancé.)

Puisque

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

l'équation

$$\mathcal{E} - \frac{Q}{C} - RI - L \frac{dI}{dt} = 0$$

peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

Il s'agit d'une équation linéaire d'ordre 2 non homogène à coefficient constant. On commence par trouver la solution de l'équation homogène.

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\lambda = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}$$

$$\lambda = -\frac{R}{2L} \pm i \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

(Ici, on s'intéresse au cas où il n'y a pas trop de résistance, c'est-à-dire au cas où la racine est négative, d'où la valeur imaginaire de la racine).

La solution est donc

$$Q = e^{-\frac{Rt}{L}} \left(A \cos \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2} t \right) + B \sin \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2} t \right) \right)$$

On peut simplifier l'écriture en posant que

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}$$

L'équation devient alors

$$Q = e^{-\alpha t} (A \cos(\omega' t) + B \sin(\omega' t))$$

Revenons maintenant à l'équation non homogène

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

Puisque le terme de droite est une constante, la solution particulière doit être aussi une constante.
La solution doit donc être

$$Q_p = K$$

En utilisant cette solution dans l'équation,

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

on arrive

$$0 + 0 + \frac{K}{LC} = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

$$K = C\mathcal{E}$$

On a donc

$$Q = e^{-\alpha t} (A \cos(\omega' t) + B \sin(\omega' t)) + C\mathcal{E}$$

Puisque la charge est nulle à $t = 0$, on doit avoir

$$0 = e^{-0} (A \cos(0) + B \sin(0)) + C\mathcal{E}$$

$$0 = A + C\mathcal{E}$$

$$A = -C\mathcal{E}$$

La solution devient donc

$$Q = e^{-\alpha t} (-C\mathcal{E} \cos(\omega' t) + B \sin(\omega' t)) + C\mathcal{E}$$

Puisque le courant

$$\frac{dQ}{dt} = -\alpha e^{-\alpha t} (-C\mathcal{E} \cos(\omega' t) + B \sin(\omega' t)) + e^{-\alpha t} (C\mathcal{E} \omega' \sin(\omega' t) + B \omega' \cos(\omega' t))$$

est aussi nulle à $t = 0$, on a

$$0 = -\alpha e^{-0} (-C\mathcal{E} \cos(0) + B \sin(0)) + e^{-0} (C\mathcal{E} \omega' \sin(0) + B \omega' \cos(0))$$

$$0 = -\alpha (-C\mathcal{E}) + (B \omega')$$

$$B \omega' = -\alpha (C\mathcal{E})$$

$$B = -\frac{\alpha C\mathcal{E}}{\omega'}$$

La solution est donc

$$Q = e^{-\alpha t} \left(-C\mathcal{E} \cos(\omega' t) - C\mathcal{E} \frac{\alpha}{\omega'} \sin(\omega' t) \right) + C\mathcal{E}$$

$$Q = C\mathcal{E} \left(1 - e^{-\alpha t} \left(\cos(\omega' t) + \frac{\alpha}{\omega'} \sin(\omega' t) \right) \right)$$