

## Preuve de la solution de l'équation différentielle pour le circuit RLC sans source

(Cette solution demande une connaissance des méthodes de résolution des équations différentielles vue en calcul avancé.)

Puisque

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

l'équation

$$-\frac{Q}{C} - L \frac{dI}{dt} - RI = 0$$

peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = 0$$

Il s'agit d'une équation linéaire d'ordre 2 homogène à coefficient constant. L'équation caractéristique de cette équation est

$$\begin{aligned}\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} &= 0 \\ \lambda &= \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} \\ \lambda &= -\frac{R}{2L} \pm i\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\end{aligned}$$

(Ici, on s'intéresse au cas où il n'y a pas trop de résistance, c'est-à-dire au cas où la racine est toujours négative, d'où la valeur imaginaire de la racine).

La solution est donc

$$Q = e^{-\frac{Rt}{L}} \left( A \cos \left( \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t \right) \right)$$

On peut simplifier l'écriture en posant que

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}$$

L'équation devient alors

$$Q = e^{-\alpha t} (A \cos(\omega' t) + B \sin(\omega' t))$$

Puisque la charge est  $Q_0$  à  $t = 0$ , on doit avoir

$$Q_0 = e^{-0} (A \cos(0) + B \sin(0))$$

$$Q_0 = A$$

La solution devient donc

$$Q = e^{-\alpha t} (Q_0 \cos(\omega' t) + B \sin(\omega' t))$$

Puisque le courant

$$\frac{dQ}{dt} = -\alpha e^{-\alpha t} (Q_0 \cos(\omega' t) + B \sin(\omega' t)) + e^{-\alpha t} (-Q_0 \omega' \sin(\omega' t) + B \omega' \cos(\omega' t))$$

est nulle à  $t = 0$ , on a

$$0 = -\alpha e^{-0} (Q_0 \cos(0) + B \sin(0)) + e^{-0} (-Q_0 \omega' \sin(0) + B \omega' \cos(0))$$

$$0 = -\alpha (Q_0) + (B \omega')$$

$$B = \frac{\alpha Q_0}{\omega'}$$

La solution est donc

$$Q = Q_0 e^{-\alpha t} \left( \cos(\omega' t) + \frac{\alpha}{\omega'} \sin(\omega' t) \right)$$