Preuve de la solution de l'équation différentielle pour le circuit RL

L'équation est

$$\mathscr{E} - RI - L\frac{dI}{dt} = 0$$

On a donc

$$\begin{gathered}
\mathscr{E} - RI = L\frac{dI}{dt} \\
\frac{1}{L}dt = \frac{dI}{\mathscr{E} - RI} \\
\int \frac{1}{L}dt = \int \frac{dI}{\mathscr{E} - RI} \\
\frac{t}{L} = \frac{-1}{R}\ln\left(\mathscr{E} - RI\right) + C
\end{gathered}$$

Où C est une constante. On trouve cette constance en sachant que le courant à $t = 0$ est nul. On a donc

$$\begin{gathered}
\frac{t}{L} = \frac{-1}{R}\ln\left(\mathscr{E} - RI\right) + C \\
\frac{0}{L} = \frac{-1}{R}\ln\left(\mathscr{E} - R \cdot 0\right) + C \\
C = \frac{1}{R}\ln\left(\mathscr{E}\right)
\end{gathered}$$

On a donc

$$\frac{t}{L} = \frac{-1}{R}\ln\left(\mathscr{E} - RI\right) + \frac{1}{R}\ln\left(\mathscr{E}\right)$$

En simplifiant, on arrive à

$$\frac{t}{L} = \frac{-1}{R}\ln\left(\mathscr{E} - RI\right) + \frac{1}{R}\ln\left(\mathscr{E}\right)$$

$$\frac{t}{L} = \frac{-1}{R}\ln\left(\frac{\mathscr{E} - RI}{\mathscr{E}}\right)$$

$$\frac{-Rt}{L} = \ln\left(\frac{\mathscr{E} - RI}{\mathscr{E}}\right)$$

$$e^{\frac{-Rt}{L}} = \frac{\mathscr{E} - RI}{\mathscr{E}}$$

$$\mathscr{E}\, e^{\frac{-Rt}{L}} = \mathscr{E} - RI$$

$$RI = \mathscr{E} - \mathscr{E}\, e^{\frac{-Rt}{L}}$$

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$$