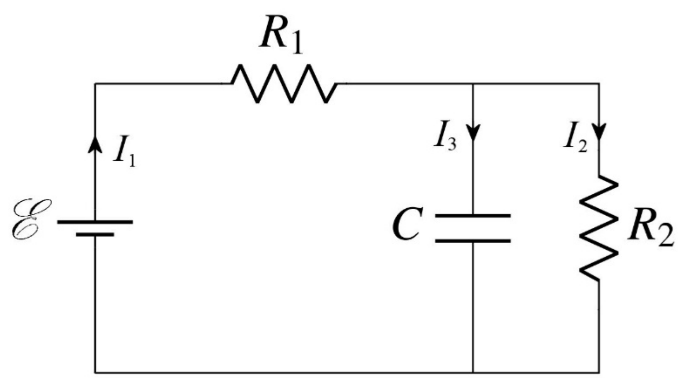
Circuit RC avec R et C en parallèle

Nous avons ce circuit.



La loi des nœuds donne

$$I_1 = I_2 + I_3$$

La loi des mailles (grande maille) donne

$$\mathscr{E} - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0$$

La loi des mailles (maille de droite) donne

$$-\frac{Q}{C} + R_2 I_2 = 0$$

Puisque

$$I_3 = \frac{dQ}{dt}$$

nos trois équations sont

$$I_1 = I_2 + \frac{dQ}{dt}$$
$$\mathscr{E} - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0$$
$$-\frac{Q}{C} + R_2 I_2 = 0$$

En remplaçant la première équation dans la 2e équation, on a

$$\mathscr{E} - R_1 \left(I_2 + \frac{dQ}{dt} \right) - R_2 I_2 = 0$$

$$\mathscr{E} - R_1 I_2 - R_1 \frac{dQ}{dt} - R_2 I_2 = 0$$

$$\mathscr{E} - \left(R_1 + R_2\right) I_2 - R_1 \frac{dQ}{dt} = 0$$

Il ne reste alors que ces 2 équations.

$$\mathscr{E} - \left(R_1 + R_2\right) I_2 - R_1 \frac{dQ}{dt} = 0$$

$$-\frac{Q}{C} + R_2 I_2 = 0$$

En isolant I_2 dans la 2^e équation, on a

$$I_2 = \frac{Q}{R_2 C}$$

En utilisant cette valeur dans la première équation, on arrive à

$$\mathscr{E} - \left(R_1 + R_2\right) \frac{Q}{R_2 C} - R_1 \frac{dQ}{dt} = 0$$

Il ne reste qu'à isoler Q dans cette équation. On commence par séparer les variables Q et t.

$$\mathscr{E} - \left(\tfrac{R_1 + R_2}{R_2 C}\right) Q = R_1 \frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{1}{R_1} dt = \frac{dQ}{\mathscr{E} - \left(\tfrac{R_1 + R_2}{R_2 C}\right) Q}$$

On va ensuite faire l'intégrale de chaque côté.

$$\frac{1}{R_1} dt = \frac{R_2 C}{R_1 + R_2} \frac{\left(\tfrac{R_1 + R_2}{R_2 C}\right) dQ}{\mathscr{E} - \left(\tfrac{R_1 + R_2}{R_2 C}\right) Q}$$

$$\frac{1}{R_1} dt = \frac{R_2 C}{R_1 + R_2} \frac{du}{\mathscr{E} - u}$$

$$\int \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} dt = \int \frac{du}{\mathscr{E} - u}$$

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t = -\ln\left(\mathscr{E} - u\right) + Cst$$

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t = -\ln\left(\mathscr{E} - \left(\tfrac{R_1 + R_2}{R_2 C}\right) Q\right) + Cst$$

On peut trouver la constante, car on sait que $Q = 0$ à $t = 0$.

$$\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}\cdot 0=-\ln\left(\mathscr{E}-\left(\tfrac{R_1+R_2}{R_2C}\right)\cdot 0\right)+Cst$$

$$0=-\ln\left(\mathscr{E}\right)+Cst$$

$$Cst=\ln\left(\mathscr{E}\right)$$

On a donc

$$\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t=-\ln\left(\mathscr{E}-\left(\tfrac{R_1+R_2}{R_2C}\right)Q\right)+\ln\left(\mathscr{E}\right)$$

On peut finalement isoler Q.

$$-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t=\ln\left(\mathscr{E}-\left(\tfrac{R_1+R_2}{R_2C}\right)Q\right)-\ln\left(\mathscr{E}\right)$$

$$-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t=\ln\left(\frac{\mathscr{E}-\left(\tfrac{R_1+R_2}{R_2C}\right)Q}{\mathscr{E}}\right)$$

$$e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}=\frac{\mathscr{E}-\left(\tfrac{R_1+R_2}{R_2C}\right)Q}{\mathscr{E}}$$

$$\mathscr{E}e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}=\mathscr{E}-\left(\tfrac{R_1+R_2}{R_2C}\right)Q$$

$$\left(\tfrac{R_1+R_2}{R_2C}\right)Q=\mathscr{E}-\mathscr{E}e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}$$

$$Q=C\mathscr{E}\,\frac{R_2}{R_1+R_2}\left(1-e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}\right)$$