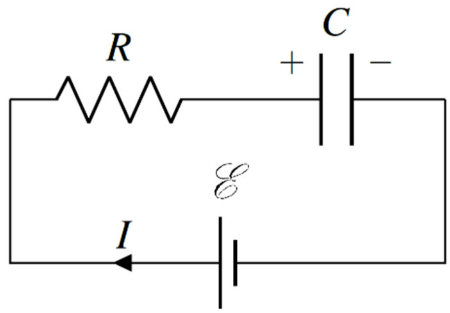
Circuit RC avec une source

Nous avons ce circuit.



La loi des mailles donne

$$\mathscr{E} - RI - \frac{Q}{C} = 0$$

Puisque

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

on arrive à

$$\mathscr{E} - R\frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

Il ne reste qu'à isoler Q dans cette équation. On commence par séparer les variables Q et t.

$$\mathscr{E} - \frac{Q}{C} = R\frac{dQ}{dt}$$

$$C\mathscr{E} - Q = RC\frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{1}{RC}dt = \frac{dQ}{C\mathscr{E} - Q}$$

On fait l'intégrale de chaque côté.

$$\int \frac{1}{RC}dt = \int \frac{dQ}{C\mathscr{E} - Q}$$

$$\frac{t}{RC} = -\ln\left(C\mathscr{E} - Q\right) + Cst$$

On peut trouver la constante, car on sait que $Q = 0$ à $t = 0$.

$$\frac{0}{RC} = -\ln\left(C\mathscr{E} - 0\right) + Cst$$
$$0 = -\ln\left(C\mathscr{E}\right) + Cst$$
$$Cst = \ln\left(C\mathscr{E}\right)$$

On a donc

$$\frac{t}{CR} = -\ln\left(C\mathscr{E} - Q\right) + \ln\left(C\mathscr{E}\right)$$

On peut finalement isoler Q.

$$\frac{-t}{RC} = \ln\left(C\mathscr{E} - Q\right) - \ln\left(C\mathscr{E}\right)$$
$$\frac{-t}{RC} = \ln\left(\frac{C\mathscr{E} - Q}{C\mathscr{E}}\right)$$
$$e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{C\mathscr{E} - Q}{C\mathscr{E}}$$
$$C\mathscr{E}e^{-\frac{t}{RC}} = C\mathscr{E} - Q$$
$$Q = C\mathscr{E} - C\mathscr{E}e^{-\frac{t}{RC}}$$
$$Q = C\mathscr{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$