Preuve de la formule de la puissance totale d'une charge qui accélère

On va imaginer qu'il y a une sphère qui entoure la charge. On va séparer la surface de cette sphère en petite surface d'aire dA. La puissance captée sur cette petite surface est

$$dP = IdA$$

En fait, la petite surface sera une petite bande circulaire

La largeur de cette bande est

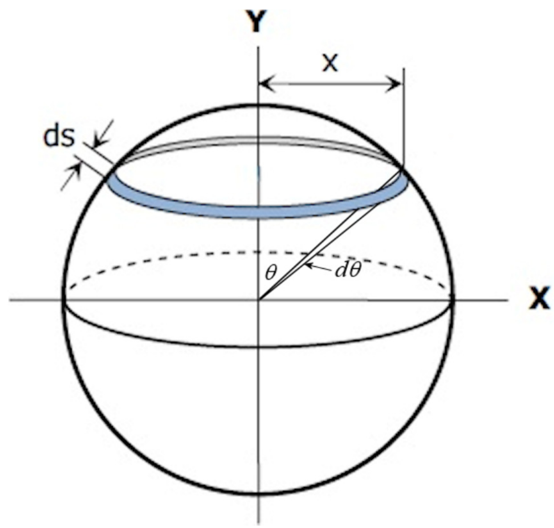
$$ds = Rd\theta$$

et sa longueur est

$$\begin{aligned} L &= 2\pi x \\ &= 2\pi R \sin\theta \end{aligned}$$

L'aire est donc

$$\begin{aligned} dA &= Lds \\ &= 2\pi R \sin\theta \cdot Rd\theta \\ &= 2\pi R^2 \sin\theta d\theta \end{aligned}$$



On a donc

$$\begin{aligned} dP &= IdA \\ &= \frac{a^2 q^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 R^2} 2\pi R^2 \sin\theta d\theta \\ &= \frac{a^2 q^2 \sin^2\theta}{8\pi\varepsilon_0 c^3} \sin\theta d\theta \\ &= \frac{a^2 q^2 \sin^3\theta}{8\pi\varepsilon_0 c^3} d\theta \end{aligned}$$

En sommant la puissance sur toutes les bandes (la première est à $\theta = 0°$ et la dernière est à $\theta = 180°$), on arrive à

$$
\begin{aligned}
P &= \int_0^{\pi} \frac{a^2 q^2 \sin^3\theta}{8\pi\varepsilon_0 c^3}\, d\theta \\
&= \frac{a^2 q^2}{8\pi\varepsilon_0 c^3} \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \\
&= \frac{a^2 q^2}{8\pi\varepsilon_0 c^3} \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{a^2 q^2}{8\pi\varepsilon_0 c^3} \left(\left[1 - \frac{1}{3} \right] - \left[-1 + \frac{1}{3} \right] \right) \\
&= \frac{a^2 q^2}{8\pi\varepsilon_0 c^3} \left(\frac{4}{3} \right) \\
&= \frac{a^2 q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}
\end{aligned}
$$