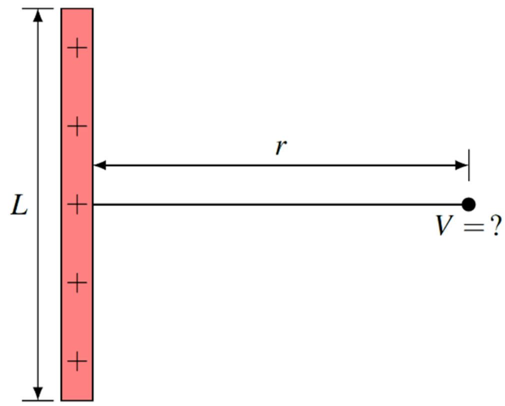
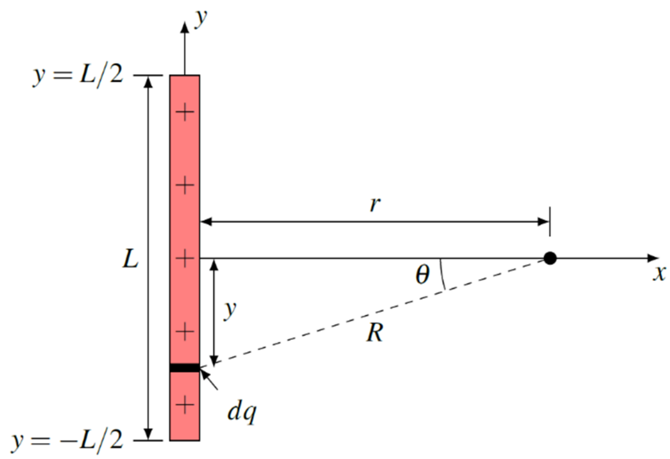
Potentiel vis-à-vis le milieu d'une tige

On va maintenant déterminer le potentiel à l'endroit indiqué sur la figure.



Pour y arriver, on va placer des axes des x et des y avec l'origine au milieu de la tige. On prend un petit morceau de tige, à la position y de longueur dy et dont la charge est dq. Ce petit morceau fait un potentiel de

$$dV = \frac{kdq}{R}$$



La charge dq dépend de la longueur du petit morceau dy. On trouve cette charge en multipliant la charge linéique par la longueur du petit morceau.

$$dq = \lambda dy$$

Le potentiel dV est donc

$$dV = \frac{k\lambda dy}{R}$$

Puisque R est l'hypoténuse d'un triangle, on a

$$dV = \frac{k\lambda dy}{\sqrt{y^2 + r^2}}$$

On trouve le potentiel en sommant tous les potentiels faits par chacun des petits morceaux. Cela veut dire qu'on fait l'intégrale et que nos bornes d'intégration sont les deux extrémités de la tige.

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-L/2}^{L/2} \frac{k\lambda dy}{\sqrt{y^2+r^2}} \\
&= k\lambda \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dy}{\sqrt{y^2+r^2}} \\
&= k\lambda \left[\ln\left(\sqrt{y^2+r^2} + y \right) \right]_{-L/2}^{L/2} \\
&= k\lambda \left[\ln\left(\sqrt{\left(\tfrac{L}{2}\right)^2 + r^2} + \tfrac{L}{2} \right) - \ln\left(\sqrt{\left(\tfrac{L}{2}\right)^2 + r^2} - \tfrac{L}{2} \right) \right] \\
&= k\lambda \ln\left(\frac{\sqrt{\left(\tfrac{L}{2}\right)^2 + r^2} + \tfrac{L}{2}}{\sqrt{\left(\tfrac{L}{2}\right)^2 + r^2} - \tfrac{L}{2}} \right)
\end{aligned}$$

En simplifiant un peu le tout, on obtient

Potentiel vis-à-vis le milieu d'une tige uniformément chargée

$$V = k\lambda \ln\left(\frac{\sqrt{L^2+4r^2}+L}{\sqrt{L^2+4r^2}-L} \right)$$