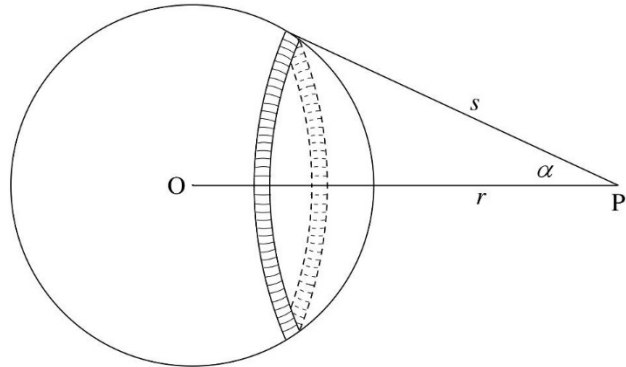


Preuve de la formule donnant le potentiel à l'extérieur d'une sphère

On va trouver le potentiel au point P (à l'extérieur de la sphère). On va commencer par trouver le potentiel fait par une coquille sphérique chargée.

Pour la calculer le potentiel fait par la coquille, on sépare la coquille sphérique en petits morceaux infinitésimaux. On additionne ensuite les potentiels faits par tous ces morceaux pour trouver le potentiel total. Cette somme est en fait une intégrale.

On va séparer la coquille sphérique en anneaux, puis on sépare chaque anneau en petites tranches, comme illustré sur la figure.



www.physics.brocku.ca/PPLATO/h-flap/phys3_2.html

Ainsi, le potentiel d'un petit morceau de l'anneau de charge dq au point P est

$$dV = k \frac{dq}{s}$$

En sommant les potentiels pour toutes les charges de l'anneau, les dq s'additionnent pour donner la charge de l'anneau, qu'on va noter dq' . Le potentiel fait par un anneau au complet est donc

$$dV = k \frac{dq'}{s}$$

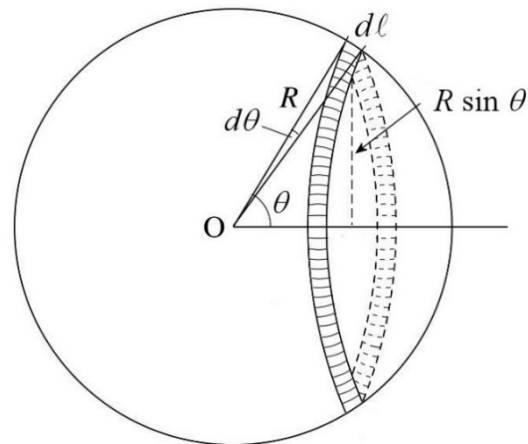
Trouvons maintenant la charge de l'anneau.

La largeur angulaire de l'anneau est $d\theta$. Cet angle en radians correspond à la largeur de l'anneau divisé par le rayon de la sphère.

$$d\theta = \frac{d\ell}{R}$$

La surface de l'anneau sur la coquille est donc

$$\begin{aligned} dA &= 2\pi r d\ell \\ &= 2\pi (R \sin \theta) R d\theta \\ &= 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \end{aligned}$$



et la charge de l'anneau est

$$\begin{aligned} dq' &= \sigma dA \\ &= \sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

où σ est la charge surfacique de la coquille (en C/m²).

Le potentiel est donc

$$\begin{aligned} dV &= k \frac{dq'}{s} \\ &= k \frac{\sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta}{s} \end{aligned}$$

Reste à sommer les potentiels faits par tous les anneaux.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi k \frac{\sigma 2\pi R^2 \sin \theta d\theta}{s} \\ &= k\sigma 2\pi R^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{s} \end{aligned}$$

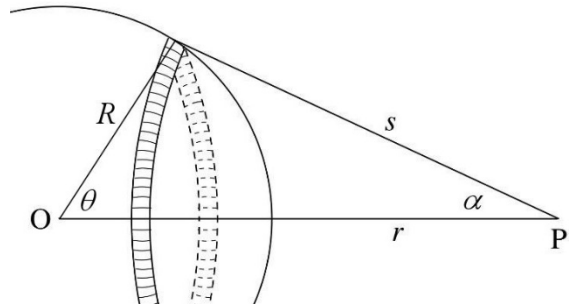
Pour y arriver, il ne doit rester qu'une seule variable d'intégration. Pour l'instant, s et θ changent selon l'anneau choisi. On doit donc trouver le lien entre ces variables.

La loi des cosinus nous donne

$$s^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta$$

Si on fait la différentielle de cette équation (sachant que r et R sont des constantes), on obtient

$$\begin{aligned} 2s ds &= 2rR \sin \theta d\theta \\ \sin \theta d\theta &= \frac{s ds}{rR} \end{aligned}$$



On utilise alors ce résultat pour changer notre variable d'intégration. On obtient alors

$$\begin{aligned} V &= k\sigma 2\pi R^2 \int_{r-R}^{r+R} \frac{s}{srR} ds \\ &= \frac{k\sigma 2\pi R}{r} \int_{r-R}^{r+R} ds \end{aligned}$$

Le potentiel total est donc

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{k\sigma 2\pi R}{r} [s]_{r-R}^{r+R} \\
 &= \frac{k\sigma 2\pi R}{r} ((r+R) - (r-R)) \\
 &= \frac{k\sigma 2\pi R}{r} (2R) \\
 &= \frac{k\sigma 4\pi R^2}{r}
 \end{aligned}$$

Comme la charge surfacique est

$$\sigma = \frac{\text{charge}}{\text{surface}} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

on arrive à

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{k\sigma 4\pi R^2}{r} \\
 &= \frac{kQ}{r}
 \end{aligned}$$

Une sphère est une superposition de coquille. Le potentiel sera simplement la somme des potentiels de toutes les coquilles

$$V = \sum \frac{kQ}{r}$$

Comme les coquilles ont toutes le même centre quand elles se superposent pour former une sphère, les valeurs de r sont les mêmes pour toutes les coquilles. On peut donc mettre r en évidence pour obtenir

$$V = \frac{k}{r} \sum Q$$

La somme des charges des coquilles étant égal à la charge de la sphère, on arrive à

$$V = \frac{kQ_{\text{sphère}}}{r}$$

On a donc

Potentiel à une distance r du centre d'une sphère ayant une charge Q (ou à une distance r d'une charge ponctuelle Q)

$$V = \frac{kQ}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

