Preuve de la solution de l'équation différentielle pour le circuit LC avec une source

Solution 1

(Solution qui ne demande aucune connaissance en résolution en équation différentielle.)

L'équation est

$$\mathscr{E} - \frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0$$

Voici maintenant le tour de passe-passe.

$$\mathscr{E} - \frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dQ}\frac{dQ}{dt} = 0$$

$$\mathscr{E} - \frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dQ}I = 0$$

On a alors

$$L\frac{dI}{dQ}I = \mathscr{E} - \frac{Q}{C}$$

$$LC\frac{dI}{dQ}I = C\mathscr{E} - Q$$

$$LCIdI = \left(C\mathscr{E} - Q\right)dQ$$

$$\int LCIdI = \int \left(C\mathscr{E} - Q\right)dQ$$

$$LC\frac{I^2}{2} = C\mathscr{E}Q - \frac{Q^2}{2} + K$$

où K est une constante. On trouve cette constance en sachant qu'à $t = 0$, la charge du condensateur et le courant sont nuls. On a donc

$$LC\frac{I^2}{2} = C\mathscr{E}Q - \frac{Q^2}{2} + K$$

$$LC\frac{0^2}{2} = C\mathscr{E} \cdot 0 - \frac{0^2}{2} + K$$

$$K = 0$$

On a donc

$$LC\frac{I^2}{2} = C\mathscr{E}Q - \frac{Q^2}{2}$$

Puisque $I = dQ/dt$, on a alors

$$\frac{LC}{2}\left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 = C\mathscr{E}Q - \frac{Q^2}{2}$$

Avec ce résultat, on arrive à

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 = \frac{1}{LC}\left(2C\mathscr{E}Q - Q^2\right)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \sqrt{\frac{1}{LC}\left(2C\mathscr{E}Q - Q^2\right)}$$

$$\frac{dQ}{\sqrt{\left(2C\mathscr{E}Q - Q^2\right)}} = \frac{dt}{\sqrt{LC}}$$

En intégrant de chaque côté, on arrive à

$$\int\frac{dQ}{\sqrt{\left(2C\mathscr{E}Q - Q^2\right)}} = \int\frac{dt}{\sqrt{LC}}$$

$$2\arctan\left(\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{2C\mathscr{E} - Q}}\right) = \frac{t}{\sqrt{LC}} + K$$

où K est une constante. Puisque la charge est 0 à $t = 0$ s, on a

$$2\arctan\left(\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{2C\mathscr{E} - 0}}\right) = 0 + K$$

$$0 = 0 + K$$

$$K = 0$$

La solution est donc

$$2\arctan\left(\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{2C\mathscr{E}-Q}}\right)=\frac{t}{\sqrt{LC}}$$

$$\arctan\left(\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{2C\mathscr{E}-Q}}\right)=\frac{t}{2\sqrt{LC}}$$

$$\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{2C\mathscr{E}-Q}}=\tan\left(\frac{t}{2\sqrt{LC}}\right)$$

$$\frac{Q}{2C\mathscr{E}-Q}=\tan^2\left(\frac{t}{2\sqrt{LC}}\right)$$

Il y a une identité trigonométrique peu connue qui stipule que

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$$

On a donc

$$\frac{Q}{2C\mathscr{E}-Q}=\frac{1-\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)}{1+\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)}$$

Ce qui donne

$$Q\left(1+\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)\right)=\left(1-\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)\right)(2C\mathscr{E}-Q)$$

$$Q+Q\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)=2C\mathscr{E}-Q-2C\mathscr{E}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)+Q\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

$$Q=2C\mathscr{E}-Q-2C\mathscr{E}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

$$2Q=2C\mathscr{E}\left(1-\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)\right)$$

$$Q=C\mathscr{E}\left(1-\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)\right)$$

qui est la solution.

Solution 2

(Solution qui demande une connaissance des méthodes de résolution des équations différentielles.)

Puisque

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

l'équation

$$\mathscr{E} - \frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0$$

peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = \frac{\mathscr{E}}{L}$$

Il s'agit d'une équation linéaire d'ordre 2 non homogène à coefficient constant. On commence par trouver la solution de l'équation homogène

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = 0$$

L'équation caractéristique de cette équation est

$$\lambda^2 + \frac{1}{LC} = 0$$
$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{LC}}i$$

La solution est donc

$$Q = A\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + B\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

Revenons maintenant à l'équation non homogène

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = \frac{\mathscr{E}}{L}$$

Puisque le terme de droite est une constante, la solution particulière doit être aussi une constante. La solution doit donc être

$$Q_p = K$$

En utilisant cette solution dans l'équation,

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = \frac{\mathscr{E}}{L}$$

on arrive

$$0 + \frac{K}{LC} = \frac{\mathscr{E}}{L}$$
$$K = C\mathscr{E}$$

On a donc

$$Q = A\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + B\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + C\mathscr{E}$$

Puisque la charge est nulle à $t = 0$, on doit avoir

$$0 = A\cos\left(\frac{0}{\sqrt{LC}}\right) + B\sin\left(\frac{0}{\sqrt{LC}}\right) + C\mathscr{E}$$
$$0 = A + C\mathscr{E}$$
$$A = -C\mathscr{E}$$

La solution est donc

$$Q = -C\mathscr{E}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + B\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + C\mathscr{E}$$

Puisque le courant

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{C\mathscr{E}}{\sqrt{LC}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + \frac{B}{\sqrt{LC}}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

est aussi nulle à $t = 0$, on a

$$0 = \frac{C\mathscr{E}}{\sqrt{LC}}\sin\left(\frac{0}{\sqrt{LC}}\right) + \frac{B}{\sqrt{LC}}\cos\left(\frac{0}{\sqrt{LC}}\right)$$

$$0 = 0 + \frac{B}{\sqrt{LC}}\cos\left(\frac{0}{\sqrt{LC}}\right)$$

$$B = 0$$

La solution est donc

$$Q = -C\mathscr{E}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + C\mathscr{E}$$

$$Q = C\mathscr{E}\left(1 - \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)\right)$$