Preuve de la solution de l'équation différentielle pour le circuit LC sans source

Solution 1
(Solution qui ne demande aucune connaissance en résolution en équation différentielle.)

L'équation est

$$-\frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0$$

Voici maintenant le tour de passe-passe.

$$-\frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dQ}\frac{dQ}{dt} = 0$$
$$-\frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dQ}I = 0$$

On a alors

$$\frac{Q}{C} = -L\frac{dI}{dQ}I$$
$$\frac{Q}{C}dQ = -LIdI$$
$$\int\frac{Q}{C}dQ = -\int LIdI$$
$$\frac{Q^2}{2C} = -\frac{LI^2}{2} + K$$

où K est une constante. On trouve cette constance en sachant qu'à $t = 0$, le courant est 0 et la charge du condensateur est Q_0. On a donc

$$\frac{Q_0^2}{2C} = -\frac{L\cdot 0^2}{2} + K$$
$$\frac{Q_0^2}{2C} = +K$$

On a donc

$$\frac{Q^2}{2C} = -\frac{LI^2}{2} + \frac{Q_0^2}{2C}$$

Ce résultat n'est pas bien surprenant puisque c'est en fait l'équation de la conservation de l'énergie dans le circuit LC.

Puisque $I = dQ/dt$, on a alors

$$\frac{Q^2}{2C} = -\frac{L}{2}\left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 + \frac{Q_0^2}{2C}$$

Avec ce résultat, on arrive à

$$Q^2 = -LC\left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 + Q_0^2$$

$$\frac{Q_0^2 - Q^2}{LC} = \left(\frac{dQ}{dt}\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{Q_0^2 - Q^2}{LC}} = \frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{1}{\sqrt{LC}}dt = \frac{dQ}{\sqrt{Q_0^2 - Q^2}}$$

En intégrant de chaque côté, on arrive à

$$\int \frac{1}{\sqrt{LC}}dt = \int \frac{dQ}{\sqrt{Q_0^2 - Q^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{LC}}t = \arcsin\left(\frac{Q}{Q_0}\right) + K$$

où K est une constante. Puisque la charge est de Q_0 à $t = 0$ s, on a

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot 0 = \arcsin\left(\frac{Q_0}{Q_0}\right) + K$$

$$0 = \arcsin(1) + K$$

$$0 = \frac{\pi}{2} + K$$

$$K = -\frac{\pi}{2}$$

La solution est donc

$$\frac{1}{\sqrt{LC}}t = \arcsin\left(\frac{Q}{Q_0}\right) - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \frac{\pi}{2} = \arcsin\left(\frac{Q}{Q_0}\right)$$

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{Q}{Q_0}$$

$$Q = Q_0 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Mais puisque sin (x + π/2) = cos (x), on a

$$Q = Q_0 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$$

<u>*Solution 2*</u>
(Solution qui demande une connaissance des méthodes de résolution des équations différentielles.)

Puisque

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

l'équation

$$-\frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0$$

peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = 0$$

Il s'agit d'une équation linéaire d'ordre 2 homogène à coefficient constant. L'équation caractéristique de cette équation est

$$\lambda^2 + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{LC}} i$$

La solution est donc

$$Q = A\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + B\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

Puisque la charge est nulle à t = 0, on doit avoir

$$Q_0 = A\cos\left(\frac{0}{\sqrt{LC}}\right) + B\sin\left(\frac{0}{\sqrt{LC}}\right)$$

$$Q_0 = A$$

La solution est donc

$$Q = Q_0\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + B\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

Puisque le courant

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{-Q_0}{\sqrt{LC}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + \frac{B}{\sqrt{LC}}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

est nulle à t = 0, on a

$$0 = \frac{-Q_0}{\sqrt{LC}}\sin\left(\frac{0}{\sqrt{LC}}\right) + \frac{B}{\sqrt{LC}}\cos\left(\frac{0}{\sqrt{LC}}\right)$$

$$0 = 0 + \frac{B}{\sqrt{LC}}\cos\left(\frac{0}{\sqrt{LC}}\right)$$

$$B = 0$$

La solution est donc

$$Q = Q_0\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$