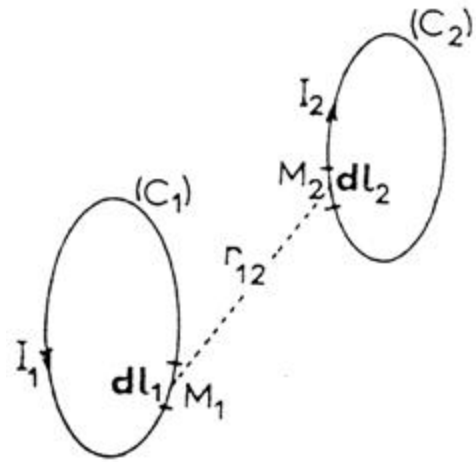


Preuve que l'inductance mutuelle reste la même si on inverse le rôle des bobines

La preuve est vraiment d'un niveau universitaire et fait appel à beaucoup de notions que nous n'avons pas vues, mais la voici quand même si ça vous intéresse.

La figure représente deux circuits C_1 et C_2 parcourus par des courants I_1 et I_2 . On va séparer le circuit 1 en petit bout de fil de longueur ds_1 et le circuit 2 en petits bouts de longueurs ds_2 .



Inductance mutuelle en considérant le flux fait dans le circuit 2 par le circuit 1

Le courant I_1 fait un champ magnétique qui traverse le circuit 2. Le flux qui traverse le circuit 2 est

$$\phi_2 = \int_{\text{surface 2}} \vec{B}_1 \cdot \vec{da}$$

(On a pris a pour l'aire parce que A sera utilisé pour autre chose.)

On ne l'a pas vu dans ce cours, mais il existe un vecteur appelé le *vecteur potentiel* qui est lié au champ magnétique. Ce vecteur est noté $\vec{A}$ et le lien entre ce vecteur et le champ magnétique est

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Ceux qui font le cours de calcul avancé reconnaîtront peut-être ce triangle inversé. En fait, cet opérateur représente

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

Ce qui fait que le lien entre le champ magnétique et le vecteur potentiel est

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \times (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \\
&= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}
\end{aligned}$$

Le flux à travers le circuit 2 est donc

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= \int_{\text{surface 2}} \vec{B}_1 \cdot \vec{da} \\
&= \int_{\text{surface 2}} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_1) \cdot \vec{da}
\end{aligned}$$

Or, il existe un théorème qui permet de transformer les intégrales de surface en intégrales de ligne. Il s'agit du théorème de Stokes, qui dit que pour n'importe quel champ vectoriel.

$$\oint_{\substack{\text{trajectoire} \\ \text{fermée}}} \vec{V} \cdot \vec{ds} = \int_{\substack{\text{Surface délimitée} \\ \text{par la trajectoire}}} \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot \vec{da}$$

Notre flux est donc

$$\phi_2 = \oint_{\text{circuit 2}} \vec{A}_1 \cdot \vec{ds}_2$$

où circuit 2 signifie la trajectoire faite par le circuit 2.

Il existe une formule qui permet de trouver le vecteur potentiel fait par un petit bout de courant de longueur ds . Cette formule est

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{ds}}{r}$$

Si on somme tous les vecteurs potentiel fait par tous les petits bouts de fils du circuit 1, on arrive à

$$\vec{A}_1 = \oint_{\text{circuit 1}} \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{\vec{ds}_1}{r}$$

On a donc

$$\phi_2 = \oint_{\text{circuit 2}} \oint_{\text{circuit 1}} \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{\vec{ds}_1}{r} \cdot \vec{ds}_2$$

L'inductance mutuelle du circuit 2 par rapport au circuit 1 est donc

$$\begin{aligned}
 M_{21} &= \frac{\phi_2}{I_1} \\
 &= \frac{\oint_{\text{circuit 2}} \oint_{\text{circuit 1}} \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{\overrightarrow{ds_1}}{r} \cdot \overrightarrow{ds_2}}{I_2} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{circuit 2}} \oint_{\text{circuit 1}} \frac{\overrightarrow{ds_1} \cdot \overrightarrow{ds_2}}{r}
 \end{aligned}$$

(Il n'y a pas de N_2 dans la formule de l'impédance puisque l'intégrale sur tout le fil du circuit nous fera faire plusieurs tours s'il y a plusieurs tours de fil.)

Inductance mutuelle en considérant le flux fait dans le circuit 1 par le circuit 2

Maintenant, on va calculer l'inductance mutuelle en calculant le flux fait dans le circuit 1 qui est par le circuit 2. Ce flux est

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \oint_{\text{surface 1}} \vec{B}_2 \cdot \overrightarrow{da} \\
 &= \oint_{\text{surface 1}} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_2) \cdot \overrightarrow{da}
 \end{aligned}$$

Le théorème de Stokes donne alors

$$\phi_1 = \oint_{\text{circuit 1}} \vec{A}_2 \cdot \overrightarrow{ds_1}$$

Comme le vecteur potentiel fait par tous les petits bouts de fils du circuit 2 est

$$\vec{A}_2 = \oint_{\text{circuit 2}} \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \frac{\overrightarrow{ds_2}}{r}$$

on arrive à

$$\phi_1 = \oint_{\text{circuit 1}} \oint_{\text{circuit 2}} \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \frac{\overrightarrow{ds_2}}{r} \cdot \overrightarrow{ds_1}$$

L'inductance mutuelle du circuit 1 par rapport au circuit 2 est donc

$$\begin{aligned}
 M_{12} &= \frac{\phi_1}{I_2} \\
 &= \frac{\oint_{\text{circuit1}} \oint_{\text{circuit2}} \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \frac{\overrightarrow{ds_2} \cdot \overrightarrow{ds_1}}{r}}{I_2} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{circuit1}} \oint_{\text{circuit2}} \frac{\overrightarrow{ds_2} \cdot \overrightarrow{ds_1}}{r}
 \end{aligned}$$

Les deux inductances

Quand on a calculé l'inductance en calculant le flux dans le circuit 1, on a obtenu

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{circuit2}} \oint_{\text{circuit1}} \frac{\overrightarrow{ds_1} \cdot \overrightarrow{ds_2}}{r}$$

Quand on a calculé l'inductance en calculant le flux dans le circuit 2, on a obtenu

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{circuit1}} \oint_{\text{circuit2}} \frac{\overrightarrow{ds_2} \cdot \overrightarrow{ds_1}}{r}$$

Changer l'ordre des intégrations ne change rien (c'est comme changer l'ordre d'additions) et changer l'ordre d'un produit scalaire ne change rien. Ces deux résultats sont identiques, ce qui prouve que les inductances mutuelles sont les mêmes.