

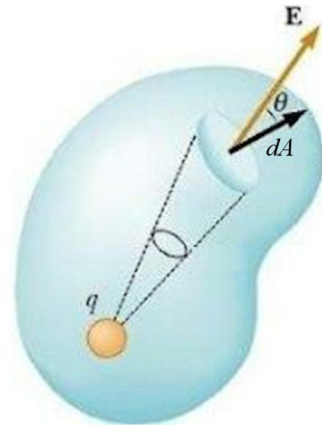
Preuve du théorème de Gauss

a) Cas d'une charge à l'intérieur d'une surface

On va prendre une surface qui a n'importe quelle forme. Cette surface entoure une charge q .

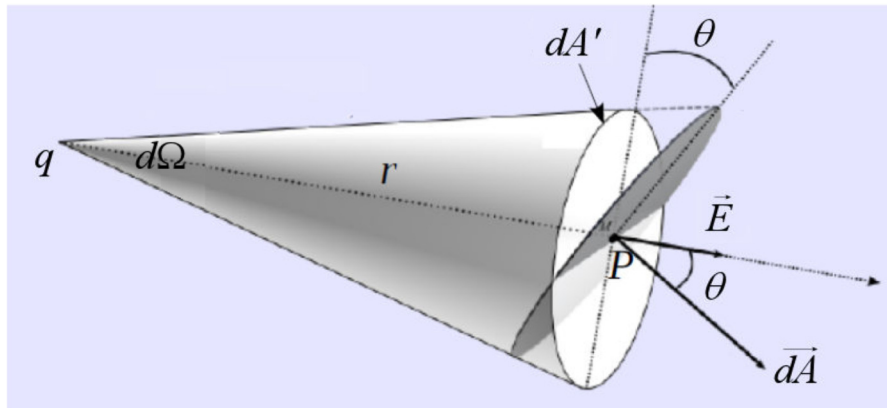
Calculons le flux fait à travers une petite partie de cette surface dont l'aire est dA . Le flux est

$$d\phi_{\text{int}} = E \cos \theta dA$$



www.quora.com/What-is-Gauss-law-in-terms-of-electrostatics

Passons premièrement à la surface dA' sur la figure.



trambly.u-cergy.fr/L2Electromag/th_Gauss.pdf

On a montré dans les notes de cours que l'aire de la surface qui n'est pas perpendiculaire au champ par rapport à celle perpendiculaire au champ est

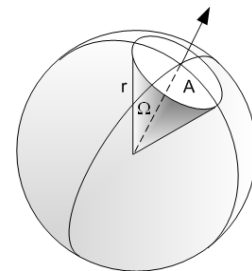
$$dA' = dA \cos \theta$$

Ainsi, le flux est

$$d\phi = E dA'$$

Pour trouver l'aire, on va utiliser un concept peu connu des étudiants collégiaux. Ce concept est l'angle solide, un genre d'angle en 3-D. L'angle solide, qui est en stéradian, fait par une partie de sphère est définie par

$$\Omega = \frac{\text{Aire de la partie de sphère}}{(\text{rayon de la sphère})^2}$$



commons.wikimedia.org/wiki/File:Solid_Angle.png

Cela veut dire que l'angle solide fait par la surface dA'' est

$$d\Omega = \frac{dA'}{r^2}$$

Cela signifie que l'aire est

$$dA' = r^2 d\Omega$$

Le flux est donc

$$d\phi_{\text{int}} = Er^2 d\Omega$$

Comme le champ de la charge est

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Le flux devient

$$d\phi_{\text{int}} = \frac{q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 d\Omega$$

$$d\phi_{\text{int}} = \frac{q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

Si on additionne maintenant tous les flux passant à travers les petites surfaces qui composent la surface totale entourant la charge, on arrive à

$$\phi_{\text{int}} = \int \frac{q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$\phi_{\text{int}} = \frac{q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega$$

$$\phi_{\text{int}} = \frac{q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0} \Omega_{\text{tot}}$$

Cet angle solide total est la somme de tous les angles solides pour couvrir toutes les directions. Si on couvre toutes les directions alors l'angle solide est

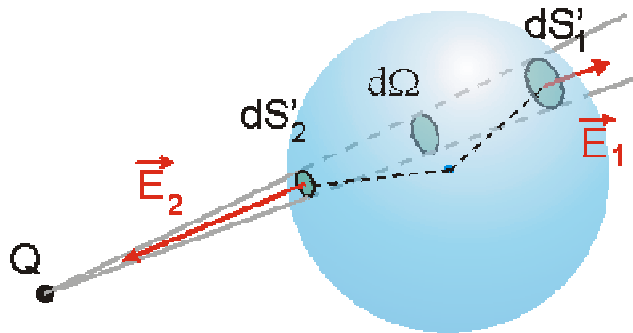
$$\begin{aligned}\Omega_{tot} &= \frac{\text{Aire totale de la sphère}}{(\text{Rayon de la sphère})^2} \\ &= \frac{4\pi r^2}{r^2} \\ &= 4\pi\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\phi_{\text{int}} &= \frac{q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0} 4\pi \\ \phi_{\text{int}} &= \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

b) Cas d'une charge à l'extérieur d'une surface.

Dans ce cas, on a la situation suivante.



uel.unisciel.fr/physique/elecstat/elecstat_ch04/co/apprendre_ch04_01_01.html

On utilise une surface sphérique, mais la surface peut avoir n'importe quelle forme, pourvu que la charge soit à l'extérieur de la surface.

Pour la surface du côté opposé de la sphère (surface dS_1), le flux est

$$d\phi_1 = E_1 \cos \theta_1 dS_1$$

Encore une fois, on peut travailler avec une surface perpendiculaire au champ. Le flux qui traverse cette surface perpendiculaire est

$$d\phi_1 = E_1 dS'_1$$

puisque

$$dS' = dS \cos \theta$$

Vue de la charge, cette surface fait un angle solide $d\Omega$ et l'aire de la surface est donc

$$dS' = r^2 d\Omega$$

Le flux est donc

$$d\phi_1 = E_1 r^2 d\Omega$$

Avec la valeur du champ, on obtient

$$\begin{aligned} d\phi_1 &= E_1 r_1^2 d\Omega \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} r_1^2 d\Omega \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \end{aligned}$$

Examinons maintenant la surface dS_2 . Le flux à travers cette surface est

$$d\phi_2 = E_2 \cos \theta_2 dS_2$$

Encore une fois, on peut travailler avec une surface perpendiculaire au champ. Le flux qui traverse cette surface perpendiculaire est

$$d\phi_2 = -E_2 dS_2'$$

puisque

$$dS' = dS \cos \theta$$

Cette valeur est négative puisque le vecteur surface, qui est vers l'extérieur de la surface de Gauss, est dirigé vers la charge.

Vue de la charge, cette surface fait un angle solide $d\Omega$ et l'aire de la surface est donc

$$dS' = r^2 d\Omega$$

Le flux est donc

$$d\phi_2 = -E_2 r^2 d\Omega$$

Avec la valeur du champ, on obtient

$$\begin{aligned}d\phi_2 &= -E_2 r_2^2 d\Omega \\&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} r_2^2 d\Omega \\&= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega\end{aligned}$$

En additionnant les flux dans cette direction, on arrive à

$$\begin{aligned}d\phi_{ext} &= d\phi_1 + d\phi_2 \\&= \frac{q_{ext}}{4\pi\epsilon_0} d\Omega - \frac{q_{ext}}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \\&= 0\end{aligned}$$

En additionnant les flux dans toutes les directions, on somme donc une suite de zéro, et le flux total est nul. On a donc

$$\phi_{ext} = 0$$

c) Somme sur toutes les charges

Si on fait une surface de Gauss de n'importe quelle forme et qu'il y a plusieurs charges, alors le flux total est la somme du flux fait par chaque charge.

$$\phi_{tot} = \sum \phi$$

Le flux peut être fait par des charges internes ou externes. On a donc

$$\phi_{tot} = \sum \phi_{int} + \sum \phi_{ext}$$

Comme le flux fait par les charges externes est nul, on arrive à

$$\phi_{tot} = \sum \phi_{int}$$

En utilisant le résultat trouvé précédemment, on arrive à

$$\phi_{tot} = \sum \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\phi_{tot} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\phi_{tot} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

où Q_{int} est la somme des charges à l'intérieur de la surface. Ce résultat est le théorème de Gauss.