Formule de la force magnétique à partir de la force électrique et de la relativité

On commence avec un observateur (Bob) qui se déplace avec la charge et donc qui observe la charge au repos.

La force selon Bob est

$$F'_x = qE'_x \qquad F'_y = qE'_y \qquad F'_z = qE'_z$$

Il n'y a pas de force magnétique selon Bob puisque la charge ne se déplace pas.

Pour connaitre la force selon Joe (qui voit la charge et Bob se déplacer à la vitesse v vers les x positifs), on doit connaitre les lois de transformations des champs et des forces.

Pour les champs, les lois de transformation sont

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & E'_y &= \gamma\left(E_y - vB_z\right) & E'_z &= \gamma\left(E_z + vB_y\right) \\ B'_x &= B_x & B'_y &= \gamma\left(B_y + \tfrac{v}{c^2}E_z\right) & B'_z &= \gamma\left(B_z - \tfrac{v}{c^2}E_y\right) \end{aligned}$$

Toutefois, on n'a pas les lois de transformation des forces. On va les faire.

La force correspond au taux de variation de la quantité de mouvement

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} \qquad F_y = \frac{dp_y}{dt} \qquad F_z = \frac{dp_z}{dt}$$

Puisque les lois de transformation de la quantité de mouvement sont

$$\begin{aligned} p_x &= \gamma\left(p'_x + \tfrac{v}{c^2}E'\right) \\ p_y &= p'_y \\ p_z &= p'_z \end{aligned}$$

On a, pour la composante en x,

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{dp_x}{dt} \\ &= \frac{dp_x / dt'}{dt / dt'} \\ &= \frac{\gamma\left(\frac{dp'_x}{dt'} + \frac{v}{c^2}\frac{dE'}{dt'}\right)}{\gamma\left(\frac{dt'}{dt'} - \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{F'_x + \frac{v}{c^2}\frac{dE'}{dt'}}{1 - \frac{v}{c^2}u'_x}$$

Mais comme $u'_x = 0$ (la charge est au repos selon Bob), on a

$$F_x = F'_x + \frac{v}{c^2}\frac{dE'}{dt'}$$

De plus, *dE*/*dt* est la puissance instantanée de la force agissant sur la charge. Comme la puissance instantanée est $\vec{F} \cdot \vec{v}$, on a

$$\frac{dE'}{dt'} = \vec{F}' \cdot \vec{v}'$$

Comme v' est nul, ce terme est nul. Il reste donc

$$F_x = F'_x$$

Pour les composantes *y* et *z*, on a

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{dp_y}{dt} \\ &= \frac{dp_y / dt'}{dt / dt'} \\ &= \frac{\left(\frac{dp'_y}{dt'}\right)}{\gamma\left(\frac{dt'}{dt'} - \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)} \\ &= \frac{F'_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u'_x\right)} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F_z &= \frac{dp_z}{dt} \\ &= \frac{dp_z / dt'}{dt / dt'} \\ &= \frac{\left(\frac{dp'_z}{dt'}\right)}{\gamma\left(\frac{dt'}{dt'} - \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)} \\ &= \frac{F'_z}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u'_x\right)} \end{aligned}$$

Mais comme $u'_x = 0$ (la charge est au repos selon Bob), on a

$$F_y = \frac{1}{\gamma}F'_y \qquad F_z = \frac{1}{\gamma}F'_z$$

On a donc les lois de transformation suivantes

$$F'_x = F_x \qquad F'_y = \gamma F_y \qquad F'_z = \gamma F_z$$

Voyons maintenant ce que deviennent les équations des forces pour Joe.

En *x*, on a

$$F'_x = qE'_x$$
$$F_x = qE_x$$

En y, on a

$$F'_y = qE'_y$$
$$\gamma F_y = q\gamma\left(E_y - vB_z\right)$$
$$F_y = qE_y - qvB_z$$

En y, on a

$$F'_z = qE'_z$$
$$\gamma F_z = q\gamma\left(E_z + vB_y\right)$$
$$F_z = qE_z + qvB_y$$

Les composantes de la force sont donc

$$F_x = qE_x \qquad\qquad F_y = qE_y - qvB_z \qquad\qquad F_z = qE_z + qvB_y$$

On semble retrouver un qvB. Voyons si c'est la même chose que $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$.

La partie avec le champ électrique est correcte puisque $q\vec{E}$ signifie que les composantes sont

$$qE_x \qquad\qquad qE_y \qquad\qquad qE_z$$

Ce sont bien les premiers termes de nos composantes de forces.

La partie avec le champ magnétique devrait être $q\vec{v}\times\vec{B}$. Puisque la particule se déplace uniquement dans la direction des x positifs selon Joe, les composantes sont

$$\begin{aligned} q\vec{v}\times\vec{B} &= q\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} \\ &= q\left(-vB_z\vec{j} + vB_y\vec{k}\right) \end{aligned}$$

La composante en x est nulle. C'est effectivement ce qu'on avait pour la force en x.

La composante en y est $-qvB_z$. C'est effectivement ce qu'on avait pour la force en y.

La composante en z est qvB_y. C'est effectivement ce qu'on avait pour la force en z.

Donc, en transformant la force électrique d'un observateur à un autre, on découvre qu'il doit y avoir une force magnétique et que cette force est donnée par $q\vec{v}\times\vec{B}$.

Annexe