

Preuve de la loi de Faraday

On va commencer par faire une preuve quand un circuit se déplace dans un champ magnétique constant.

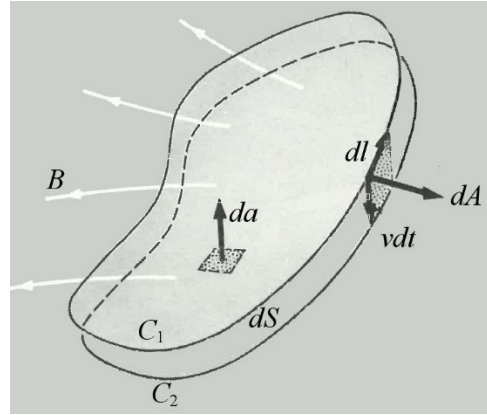
Quand un petit bout de fil de longueur $d\ell$ se déplace dans le champ, il y a une force magnétique qui agit sur les charges. On a montré précédemment que la différence de potentiel qui apparaît aux bornes du conducteur est donnée par

$$d\mathcal{E} = \vec{v} \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

(C'est $d\mathcal{E}$ puisque le morceau a une longueur infinitésimale.) Comme $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = -\vec{a} \times \vec{c} \cdot \vec{b}$, on peut écrire

$$d\mathcal{E} = -\vec{v} \times \overrightarrow{d\ell} \cdot \vec{B}$$

Considérons maintenant le circuit au complet. Le circuit passe de la position C_1 à la position C_2 durant le temps dt . (Dans cette figure, le déplacement de chaque petit bout de fil semble être dans la même direction, mais la direction pourrait être différente à différents endroits du circuit. Par exemple, le côté gauche du circuit pourrait monter pendant que le côté droit descend.)



Berkeley physics course, electricity and magnetism – volume 2

On peut alors écrire

$$d\mathcal{E} = -\frac{\vec{v}dt \times \overrightarrow{d\ell} \cdot \vec{B}}{dt}$$

Or, le produit vectoriel $\vec{v}dt \times \overrightarrow{d\ell}$ donne l'aire de la surface dA sur la figure. On a donc

$$d\mathcal{E} = -\frac{\overrightarrow{dA} \cdot \vec{B}}{dt}$$

Maintenant, le produit scalaire $\overrightarrow{dA} \cdot \vec{B}$ est le flux magnétique qui traverse la surface dA . On a donc

$$d\mathcal{E} = -\frac{\phi_{B(\text{à travers } dA)}}{dt}$$

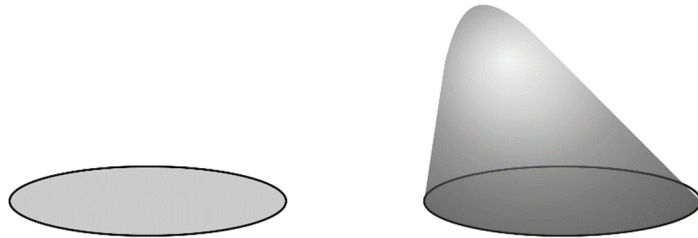
Si on somme les différences de potentiel pour tous les petits bouts de fils, on va sommer les flux qui traversent toutes les surfaces dA pour obtenir le flux à travers la surface dS (qui est la surface balayée par le circuit pendant son déplacement). On arrive donc à

$$\mathcal{E} = - \frac{\phi_{B(\text{à travers } dS)}}{dt}$$

Toutefois, le flux qui traverse le circuit en position 2 est

$$\phi_{B(\text{à travers } C2)} = \phi_{B(\text{à travers } C1)} + \phi_{B(\text{à travers } dS)}$$

puisque la surface délimitée par le circuit peut prendre n'importe quelle forme quand on calcule le flux fait par le champ magnétique. Par exemple, les deux formes montrées à droite peuvent être utilisées pour calculer le flux.



Comme les lignes de champ ne peuvent pas apparaître ou disparaître dans le vide, une ligne de champ qui traverse la surface de gauche n'aura pas le choix de traverser aussi la surface de droite. Comme il y a le même nombre de lignes de champ qui traverse les 2 surfaces, le flux doit être le même à travers les deux surfaces.

On a donc

$$\phi_{B(\text{à travers } dS)} = \phi_{B(\text{à travers } C2)} - \phi_{B(\text{à travers } C1)}$$

Ainsi, le flux à travers la surface dS correspond à la variation de flux qui traverse la surface délimitée par le circuit. On va appeler cette variation $d\phi_B$. On a donc

$$\phi_{B(\text{à travers } dS)} = d\phi_B$$

On arrive donc à

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

(Petite note : le flux dans cette équation est toujours le flux dans la région délimitée par le circuit. Il en est ainsi parce que le v qu'on retrouve dans la preuve de cette formule était la vitesse du fil formant le circuit. C'est donc le déplacement du fil qui fait changer le flux.)

Il faudrait toutefois une preuve plus complète puisqu'on ne tient pas compte des variations de champ magnétique en fonction du temps. Malheureusement, je n'arrive pas à baisser le niveau de cette preuve pour la rendre compréhensible pour un étudiant de cégep. Je la fais quand même pour les professeurs ou pour les anciens étudiants qui, après quelques années d'universités, pourraient comprendre cette preuve.

On obtient la différence de potentiel totale en sommant les travaux faits par les champ magnétique et électrique sur les charges sur un circuit fermé. La différence de potentiel est donc

$$\mathcal{E} = \oint \left(\vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} + \vec{v}_c \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} \right)$$

Dans cette formule v_c est la vitesse des charges (on utilise cette notation pour distinguer cette vitesse des autres vitesses qui seront utilisées plus tard).

On commence par utiliser le théorème de Stokes qui transforme une intégrale le long d'une trajectoire fermée en une intégrale sur la surface délimitée par cette trajectoire.

$$\oint \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot \overrightarrow{dA}$$

(Dernière équation de cette page :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Stokes)

En utilisant ce théorème pour le 1^{er} terme, la différence de potentiel devient

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} + \oint \vec{v}_c \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} \\ &= \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} + \oint \vec{v}_c \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} \end{aligned}$$

On utilise ensuite l'équation de Maxwell

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

pour obtenir

$$\mathcal{E} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dA} + \oint \vec{v}_c \times \vec{B} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

On utilise ensuite la règle de Leibniz en trois dimensions pour des dérivées en fonction du temps d'intégrales dont les bornes peuvent aussi varier en fonction du temps (ce qu'on a ici puisque la trajectoire pourrait changer de position en fonction du temps).

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{dA} = \int_S \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \cdot \vec{v} \right) \cdot \overrightarrow{dA} - \oint \vec{v} \times \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

(Une formule que vous pouvez voir dans ce site :

https://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz_integral_rule)

Dans cette formule, v est la vitesse des petits morceaux de trajectoire.

Dans notre cas, le F qu'il y a dans le théorème de Leibniz est le champ magnétique B . Pour le champ magnétique, on a $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ selon une équation de Maxwell, ce qui élimine le 2^e terme. Le théorème de Leibniz nous donne alors

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{dA} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dA} - \oint \vec{v}_l \times \vec{B} \cdot \vec{d\ell}$$

Dans cette équation, on a remplacé v par v_l pour que ce soit bien clair qu'il s'agit de la vitesse des morceaux de trajectoire, donc la vitesse des petits morceaux de fil $d\ell$ qui forment la trajectoire.

Si on isole le 1^{er} terme de droite dans cette dernière équation, on a

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dA} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{dA} + \oint \vec{v}_l \times \vec{B} \cdot \vec{d\ell}$$

Si on utilise maintenant ce résultat dans la formule de la différence de potentiel, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dA} + \oint \vec{v}_c \times \vec{B} \cdot \vec{d\ell} \\ &= - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{dA} - \oint \vec{v}_l \times \vec{B} \cdot \vec{d\ell} + \oint \vec{v}_c \times \vec{B} \cdot \vec{d\ell} \end{aligned}$$

Puisque le flux magnétique est

$$\phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \vec{dA}$$

on a

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi_B}{dt} - \oint \vec{v}_l \times \vec{B} \cdot \vec{d\ell} + \oint \vec{v}_c \times \vec{B} \cdot \vec{d\ell}$$

Quand les charges sont contraintes de se déplacer dans un fil mince, les 2^e et 3^e termes s'annulent. Il se peut que la vitesse des charges v_c soit un peu différente de celle du fil v_l parce que les charges se déplacent dans le fil avec la vitesse de dérive, mais dans ce cas, on a

$$\oint \vec{v}_c \times \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \oint \vec{v}_l \times \vec{B} \cdot \vec{d\ell} + \oint \vec{v}_d \times \vec{B} \cdot \vec{d\ell}$$

Cependant, pour un petit fil, la vitesse de dérive est nécessairement dans le même sens ou dans le sens opposé de fil. Cela signifie que

$$\vec{v}_d \times \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = 0$$

puisque $\vec{v}_d$ est parallèle ou antiparallèle à $\vec{d\ell}$ (un produit mixte est nul quand il y a 2 vecteurs parallèles ou antiparallèles dans le produit).

$$\oint \vec{v}_c \times \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \oint \vec{v}_l \times \vec{B} \cdot \vec{d\ell}$$

Cela fait en sorte que les 2^e et 3^e termes s'annulent dans

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} - \oint \vec{v}_l \times \vec{B} \cdot \vec{d\ell} + \oint \vec{v}_c \times \vec{B} \cdot \vec{d\ell}$$

Ainsi, si la trajectoire est un petit fil, on arrive à

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

Voilà !

Il faut cependant noter un élément important. Les 2^e et 3^e termes de l'équation

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} - \oint \vec{v}_l \times \vec{B} \cdot \vec{d\ell} + \oint \vec{v}_c \times \vec{B} \cdot \vec{d\ell}$$

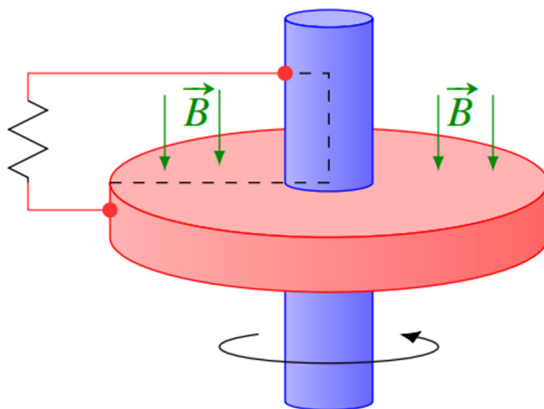
ne s'annulent pas toujours. Si c'est le cas, alors

$$\mathcal{E} \neq -\frac{d\phi_B}{dt}$$

Cela peut se produire, par exemple, quand la trajectoire n'est pas un petit fil mince. Prenons un exemple pour illustrer. Examinons un disque qui tourne dans un champ magnétique (ce qu'on appelle le générateur de Faraday).

Dans cette situation les charges dans le disque tournent avec le disque. Avec la règle de la main droite, on trouve qu'il y a une force magnétique sur les électrons en rotation. Cette

force pousse les électrons vers l'extérieur du disque. Le bord du disque devient donc négatif et le centre du disque devient positif. Si on branche une résistance entre le bord et le centre, il y aura donc un courant dans la résistance (vers le bas).



Il s'agit d'un phénomène d'induction électromagnétique et voyons ce que l'équation nous donne dans ce cas-là si on prend une trajectoire qui suit le fil et la ligne pointillée sur la figure.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} - \oint \vec{v}_l \times \vec{B} \cdot \vec{d\ell} + \oint \vec{v}_c \times \vec{B} \cdot \vec{d\ell}$$

Le premier terme dans l'équation est nul puisque le champ magnétique est constant. Le deuxième terme de l'équation est aussi nul puisque la trajectoire ne se déplace pas (v_l est toujours nul). Par contre, le 3^e terme n'est pas nul puisque les charges se déplacent avec la rotation du disque. La vitesse des charges dépend de la distance entre la charge et le centre du disque (on néglige la vitesse de dérive ici).

$$v_c = \omega r$$

Ainsi, le vecteur $\vec{v}_c \times \vec{B}$ a la grandeur $\omega r B$ et il est dirigé vers le centre du disque.

On va prendre une trajectoire qui se dirige vers le centre du disque dans la partie en pointillée. La longueur de chaque petit morceau de trajectoire a une longueur dr . On arrive alors à

$$\begin{aligned} \oint \vec{v}_c \times \vec{B} \cdot \vec{d\ell} &= \int_R^0 \omega r B dr \\ &= -\frac{1}{2} \omega B R^2 \end{aligned}$$

Clairement, les 2^e et 3^e termes ne s'annulent pas, ce qui signifie que

$$\mathcal{E} \neq -\frac{d\phi_B}{dt}$$

dans ce cas.

La loi d'induction avec la variation de flux n'est donc pas toujours vraie. Il ne faut pas se surprendre de voir des cas (dans lesquelles les charges ne sont pas obligées de suivre un fil) où cette formule ne donne pas la bonne valeur de la différence de potentiel. Autrement dit, la véritable loi

$$\mathcal{E} = \oint (\vec{E} \cdot \vec{d\ell} + \vec{v}_c \times \vec{B} \cdot \vec{d\ell})$$

donne

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

uniquement dans certaines conditions.