# *Champ électrique fait par une charge en mouvement*

On commence avec un observateur (Bob) qui observe la charge au repos. Pour Bob, le champ magnétique est nul et le champ électrique est

$$E = \frac{kQ}{r^2}$$

En composantes, ces champs sont

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{kQ}{r^2}\frac{x}{r} = \frac{kQx}{r^3} = \frac{kQx}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \\
E_y &= \frac{kQ}{r^2}\frac{y}{r} = \frac{kQy}{r^3} = \frac{kQy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \\
E_z &= \frac{kQ}{r^2}\frac{z}{r} = \frac{kQz}{r^3} = \frac{kQz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \\
B_x &= 0 \\
B_y &= 0 \\
B_z &= 0
\end{aligned}$$

On va alors utiliser les lois de transformations des champs pour passer au point de vue de quelqu'un (Joe) qui se déplace vers les $x$ positifs par rapport à la charge et à Bob (Joe observe donc que la charge et Bob se déplacent vers les $x'$ négatifs). Comme les lois de transformations sont

$$\begin{array}{lll}
E'_x = E_x & E'_y = \gamma\left(E_y - vB_z\right) & E'_z = \gamma\left(E_z + vB_y\right) \\
B'_x = B_x & B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) & B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)
\end{array}$$

les composantes du champ magnétique selon Joe sont

$$\begin{aligned}
E'_x &= E_x = \frac{kQx}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \\
E'_y &= \gamma\left(E_y - vB_z\right) = \gamma\frac{kQy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \\
E'_z &= \gamma\left(E_z + vB_y\right) = \gamma\frac{kQz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Toutefois, ces composantes sont toujours données en termes de *x, y* et *z*, c'est-à-dire les positions mesurées par Bob. Il faudrait avoir ces composantes en termes de *x', y'* et *z'*, les coordonnées utilisées par Joe. Pas de problème, puisqu'on connait les transformations de Lorentz.

$$x = \gamma\left(x' + vt'\right) \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

Les composantes du champ deviennent alors

$$E'_x = \frac{kQ\gamma\left(x' + vt'\right)}{\left(\gamma^2\left(x' + vt'\right)^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}$$

$$E'_y = \gamma\frac{kQy'}{\left(\gamma^2\left(x' + vt'\right)^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}$$

$$E'_z = \gamma\frac{kQz'}{\left(\gamma^2\left(x' + vt'\right)^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}$$

Examinons le champ quand la particule est à l'origine, donc quand $t' = 0$.

$$E'_x = \gamma\frac{kQx'}{\left(\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}$$

$$E'_y = \gamma\frac{kQy'}{\left(\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}$$

$$E'_z = \gamma\frac{kQz'}{\left(\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}$$

On a alors

$$E'_x = \gamma\frac{kQr'}{\left(\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}\frac{x'}{r'}$$

$$E'_y = \gamma\frac{kQr'}{\left(\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}\frac{y'}{r'}$$

$$E'_z = \gamma\frac{kQr'}{\left(\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}\frac{z'}{r'}$$

Cette forme indique que le champ est radial (vers la charge ou opposé à la charge) et que sa grandeur est

$$E' = \gamma \frac{kQr'}{\left(\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}$$

On va arranger un peu le dénominateur.

$$\begin{aligned}
\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2 &= \left(\gamma^2 - 1\right) x'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 \\
&= \left(\gamma^2 - 1\right) x'^2 + r'^2 \\
&= \gamma^2 \left(1 - \tfrac{1}{\gamma^2}\right) x'^2 + r'^2 \\
&= \gamma^2 \left(1 - \left(1 - \tfrac{v^2}{c^2}\right)\right) x'^2 + r'^2 \\
&= \gamma^2 \tfrac{v^2}{c^2} x'^2 + r'^2 \\
&= \gamma^2 \tfrac{v^2}{c^2} r'^2 \cos^2\theta + r'^2 \\
&= \left(\gamma^2 \tfrac{v^2}{c^2} \cos^2\theta + 1\right) r'^2 \\
&= \left(\gamma^2 \tfrac{v^2}{c^2} \left(1 - \sin^2\theta\right) + 1\right) r'^2 \\
&= \gamma^2 \left(\tfrac{v^2}{c^2} - \tfrac{v^2}{c^2} \sin^2\theta + \tfrac{1}{\gamma^2}\right) r'^2 \\
&= \gamma^2 \left(\tfrac{v^2}{c^2} - \tfrac{v^2}{c^2} \sin^2\theta + 1 - \tfrac{v^2}{c^2}\right) r'^2 \\
&= \gamma^2 \left(1 - \tfrac{v^2}{c^2} \sin^2\theta\right) r'^2
\end{aligned}$$

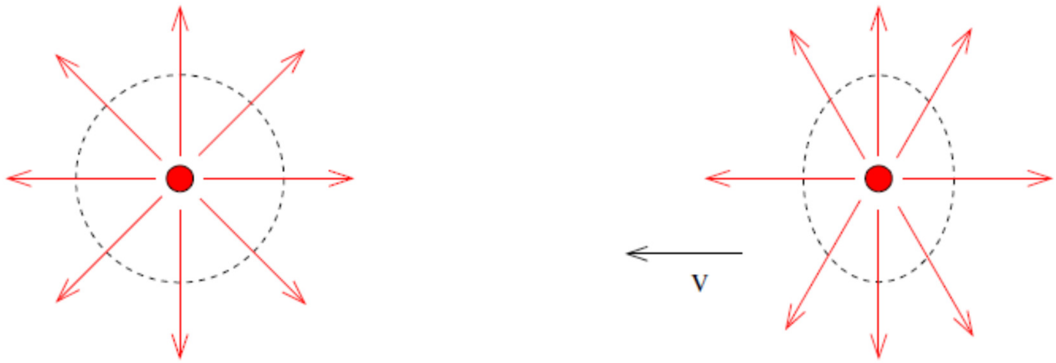
Le champ devient alors

$$E' = \gamma \frac{kQr'}{\left(\gamma^2 \left(1 - \tfrac{v^2}{c^2} \sin^2\theta\right) r'^2\right)^{3/2}} = \frac{kQ}{\gamma^2 r'^2 \left(\left(1 - \tfrac{v^2}{c^2} \sin^2\theta\right)\right)^{3/2}}$$

Le champ est donc donné par

$$E' = \frac{kQ}{r'^2} \frac{1}{\gamma^2 \left(\left(1 - \tfrac{v^2}{c^2} \sin^2\theta\right)\right)^{3/2}}$$

Le champ change donc selon la direction. On a en fait un champ qui ressemble à ceci.




www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/em/el4.pdf