

le champ magnétique fait par un solénoïde

Pour trouver le champ, on va séparer le solénoïde en petits anneaux. On sommerá ensuite le champ fait par chacun de ces anneaux pour trouver le champ magnétique total.

On doit donc trouver le champ fait par un anneau. Pour y arriver, on va prendre la loi de Biot-Savart. Chaque petit morceau génère un champ dont la grandeur est

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} Ids \sin \phi$$

Le champ le long de l'axe du solénoïde

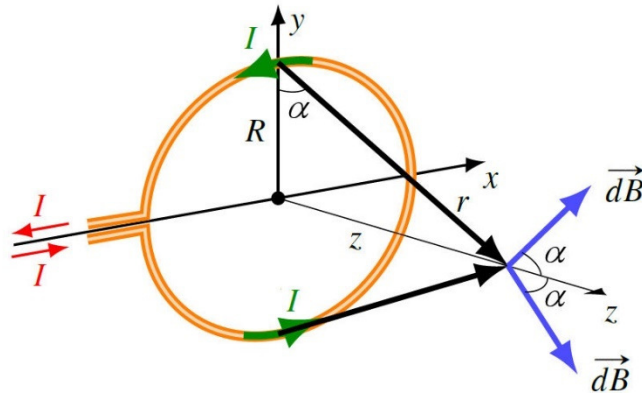
On va commencer par un cas particulier : le champ le long de l'axe du solénoïde.

On voit que le champ fait par chaque morceau de l'anneau n'est pas toujours dans la même direction. On va séparer en composante et garder seulement la composante z (les autres composantes vont s'annuler 2 à 2 comme pour les deux champs montrés sur la figure). Cette composante est

$$\begin{aligned} dB_z &= dB \cos \alpha \\ &= dB \frac{R}{r} \end{aligned}$$

Le champ total est donc

$$\begin{aligned} B_z &= \int dB \frac{R}{r} \\ &= \int \frac{\mu_0}{4\pi r^2} Ids \frac{R}{r} \\ &= \frac{\mu_0 RI}{4\pi r^3} \int ds \end{aligned}$$



Comme la somme des distances ds sur tout l'anneau est $2\pi R$, on a

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0 RI}{4\pi r^3} 2\pi R \\ &= \frac{\mu_0 R^2 I}{2r^3} \end{aligned}$$

Comme $r = \sqrt{R^2 + z^2}$, on a

$$B_z = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

On peut maintenant retourner au solénoïde, formé de plusieurs anneaux de largeur dx . On va considérer que le solénoïde est un cylindre vide et que le courant était réparti uniformément sur sa surface. Ainsi chaque anneau très mince est parcouru par une très petite partie de courant dans le solénoïde (courant qu'on va noter dI). Le champ fait par chaque anneau est donc

$$dB_z = \frac{\mu_0 R^2 dI}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Trouvons le courant qui passe dans un anneau (qui est un morceau de cylindre de largeur dx). Si on prend un bout de cylindre de longueur ℓ , le courant total dans cette partie du cylindre est NI où N est le nombre de tours de fil et I est le courant dans le fil. Le courant par unité de longueur du cylindre est donc

$$\text{courant par unité de longueur} = \frac{NI}{\ell}$$

Si on multiplie cette densité de courant par la longueur du petit bout de cylindre qui forme le mince anneau de largeur dx , on trouve le courant dans l'anneau

$$dI = \frac{NI}{\ell} dz$$

Ainsi, le champ fait par un anneau est

$$dB_z = \frac{\mu_0 R^2 NI}{2\ell(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

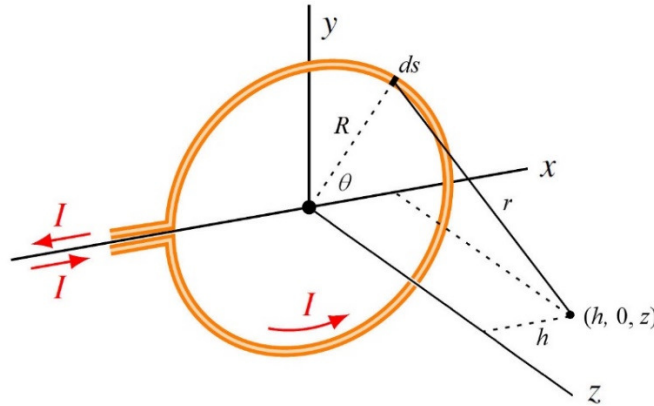
On somme les champs de tous les anneaux. Le premier anneau est à $z = -\infty$ et le dernier anneau est à $z = \infty$. On a donc

$$\begin{aligned} B_z &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 R^2 NI}{2\ell(R^2 + z^2)^{3/2}} dz \\ &= \frac{\mu_0 R^2 NI}{2\ell} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dz \\ &= \frac{\mu_0 R^2 NI}{2\ell} \left[\frac{z}{R^2 \sqrt{R^2 + z^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{\mu_0 R^2 NI}{2\ell} \left(\frac{1}{R^2} - -\frac{1}{R^2} \right) \\ &= \frac{\mu_0 NI}{\ell} \end{aligned}$$

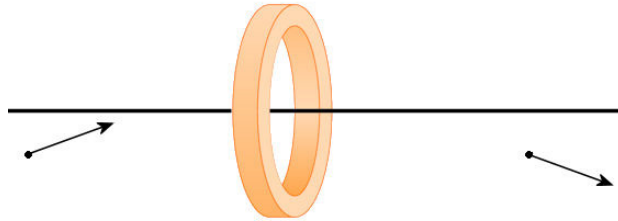
C'est la formule du champ dans le solénoïde. Toutefois, c'est uniquement le champ sur l'axe du solénoïde. Il faudrait montrer qu'on a le même champ partout dans le solénoïde.

Le champ fait par un petit morceau d'un anneau à une distance h de l'axe

On va maintenant examiner le champ à un endroit situé à une distance h de l'axe.

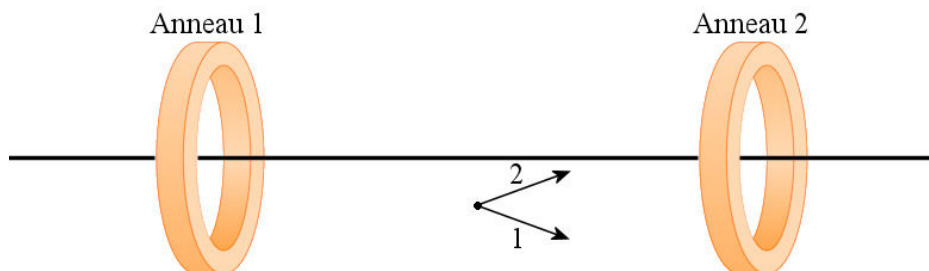


On aura seulement à calculer la composante z de ce champ puisque les autres composantes vont s'annuler. Commençons par dire que le champ fait par un anneau est symétrique de chaque côté de l'anneau.



Cela signifie que de chaque côté de l'anneau, ces vecteurs champ font le même angle avec l'axe de l'anneau.

Ainsi, si on considère 2 anneaux à la même distance de chaque côté du point où on veut savoir le champ, on a la situation suivante.



L'anneau 1 fait un champ qui fait un certain angle avec l'axe des anneaux. Toutefois, par symétrie, l'anneau 2 doit faire un champ qui fait exactement le même angle avec l'axe, mais dans la direction opposée. Ainsi, les composantes verticales pour chaque couple d'anneaux s'annulent et il ne reste que la composante en z .

Ici, on va travailler avec la forme vectorielle de la loi de Biot-Savard.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \vec{u} \times \vec{r} ds$$

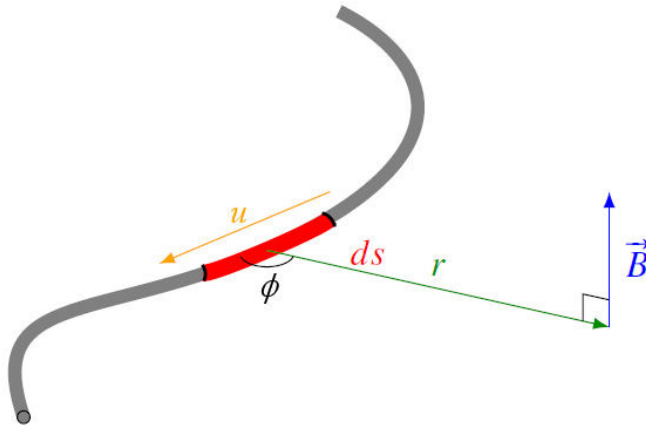
où u est un vecteur unitaire dans la direction du courant. Vérifions si cette formule donne la même formule que celle donnée dans les notes. Comme la grandeur d'un produit vectoriel est

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \phi$$

La grandeur de dB est

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} |\vec{u}| |\vec{r}| \sin \phi ds \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} 1 \cdot r \cdot \sin \phi ds \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \phi ds \end{aligned}$$

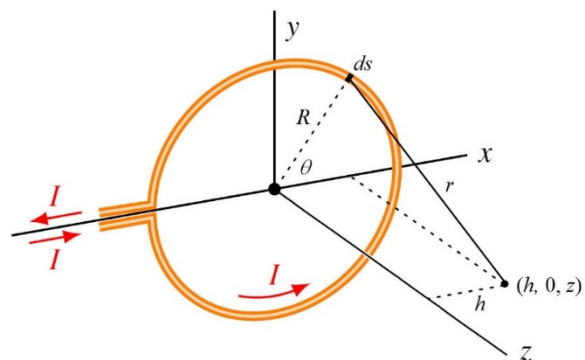
Super, c'est la formule qu'on avait. La direction est aussi correcte puisque le produit vectoriel de u et r (qu'on trouve avec la règle de la main droite) est bien dans la direction qu'on indiquait pour dB .



Que vaut ds ?

On va spécifier la position du morceau ds à l'aide des coordonnées polaires avec l'anneau centré sur l'origine des coordonnées. Dans ce cas, on

$$ds = R d\theta$$



Que vaut le vecteur r ?

La position d'un morceau sur l'anneau donnée par ce vecteur

$$R \cos \theta \vec{i} + R \sin \theta \vec{j}$$

Le vecteur donnant la position du point où on veut savoir le champ est

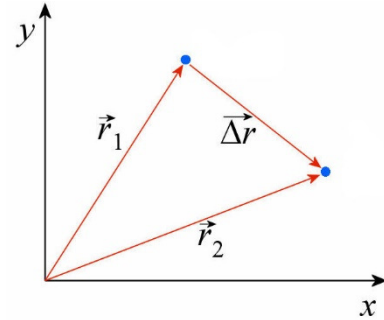
$$h\vec{i} + z\vec{k}$$

Un vecteur qui va d'un point à un autre est tout simplement la soustraction des vecteurs de chaque position (figure de droite). Le vecteur r , qui va du morceau de l'anneau jusqu'au point où on veut savoir le champ est donc

$$\vec{r} = (h - R \cos \theta) \vec{i} - R \sin \theta \vec{j} + z \vec{k}$$

Donc la distance entre un morceau et le point où on veut savoir le champ est la grandeur de ce vecteur

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(h - R \cos \theta)^2 + (R \sin \theta)^2 + z^2} \\ &= \sqrt{h^2 + R^2 + z^2 - 2hR \cos \theta} \end{aligned}$$



Que vaut le vecteur u ?

Le vecteur u est un vecteur dans la direction du courant dans chaque morceau. Ce vecteur est

$$\vec{u} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

Calcul du champ fait par un petit morceau de l'anneau

Pour trouver le champ avec

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \vec{u} \times \vec{r} ds$$

On doit premièrement faire le produit vectoriel de u et r . Ce produit est

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ h - R \cos \theta & -R \sin \theta & z \end{vmatrix} &= z \cos \theta \vec{i} + z \sin \theta \vec{j} + (R \sin^2 \theta - (h - R \cos \theta) \cos \theta) \vec{k} \\ &= z \cos \theta \vec{i} + z \sin \theta \vec{j} + (R \sin^2 \theta - h \cos \theta + R \cos^2 \theta) \vec{k} \\ &= z \cos \theta \vec{i} + z \sin \theta \vec{j} + (R - h \cos \theta) \vec{k} \end{aligned}$$

Le champ $d\vec{B}$ est donc

$$\begin{aligned}
 d\vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \vec{u} \times \vec{r} ds \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\left(z \cos \theta \vec{i} + z \sin \theta \vec{j} + (R - h \cos \theta) \vec{k} \right) R d\theta}{\left(h^2 + R^2 + z^2 - 2hR \cos \theta \right)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

Comme on sait que les composantes x et y vont s'annuler, on va maintenant examiner uniquement la composante en z du champ, c'est-à-dire la composante k du vecteur $d\vec{B}$.

$$dB_z = \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \frac{R - h \cos \theta}{\left(h^2 + R^2 + z^2 - 2hR \cos \theta \right)^{3/2}} d\theta$$

Le champ total

Pour trouver le champ, on va sommer les champs de tous les morceaux de l'anneau.

$$B_z = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \frac{R - h \cos \theta}{\left(h^2 + R^2 + z^2 - 2hR \cos \theta \right)^{3/2}} d\theta$$

Notre solénoïde sera formé de plusieurs anneaux de largeur dx dans lesquels il passe une partie du courant. Comme avec le calcul du champ le long de l'anneau, le courant dans chaque petit anneau est

$$dI = \frac{NI}{\ell} dz$$

Le champ fait par un petit anneau mince est donc

$$dB_z = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 NIR}{4\pi \ell} \frac{R - h \cos \theta}{\left(h^2 + R^2 + z^2 - 2hR \cos \theta \right)^{3/2}} d\theta dz$$

Quand on va sommer tous les anneaux de $z = -\infty$ à $z = \infty$ pour trouver le champ total, on aura alors

$$B_z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 NIR}{4\pi \ell} \frac{R - h \cos \theta}{\left(h^2 + R^2 + z^2 - 2hR \cos \theta \right)^{3/2}} d\theta dz$$

Il faut faire cette intégrale pour trouver le champ.

Le calcul de l'intégrale

On va commencer par faire l'intégrale par rapport à z . Cette intégrale donne

$$\begin{aligned}
B_z &= \frac{\mu_0 NIR}{4\pi\ell} \int_0^{2\pi} (R - h \cos \theta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(h^2 + R^2 + z^2 - 2hR \cos \theta)^{3/2}} dz d\theta \\
&= \frac{\mu_0 NIR}{4\pi\ell} \int_0^{2\pi} (R - h \cos \theta) \left[\frac{z}{(h^2 + R^2 - 2hR \cos \theta) \sqrt{h^2 + R^2 + z^2 - 2hR \cos \theta}} \right]_{-\infty}^{\infty} d\theta \\
&= \frac{\mu_0 NIR}{4\pi\ell} \int_0^{2\pi} (R - h \cos \theta) \frac{2}{(h^2 + R^2 - 2hR \cos \theta)} d\theta \\
&= \frac{\mu_0 NIR}{2\pi\ell} \int_0^{2\pi} \frac{R - h \cos \theta}{h^2 + R^2 - 2hR \cos \theta} d\theta
\end{aligned}$$

Il reste à faire cette intégrale par rapport à θ . C'est loin d'être facile. Heureusement, Maple peut nous aider. La solution dépend de la valeur de h par rapport à R et est un peu surprenante.

Si $h < R$ (intérieur du solénoïde), on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{R - h \cos \theta}{h^2 + R^2 - 2hR \cos \theta} d\theta = \frac{2\pi}{R}$$

Si $h > R$ (extérieur du cylindre), on a

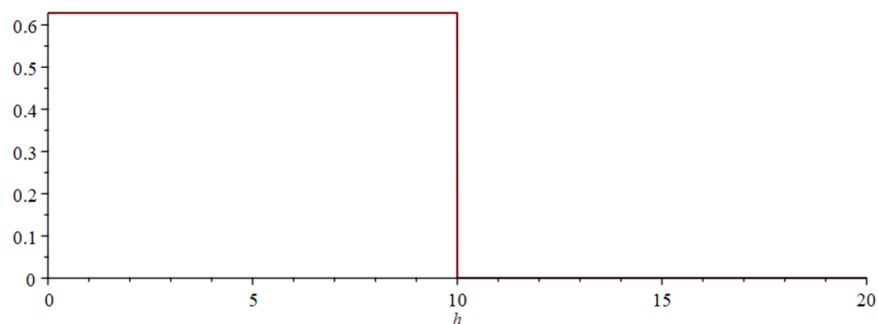
$$\int_0^{2\pi} \frac{R - h \cos \theta}{h^2 + R^2 - 2hR \cos \theta} d\theta = 0$$

Voici d'ailleurs un beau graphique de la solution de l'intégrale si $R = 10$.

$$fct := \int_0^{2\pi} \frac{10 - h \cdot \cos(t)}{10^2 + h^2 - 2 \cdot 10 \cdot h \cdot \cos(t)} dt$$

$$fct := \frac{\pi}{10} - \frac{\pi \operatorname{csgn}\left(\frac{h^2 + 20h + 100}{\sqrt{(h-10)^2 (h+10)^2}}\right) \operatorname{csgn}(h^2 - 100)}{10}$$

`plot(fct, h = 0 .. 20)`



Ici, l'intégrale vaut $2\pi/R = \pi/5$ si $R < 10$ et 0 si $R > 10$.

Le champ magnétique dans le solénoïde

On arrive donc à la solution suivante. À l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde, on a de beaux champs uniformes ayant les grandeurs suivantes.

Si $h < R$

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0 N I R}{2\pi\ell} \frac{2\pi}{R} \\ &= \frac{\mu_0 N I}{\ell} \end{aligned}$$

Si $h > R$

$$B_z = 0$$

On a donc un champ uniforme de grandeur $\mu_0 N I / \ell$ partout à l'intérieur du solénoïde et un champ nul à l'extérieur du solénoïde.