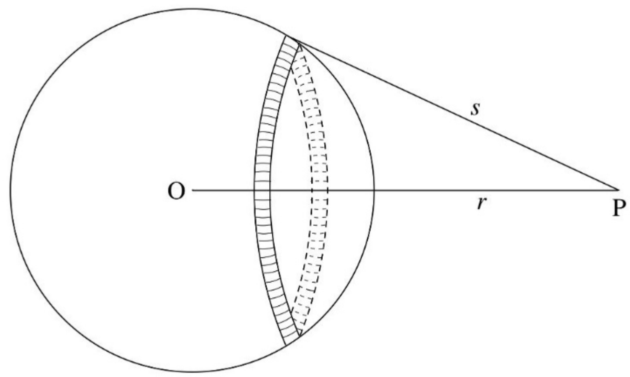
Preuve de la formule donnant la grandeur du champ électrique à l'extérieur d'une sphère

On va commencer par trouver le champ à l'extérieur d'une coquille vide.

On trouve le champ électrique au point P (à l'extérieur de la sphère) en séparant la coquille sphérique en petits morceaux infinitésimaux. On additionne ensuite les champs faits par tous ces morceaux pour trouver le champ total. Cette somme est en fait une intégrale.

On sépare la coquille sphérique en anneaux, puis on sépare chaque anneau en petites tranches, comme illustré sur la figure.



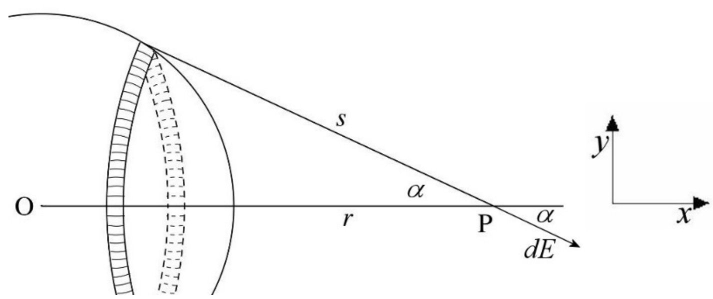
www.physics.brocku.ca/PPLATO/h-flap/phys3_2.html

Ainsi, le champ fait par une petite charge de l'anneau point P est

$$dE = k\frac{dq}{s^2}$$

Ce champ se sépare en composante x, y et z. Par symétrie, les composantes y et z vont s'annuler quand on va sommer les champs de tous les morceaux de l'anneau. Par contre, les composantes en x vont s'additionner.

Les composantes en x sont

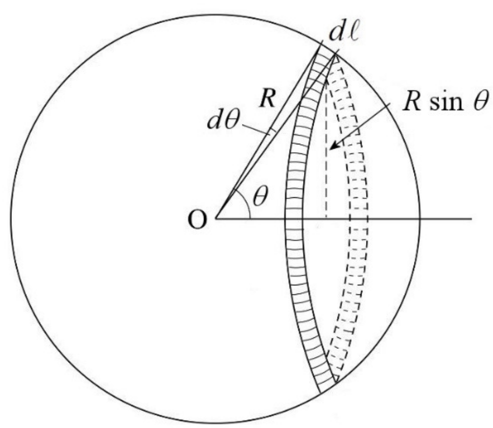


$$dE_x = k\frac{dq}{s^2}\cos\alpha$$

En sommant, les dq s'additionnent pour donner la charge de l'anneau, notée dq'. Le champ fait par un anneau au complet est donc

$$dE_x = k\frac{dq'}{s^2}\cos\alpha$$

Trouvons maintenant la charge de l'anneau.



La largeur angulaire de l'anneau est $d\theta$. Cet angle en radians correspond à la largeur de l'anneau divisé par le rayon de la sphère.

$$d\theta = \frac{d\ell}{R}$$

La surface de l'anneau sur la coquille est donc

$$
\begin{aligned}
dA &= 2\pi r d\ell \\
&= 2\pi\left(R\sin\theta\right)Rd\theta \\
&= 2\pi R^2 \sin\theta d\theta
\end{aligned}
$$

et la charge de l'anneau est

$$
\begin{aligned}
dq' &= \sigma dA \\
&= \sigma 2\pi R^2 \sin\theta d\theta
\end{aligned}
$$

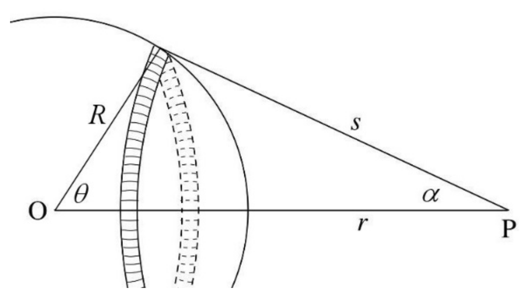
où σ est la charge surfacique de la coquille (en C/m²). Le champ est donc

$$
\begin{aligned}
dE_x &= k\frac{dq'}{s^2}\cos\alpha \\
&= k\frac{\sigma 2\pi R^2 \sin\theta d\theta}{s^2}\cos\alpha
\end{aligned}
$$

Reste à sommer les champs faits par tous les anneaux.

$$
\begin{aligned}
E_x &= \int_0^\pi k\frac{\sigma 2\pi R^2 \sin\theta\cos\alpha}{s^2}d\theta \\
&= k\sigma 2\pi R^2\int_0^\pi \frac{\sin\theta\cos\alpha}{s^2}d\theta
\end{aligned}
$$

Pour y arriver, il ne doit rester qu'une seule variable d'intégration. Pour l'instant, s, θ et α changent selon l'anneau choisi. On doit donc trouver le lien entre toutes ces variables.



La loi des cosinus nous donne

$$s^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta$$

Si on fait la différentielle de cette équation (sachant que r et R sont des constantes), on obtient

$$
\begin{aligned}
2sds &= 2rR\sin\theta d\theta \\
\sin\theta d\theta &= \frac{sds}{rR}
\end{aligned}
$$

On peut alors changer notre variable d'intégration pour obtenir

$$
\begin{aligned}
E_x &= k\sigma 2\pi R^2\int_0^\pi \frac{\sin\theta\cos\alpha}{s^2}d\theta \\
&= k\sigma 2\pi R\int_{r-R}^{r+R} \frac{s\cos\alpha}{rs^2}ds
\end{aligned}
$$

Ensuite, on utilise encore une fois la loi des cosinus pour trouver le cosinus de l'angle α.

$$R^2 = s^2 + r^2 - 2rs\cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2rs}$$

L'intégrale devient alors

$$\begin{aligned}
E_x &= k\sigma 2\pi R \int_{r-R}^{r+R} \frac{s\cos\alpha}{rs^2} ds \\
&= k\sigma 2\pi R \int_{r-R}^{r+R} \frac{s}{rs^2} \frac{r^2 + s^2 - R^2}{2rs} ds \\
&= \frac{k\sigma\pi R}{r^2} \int_{r-R}^{r+R} \frac{1}{s^2}\left(r^2 + s^2 - R^2\right) ds \\
&= \frac{k\sigma\pi R}{r^2} \int_{r-R}^{r+R} \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{s^2}\right) ds
\end{aligned}$$

La solution est

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{k\sigma\pi R}{r^2}\left[s - \frac{r^2 - R^2}{s}\right]_{r-R}^{r+R} \\
&= \frac{k\sigma\pi R}{r^2}\left[(r+R) - \frac{r^2 - R^2}{r+R} - (r-R) + \frac{r^2 - R^2}{r-R}\right]
\end{aligned}$$

Comme $r^2 - R^2 = (r+R)(r-R)$, on arrive à

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{k\sigma\pi R}{r^2}\left[(r+R) - \frac{(r+R)(r-R)}{r+R} - (r-R) + \frac{(r+R)(r-R)}{r-R}\right] \\
&= \frac{k\sigma\pi R}{r^2}\left[(r+R) - (r-R) - (r-R) + (r+R)\right] \\
&= \frac{k\sigma\pi R}{r^2}\left[4R\right] \\
&= \frac{k\sigma 4\pi R^2}{r^2} \\
&= \frac{kQ}{r^2}
\end{aligned}$$

Le champ électrique fait par la coquille sphérique est donc

$$E_x = \frac{kQ}{r^2}$$

Une sphère est une superposition de coquille. Le champ sera simplement la somme des champs de toutes les coquilles

$$E_x = \sum \frac{kQ}{r^2}$$

Comme les coquilles ont toutes le même centre quand elles se superposent pour former une sphère, les valeurs de r sont les mêmes pour toutes les coquilles. On peut donc mettre r en évidence pour obtenir

$$E_x = \frac{k}{r^2} \sum Q$$

La somme des charges des coquilles étant égal à la charge de la sphère, on arrive à

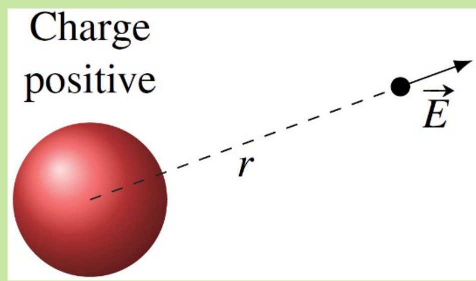
$$E_x = \frac{kQ_{sphère}}{r^2}$$

On a donc

Champ électrique fait par une sphère chargée (à l'extérieur de la sphère)

Grandeur

$$E = \frac{k|Q|}{r^2} = \frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



Direction

Le champ est dirigé dans la direction opposée à la sphère si elle est chargée positivement.
Le champ est dirigé vers la sphère si elle est chargée négativement.