Champ magnétique fait par une charge en mouvement

On commence avec un observateur (Bob) qui observe la charge au repos. Pour Bob, le champ magnétique est nul et le champ électrique est

$$E = \frac{kQ}{r^2}$$

En composantes, ces champs sont

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{kQ}{r^2}\frac{x}{r} = \frac{kQx}{r^3} = \frac{kQx}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \\
E_y &= \frac{kQ}{r^2}\frac{y}{r} = \frac{kQy}{r^3} = \frac{kQy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \\
E_z &= \frac{kQ}{r^2}\frac{z}{r} = \frac{kQz}{r^3} = \frac{kQz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \\
B_x &= 0 \\
B_y &= 0 \\
B_z &= 0
\end{aligned}$$

On va alors utiliser les lois de transformations des champs pour passer au point de vue de quelqu'un (Joe) qui se déplace vers les x positifs par rapport à la charge et à Bob (Joe observe donc que la charge et Bob se déplacent vers les x' négatifs). Comme les lois de transformations sont

$$\begin{array}{lll}
E'_x = E_x & E'_y = \gamma\left(E_y - vB_z\right) & E'_z = \gamma\left(E_z + vB_y\right) \\
B'_x = B_x & B'_y = \gamma\left(B_y + \tfrac{v}{c^2}E_z\right) & B'_z = \gamma\left(B_z - \tfrac{v}{c^2}E_y\right)
\end{array}$$

les composantes du champ magnétique selon Joe sont

$$\begin{aligned}
B'_x &= 0 \\
B'_y &= \gamma\left(B_y + \tfrac{v}{c^2}E_z\right) = \gamma\frac{v}{c^2}\frac{kQz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \\
B'_z &= \gamma\left(B_z - \tfrac{v}{c^2}E_y\right) = -\gamma\frac{v}{c^2}\frac{kQy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Toutefois, ces composantes sont toujours données en termes de x, y et z, c'est-à-dire les positions mesurées par Bob. Il faudrait avoir ces composantes en termes de x', y' et z', les coordonnées utilisées par Joe. Pas de problème, puisqu'on connait les transformations de Lorentz.

$$x = \gamma\left(x' + vt'\right) \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

Les composantes du champ deviennent alors

$$\begin{aligned}
B'_x &= 0 \\
B'_y &= -\gamma \frac{v}{c^2} \frac{kQz'}{\left(\gamma^2\left(x' + vt'\right)^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}} \\
B'_z &= \gamma \frac{v}{c^2} \frac{kQy'}{\left(\gamma^2\left(x' + vt'\right)^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Examinons le champ quand la particule est à l'origine, donc quand $t' = 0$.

$$\begin{aligned}
B'_x &= 0 \\
B'_y &= -\gamma \frac{v}{c^2} \frac{kQz'}{\left(\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}} \\
B'_z &= \gamma \frac{v}{c^2} \frac{kQy'}{\left(\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Commençons par examiner la grandeur du champ.

$$\begin{aligned}
B'^2 &= B'^2_x + B'^2_y + B'^2_z \\
&= 0 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^4} \frac{k^2Q^2z'^2}{\left(\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^3} + \gamma^2 \frac{v^2}{c^4} \frac{k^2Q^2y'^2}{\left(\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^3} \\
&= \gamma^2 \frac{v^2}{c^4} \frac{k^2Q^2}{\left(\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^3}\left(y'^2 + z'^2\right)
\end{aligned}$$

On va arranger un peu le numérateur

$$
\begin{aligned}
y'^2 + z'^2 &= -x'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 \\
&= -x'^2 + r'^2 \\
&= -r'^2 \cos^2\theta + r'^2 \\
&= \left(-\cos^2\theta + 1\right) r'^2 \\
&= \left(\sin^2\theta\right) r'^2
\end{aligned}
$$

et le dénominateur

$$
\begin{aligned}
\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2 &= \left(\gamma^2 - 1\right) x'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 \\
&= \left(\gamma^2 - 1\right) x'^2 + r'^2 \\
&= \gamma^2 \left(1 - \tfrac{1}{\gamma^2}\right) x'^2 + r'^2 \\
&= \gamma^2 \left(1 - \left(1 - \tfrac{v^2}{c^2}\right)\right) x'^2 + r'^2 \\
&= \gamma^2 \tfrac{v^2}{c^2} x'^2 + r'^2 \\
&= \gamma^2 \tfrac{v^2}{c^2} r'^2 \cos^2\theta + r'^2 \\
&= \left(\gamma^2 \tfrac{v^2}{c^2} \cos^2\theta + 1\right) r'^2 \\
&= \left(\gamma^2 \tfrac{v^2}{c^2} \left(1 - \sin^2\theta\right) + 1\right) r'^2 \\
&= \gamma^2 \left(\tfrac{v^2}{c^2} - \tfrac{v^2}{c^2} \sin^2\theta + \tfrac{1}{\gamma^2}\right) r'^2 \\
&= \gamma^2 \left(\tfrac{v^2}{c^2} - \tfrac{v^2}{c^2} \sin^2\theta + 1 - \tfrac{v^2}{c^2}\right) r'^2 \\
&= \gamma^2 \left(1 - \tfrac{v^2}{c^2} \sin^2\theta\right) r'^2
\end{aligned}
$$

Le champ devient alors

$$
B'^2 = \gamma^2 \frac{v^2}{c^4} \frac{k^2 Q^2}{\left(\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^3} \left(y'^2 + z'^2\right)
$$

$$
B'^2 = \gamma^2 \frac{v^2}{c^4} \frac{k^2 Q^2 r'^2 \sin^2\theta}{\left(\gamma^2 \left(1 - \tfrac{v^2}{c^2} \sin^2\theta\right) r'^2\right)^3}
$$

$$
B'^2 = \frac{v^2}{\gamma^4 c^4} \frac{k^2 Q^2 r'^2 \sin^2\theta}{\left(1 - \tfrac{v^2}{c^2} \sin^2\theta\right)^3 r'^6}
$$

$$
B'^2 = \frac{v^2}{\gamma^4 c^4} \frac{k^2 Q^2 \sin^2\theta}{\left(1 - \tfrac{v^2}{c^2} \sin^2\theta\right)^3 r'^4}
$$

$$B' = \frac{v}{\gamma^2 c^2} \frac{kQ\sin\theta}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2} r'^2}$$

$$B' = \frac{v}{c^2} \frac{kQ\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\sin\theta}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2} r'^2}$$

Si $v << c$ alors, on a

$$B' = \frac{v}{c^2} \frac{kQ\sin\theta}{r'^2}$$

Finalement, puisque $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{k}{c^2} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \\ &= \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{16\pi^2 \varepsilon_0} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \end{aligned}$$

La grandeur du champ est donc

$$B' = \frac{\mu_0}{4\pi r'^2} Qv\sin\theta$$

C'est bien la grandeur du champ donnée. On pourrait aussi vérifier que la direction du champ est bonne. Par exemple, dans le plan $x'y'$, on a $z' = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} B'_x &= 0 \\ B'_y &= 0 \\ B'_z &= -\gamma \frac{v}{c^2} \frac{kQy'}{\left(\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}} \end{aligned}$$

Si y' est positif, le champ est dans la direction des z' négatifs (entre dans la page). Si y' est négatif, le champ est dans la direction des z' positifs (sort de la page). C'est bien ce qu'on doit avoir avec une particule positive qui se déplace vers les x' négatifs selon Joe.