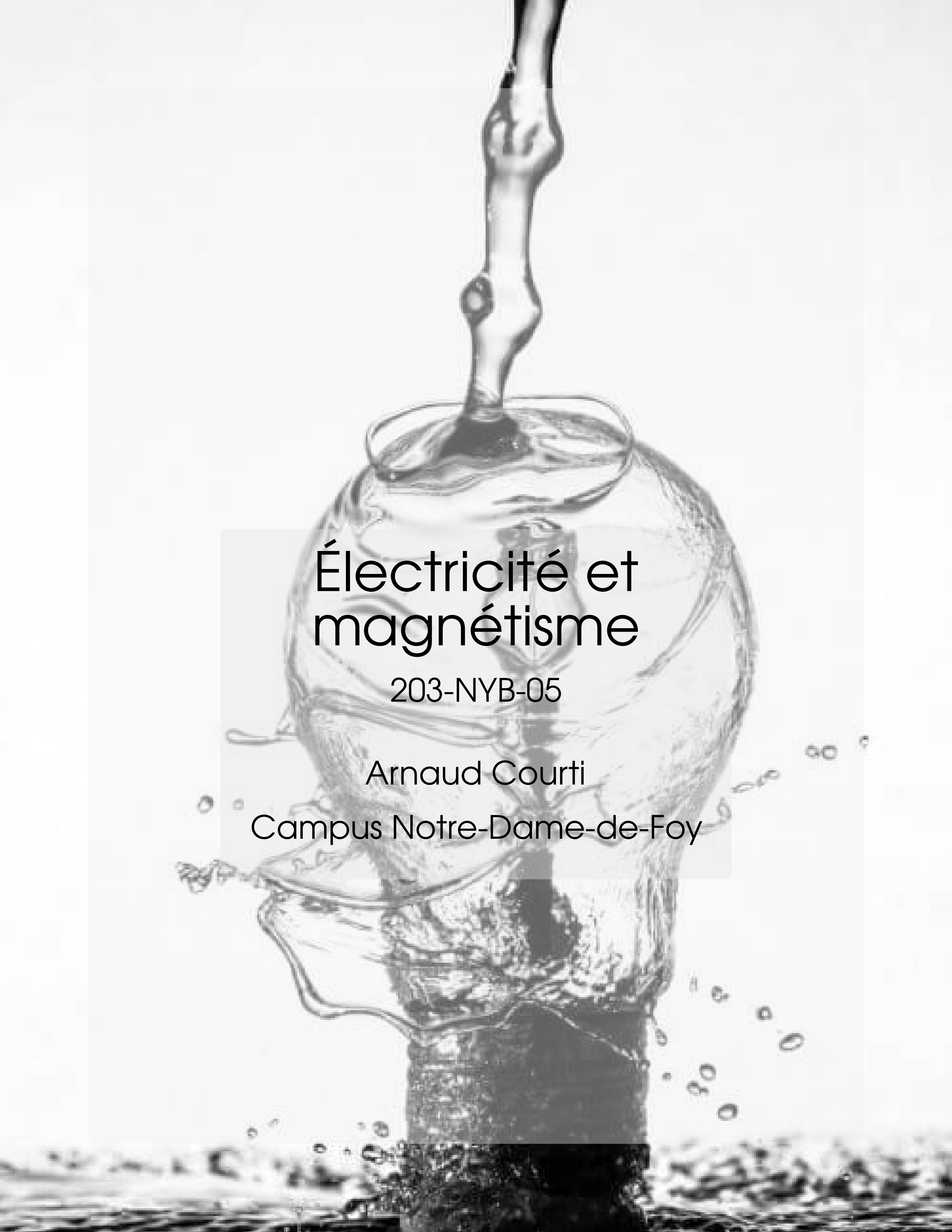


Électricité et magnétisme

203-NYB-05

Arnaud Courti

Campus Notre-Dame-de-Foy

Solutionnaire d'Électricité et de magnétisme - 203-NYB-05, version 4.0, août 2021

Ces notes de cours sont écrites par Luc Tremblay, professeur de physique au Collège Mérici de Québec. Elles sont reproduites ici avec son autorisation. Un grand merci, Luc, pour ces notes !

Dernière mise en page, le 14 octobre 2021, par ARNAUD COURTI

Compilé par :	pdfTEX-1.40.23
Version LATEX :	LATEX 2ε <2020-10-01>

Laboratoires et cours inspirés de collègues, professeurs de physique à travers tout le Québec, le Canada et même d'ailleurs.

Modèle LATEX *The Legrand Orange Book* tiré de `http://www.latextemplates.com`.

Première impression, août 2018

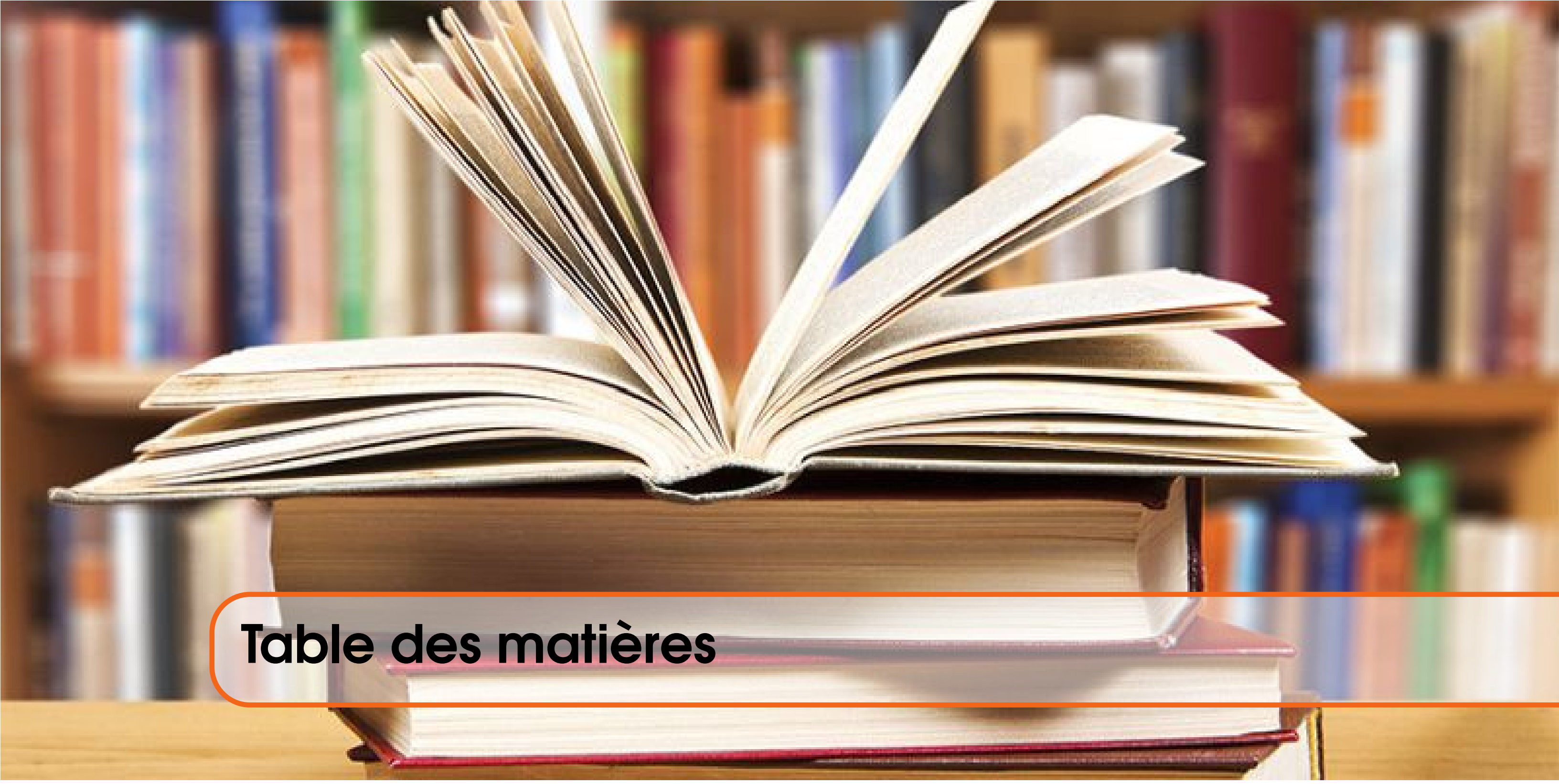


Table des matières

Cette page est intentionnellement laissée en blanc.

Solutionnaire

Pourquoi les cheveux de cette personne deviennent-ils comme ça quand la personne devient chargée ? Découvrez la réponse à cette question dans ce chapitre.

1. Solutions du chapitre 1

Exercice 1 : La force est

$$F = k\frac{|q_1q_2|}{r^2} = 9\times 10^9 \times \frac{\left|1{,}602\times 10^{-19}\times(-1{,}602\times 10^{-19})\right|}{(2{,}82\times 10^{-10})^2} = 2{,}904\times 10^{-9}\,\mathrm{N}$$

Exercice 2 : On trouve la distance avec la formule de la force

$$F = k\frac{|q_1q_2|}{r^2} \quad\longrightarrow\quad 10 = 9\times 10^9\,\frac{\left|5\times 10^{-6}\times(-10\times 10^{-6})\right|}{r^2} \quad\longrightarrow\quad r = 0{,}212\,1\,\mathrm{m}$$

Exercice 3 :

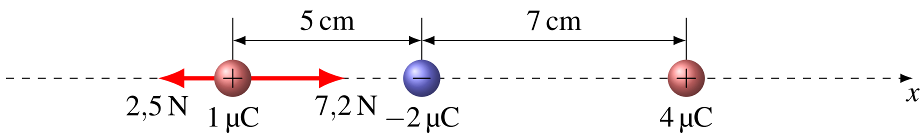
(a) La grandeur de la force faite par la charge de $-2\,\mu\mathrm{C}$ est

$$F = k\frac{|q_1q_2|}{r^2} = 9\times 10^9 \times \frac{\left|1\times 10^{-6}\times(-2\times 10^{6})\right|}{(0{,}05)^2} = 7{,}2\,\mathrm{N}$$

La grandeur de la force faite par la charge de $4\,\mu\mathrm{C}$ est

$$F = k\frac{|q_1q_2|}{r^2} = 9\times 10^9 \times \frac{\left|1\times 10^{-6}\times(4\times 10^{6})\right|}{(0{,}12)^2} = 2{,}5\,\mathrm{N}$$

Comme la force faite par la charge de $-2\,\mu\mathrm{C}$ est attractive et que celle faite par la charge de $4\,\mu\mathrm{C}$ est répulsive, on a la situation suivante.



En utilisant un axe positif vers la droite, la force nette est

$$F_{\text{nette}} = 7{,}2 - 2{,}5 = 4{,}7\,\mathrm{N}$$

La force nette est donc de $4{,}7\,\mathrm{N}$ vers la droite.

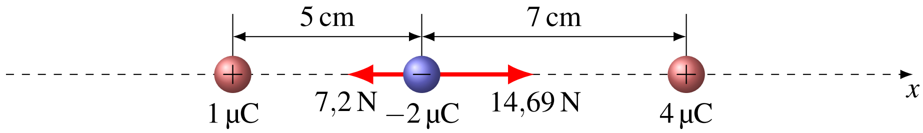
(b) La grandeur de la force faite par la charge de 1 µC est

$$F = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2} = 9\times 10^9 \times \frac{\left|1\times 10^{-6}\times(-2\times 10^{6})\right|}{(0{,}05)^2} = 7{,}2\,\mathrm{N}$$

La grandeur de la force faite par la charge de 4 µC est

$$F = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2} = 9\times 10^9 \times \frac{\left|-2\times 10^{-6}\times(4\times 10^{6})\right|}{(0{,}07)^2} = 14{,}69\,\mathrm{N}$$

Comme la force faite par la charge de 1 µC est attractive et que celle faite par la charge de 4 µC est attractive, on a la situation suivante.



En utilisant un axe positif vers la droite, la force nette est

$$F_{\text{nette}} = 14{,}69 - 7{,}2 = 7{,}49\,\mathrm{N}$$

La force nette est donc de 7,49 N vers la droite.

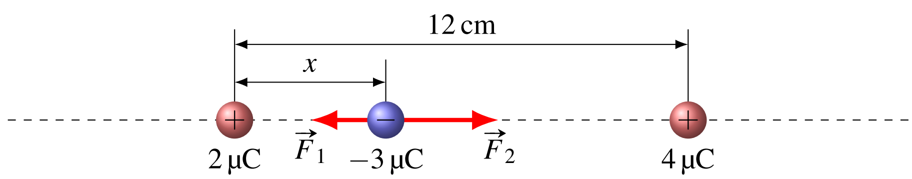
Exercice 4 : La grandeur de la force faite par la charge de 2 µC est

$$F = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2} = 9\times 10^9 \times \frac{\left|2\times 10^{-6}\times(-3\times 10^{6})\right|}{x^2} = \frac{0{,}054}{x^2}$$

La grandeur de la force faite par la charge de 4 µC est

$$F = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2} = 9\times 10^9 \times \frac{\left|-3\times 10^{-6}\times(4\times 10^{6})\right|}{(0{,}12-x)^2} = \frac{0{,}108}{(0{,}12-x)^2}$$

Comme la force faite par la charge de 2 µC est attractive et que celle faite par la charge de 4 µC est attractive, on a la situation suivante :



En utilisant un axe positif vers la droite, la force nette est

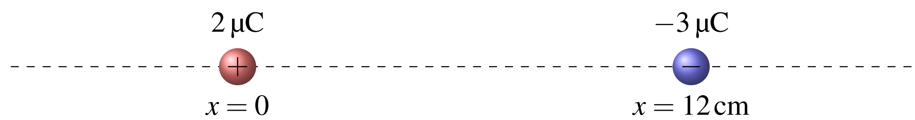
$$F_{\text{nette}} = -F_1 + F_2 = -\frac{0{,}054}{x^2} + \frac{0{,}108}{(0{,}12-x)^2}$$

Si on veut que la force soit nulle, on doit avoir

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{0{,}054}{x^2} + \frac{0{,}108}{(0{,}12-x)^2} \\ \frac{0{,}054}{x^2} &= \frac{0{,}108}{(0{,}12-x)^2} \end{aligned} \quad\longrightarrow\quad \begin{aligned} \frac{1}{x^2} &= \frac{2}{(0{,}12-x)^2} \\ (0{,}12-x)^2 &= 2x^2 \end{aligned} \quad\longrightarrow\quad \begin{aligned} 0{,}0144 - 0{,}24x + x^2 &= 2x^2 \\ 0 &= x^2 + 0{,}24x - 0{,}0144 \end{aligned}$$

La solution de cette équation quadratique est $x = 0{,}0497\,\mathrm{m} = 4{,}97\,\mathrm{cm}$. (Il y a une autre solution $x = -0{,}2897\,\mathrm{m}$, mais cette solution n'est pas valide ici. À cette position, les deux forces sont égales, mais dans la même direction.)

Exercice 5 : On va mettre notre $x = 0$ à la position de la charge de $2\,\mu C$. La position de la charge de $-3\,\mu C$ est donc $x = 0{,}12\,m$.



Pour trouver l'endroit exact, on va mettre notre $x = 0$ à la position de la charge de $2\,\mu C$. La position de la charge de $-3\,\mu C$ est donc $x = 0{,}12\,m$. Si la position de la charge qu'on place est x, on a

$$\begin{aligned} F_1 &= k\frac{|q_1 q_3|}{r^2} \\ &= 9\times 10^9 \times \frac{\left|2\times 10^{-6}\times q_3\right|}{x^2} \\ &= \frac{18\,000\times |q_3|}{x^2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F_2 &= k\frac{|q_2 q_3|}{r^2} \\ &= 9\times 10^9 \times \frac{\left|-3\times 10^{-6}\times q_3\right|}{(0{,}12-x)^2} \\ &= \frac{27\,000\times |q_3|}{(0{,}12-x)^2} \end{aligned}$$

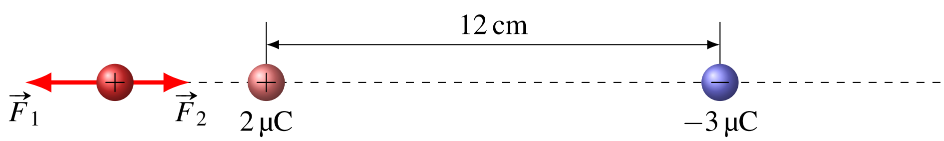
Si la force nette est nulle, c'est que les deux forces sont de même grandeur. On a donc

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 \\ \frac{18\,000\times |q_3|}{x^2} &= \frac{27\,000\times |q_3|}{(0{,}12-x)^2} \end{aligned} \quad\longrightarrow\quad \begin{aligned} \frac{2}{x^2} &= \frac{3}{(0{,}12-x)^2} \\ 2(0{,}12-x)^2 &= 3x^2 \end{aligned} \quad\longrightarrow\quad \begin{aligned} 0{,}028\,8 - 0{,}48x + 2x^2 &= 3x^2 \\ 0 &= x^2 + 0{,}48x - 0{,}028\,8 \end{aligned}$$

Les solutions de cette équation sont $x = -0{,}533\,9\,m$ et $x = 0{,}053\,9\,m$.

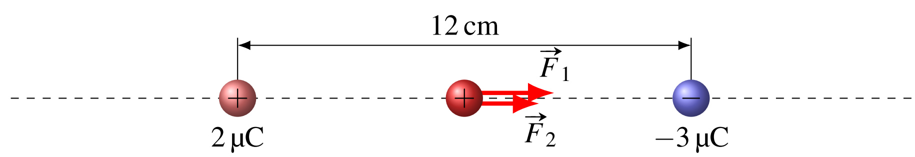
Examinons la direction des forces pour ces 2 solutions.

Supposons que q est positive. Voici les directions des forces si on place cette charge à $x = -0{,}522\,9\,m$ ($\vec{F}_1$ est la force faite par la charge de $2\,\mu C$ et $\vec{F}_2$ est la force faite par la charge de $-3\,\mu C$).



Comme les forces sont dans des directions opposées, elles s'annulent et la force nette est nulle. C'est donc une solution acceptable.

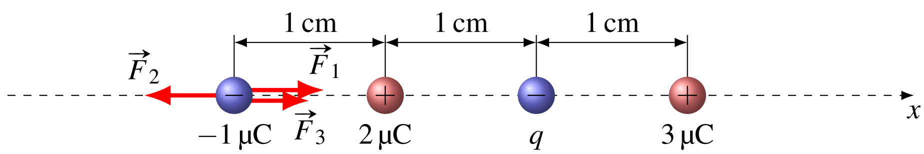
Voici les directions des forces si on place la charge à $x = 0{,}053\,9\,m$ ($\vec{F}_1$ est la force faite par la charge de $2\,\mu C$ et $\vec{F}_2$ est la force faite par la charge de $-3\,\mu C$).



Comme les forces sont dans la même direction, il est impossible que la force nette soit nulle dans cette région. Ce n'est donc pas une solution acceptable.

La seule solution acceptable est donc $x = -0{,}533\,9\,\text{m}$. On doit donc placer la charge à 53,39 cm à gauche de la charge de 2 µC.

Exercice 6 : On va appeler $\vec{F}_1$ la force faite par la charge de 2 µC, $\vec{F}_2$ la force faite par la charge négative inconnue et $\vec{F}_3$ la force faite par la charge de 3 µC. On a donc



Si la force est nulle, on doit avoir (en utilisant un axe positif vers la droite)

$$0 = F_1 - F_2 + F_3$$

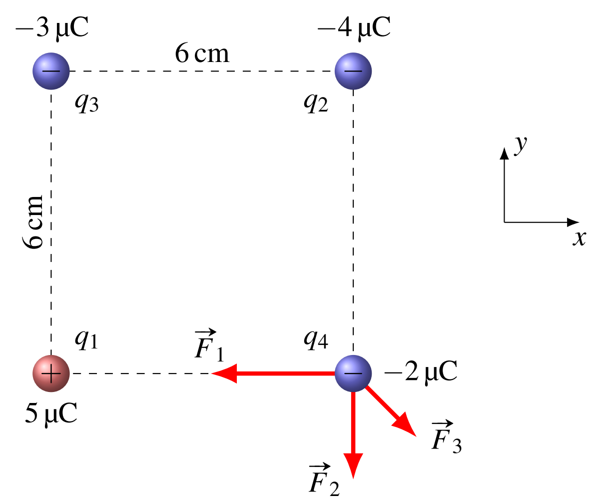
$$0 = k\frac{\left|-1\times10^{-6}\times2\times10^{-6}\right|}{(0{,}01)^2} - k\frac{\left|-1\times10^{-6}\times q\right|}{(0{,}02)^2} + k\frac{\left|-1\times10^{-6}\times3\times10^{-6}\right|}{(0{,}03)^2}$$

$$0 = \frac{2\times10^{-6}}{(0{,}01)^2} - \frac{|q|}{(0{,}02)^2} + \frac{3\times10^{-6}}{(0{,}03)^2} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{|q|}{(0{,}02)^2} = 0{,}023\,33$$

$$0 = 0{,}02 - \frac{|q|}{(0{,}02)^2} + 0{,}003\,33 \qquad |q| = 9{,}333\times10^{-6}\,\text{C}$$

La charge inconnue est donc une charge de −9,333 µC.

Exercice 7 : On va appeler $\vec{F}_1$ la force faite par la charge de 5 µC, $\vec{F}_2$ la force faite par la charge de −4 µC et $\vec{F}_3$ la force faite par la charge de −3 µC. On a donc



La grandeur de chaque force est

$$F_1 = k\frac{|q_1q_4|}{r^2} = 9\times10^9\times\frac{\left|5\times10^{-6}\times(-2\times10^{-6})\right|}{(0{,}06)^2} = 25\,\text{N}$$

$$F_2 = k\frac{|q_2q_4|}{r^2} = 9\times10^9\times\frac{\left|-4\times10^{-6}\times(-2\times10^{-6})\right|}{(0{,}06)^2} = 20\,\text{N}$$

Pour F_3, la distance est la diagonale du carré. On a donc

$$r^2 = (0{,}06)^2 + (0{,}06)^2 = 0{,}007\,2\,\text{m}^2$$

Ainsi, la grandeur de la force est

$$F_3 = k\frac{|q_3 q_4|}{r^2} = 9\times 10^9 \times \frac{\left|-3\times 10^{-6}\times(-2\times 10^{-6})\right|}{0{,}007\,2} = 7{,}5\,\mathrm{N}$$

Avec un axe des x vers la droite et un axe des y vers le haut, les composantes de ces forces sont

$$F_{1x} = -25\,\mathrm{N} \qquad F_{1y} = 0\,\mathrm{N}$$
$$F_{2x} = 0\,\mathrm{N} \qquad F_{2y} = -20\,\mathrm{N}$$
$$F_{3x} = 7{,}5\cos(-45^\circ) = 5{,}303\,\mathrm{N} \qquad F_{3y} = 7{,}5\sin(-45^\circ) = -5{,}303\,\mathrm{N}$$

Les composantes de la force nette sont donc

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = -25 + 0 + 5{,}303 = -19{,}697\,\mathrm{N}$$
$$F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0 - 20 - 5{,}303 = -25{,}303\,\mathrm{N}$$

La grandeur de la force est donc

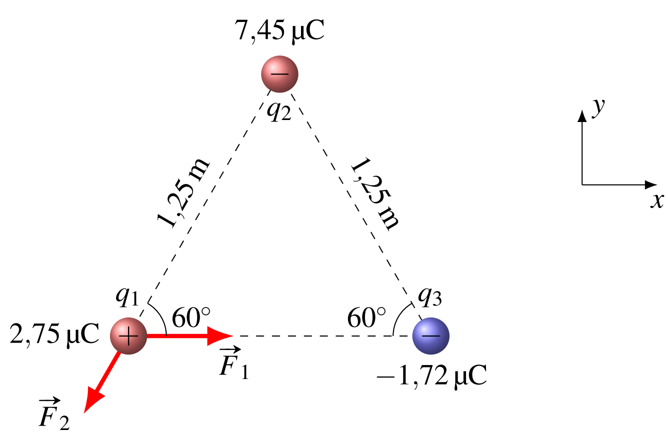
$$F = \sqrt{(-19{,}697)^2 + (-25{,}303)^2} = 32{,}07\,\mathrm{N}$$

et la direction de la force est

$$\theta = \arctan\frac{F_y}{F_x} = \arctan\frac{-25{,}303}{-19{,}697} = -127{,}9^\circ$$

(ou 232,1°, c'est la même chose.)

Exercice 8 : On va appeler $\vec{F}_1$ la force faite par la charge de $-1{,}72\,\mu\mathrm{C}$, $\vec{F}_2$ la force faite par la charge de $7{,}45\,\mu\mathrm{C}$. On a donc



La grandeur de chaque force est

$$\begin{aligned} F_1 &= k\frac{|q_1 q_3|}{r^2} \\ &= 9\times 10^9 \times \frac{\left|-1{,}72\times 10^{-6}\times 2{,}75\times 10^{-6}\right|}{(1{,}25)^2} \\ &= 0{,}027\,244\,8\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= k\frac{|q_2 q_3|}{r^2} \\ &= 9\times 10^9 \times \frac{\left|7{,}45\times 10^{-6}\times 2{,}75\times 10^{-6}\right|}{(1{,}25)^2} \\ &= 0{,}118\,08\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Avec un axe des x vers la droite et un axe des y vers le haut, les composantes de ces forces sont

$$F_{1x} = 0{,}027\,244\,8\,\mathrm{N} \qquad F_{1y} = 0\,\mathrm{N}$$
$$F_{2x} = 0{,}118\,008\cos(-120°) = -0{,}059\,004\,\mathrm{N} \qquad F_{2y} = 0{,}118\,008\sin(-120°) = -0{,}102\,198\,\mathrm{N}$$

Les composantes de la force nette sont donc

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = 0{,}027\,244\,8 - 0{,}059\,004 = -0{,}031\,759\,2\,\mathrm{N}$$
$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = 0 - 0{,}102\,198 = -0{,}102\,198\,\mathrm{N}$$

La grandeur de la force est donc

$$F = \sqrt{(-0{,}031\,759\,2)^2 + (-0{,}102\,198)^2} = 0{,}107\,02\,\mathrm{N}$$

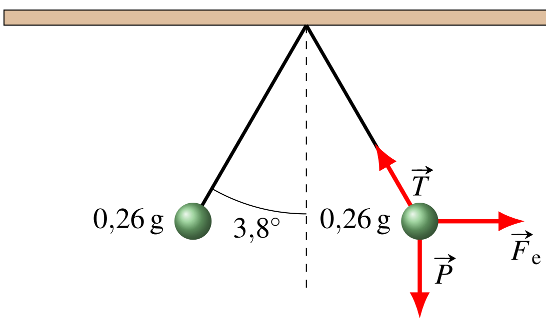
et la direction de la force est

$$\theta = \arctan\frac{F_y}{F_x} = \arctan\frac{-0{,}102\,198}{-0{,}031\,759\,2} = -107{,}3°$$

(ou 252,7°, c'est la même chose.)

Exercice 9 : Les forces sur la boule de droite sont :

(a) La force de gravitation ($P = mg$).
(b) La tension de la corde (T).
(c) La force de répulsion électrique entre les deux balles (F_e).



Si la somme des forces sur la boule est nulle, on a

$$\sum F_x = 0 \longrightarrow F_e + T\cos(93{,}8°) = 0$$
$$\sum F_y = 0 \longrightarrow -mg + T\sin(93{,}8°) = 0$$

La deuxième équation nous permet de trouver la tension.

$$-mg + T\sin(93{,}8°) = 0$$
$$-0{,}000\,26 \times 9{,}8 + T\sin(93{,}8°) = 0$$
$$T = 0{,}002\,553\,6\,\mathrm{N}$$

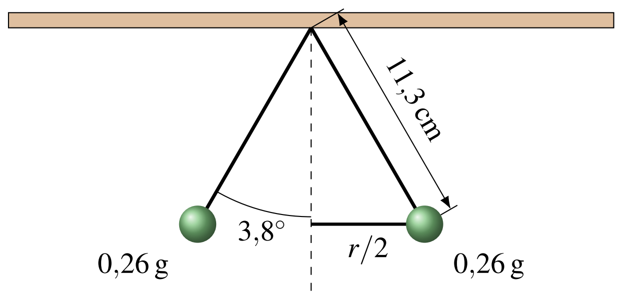
On peut ensuite utiliser cette valeur de la tension dans la somme des forces en x pour trouver la force électrique.

$$F_e + T\cos(93{,}8°) = 0$$
$$F_e + 0{,}002\,553\,6 \times \cos(93{,}8°) = 0$$
$$F_e = 1{,}692\,38 \times 10^{-4}\,\mathrm{N}$$

On peut ensuite trouver la charge avec

$$F_\mathrm{e} = k\frac{Q^2}{r^2} \qquad \longrightarrow \qquad 1{,}692\,38 \times 10^{-4} = 9 \times 10^9 \times \frac{Q^2}{r^2}$$

Pour trouver Q, il nous faudra toutefois la distance entre les deux charges. On trouve premièrement $r/2$ avec le triangle suivant.



On a donc

$$\frac{r/2}{11{,}3} = \sin(3{,}8^\circ) \qquad \longrightarrow \qquad r = 1{,}497\,8\,\mathrm{cm}$$

Cela nous amène à

$$F_\mathrm{e} = k\frac{Q^2}{r^2} \quad \longrightarrow \quad 1{,}692\,38 \times 10^{-4} = \frac{9 \times 10^9 \times Q^2}{0{,}014\,978} \quad \longrightarrow \quad Q = \pm 2{,}054 \times 10^{-9}\,\mathrm{C} = \pm 2{,}054\,\mathrm{nC}$$

Exercice 10 : On a

$$F_{12} = k\frac{|q_1 q_2|}{r_{12}^2}$$
$$18 = 9 \times 10^9 \times \frac{|q_1 q_2|}{(0{,}5)^2}$$
$$|q_1 q_2| = 5 \times 10^{-10}\,\mathrm{C}^2$$

Comme la charge 1 est positive et la charge 2 est négative, on doit avoir

$$q_1 q_2 = -5 \times 10^{-10}\,\mathrm{C}^2$$

On a ensuite

$$F_{13} = k\frac{|q_1 q_3|}{r_{13}^2} \quad \longrightarrow \quad 45 = 9 \times 10^9 \times \frac{|q_1 q_3|}{(0{,}5)^2} \quad \longrightarrow \quad |q_1 q_3| = 12{,}5 \times 10^{-10}\,\mathrm{C}^2$$

Comme la charge 1 est positive et la charge 3 est positive, on doit avoir

$$q_1 q_3 = 12{,}5 \times 10^{-10}\,\mathrm{C}^2$$

On a ensuite

$$F_{23} = k\frac{|q_2 q_3|}{r_{23}^2} \quad \longrightarrow \quad 72 = 9 \times 10^9 \times \frac{|q_2 q_3|}{(0{,}5)^2} \quad \longrightarrow \quad |q_2 q_3| = 20 \times 10^{-10}\,\mathrm{C}^2$$

Comme la charge 2 est négative et la charge 3 est négative, on doit avoir

$$q_2 q_3 = -20 \times 10^{-10}\,\mathrm{C}^2$$

On a alors les trois équations.

$$\begin{cases} q_1q_2 = -5\times 10^{-10} \\ q_1q_3 = 12{,}5\times 10^{-10} \\ q_2q_3 = -20\times 10^{-10} \end{cases}$$

Pour résoudre ces équations, on va premièrement éliminer q_3 en l'isolant dans la dernière équation

$$q_3 = \frac{-20\times 10^{-10}}{q_2}$$

et en remplaçant dans la deuxième équation

$$q_1q_3 = q_1\frac{-20\times 10^{-10}}{q_2} = 12{,}5\times 10^{-10}$$
$$\frac{q_1}{q_2} = -0{,}625$$

On a maintenant les deux équations suivantes.

$$q_1q_2 = -5\times 10^{-10}$$
$$\frac{q_1}{q_2} = -0{,}625$$

On trouve q_1 en multipliant les deux équations.

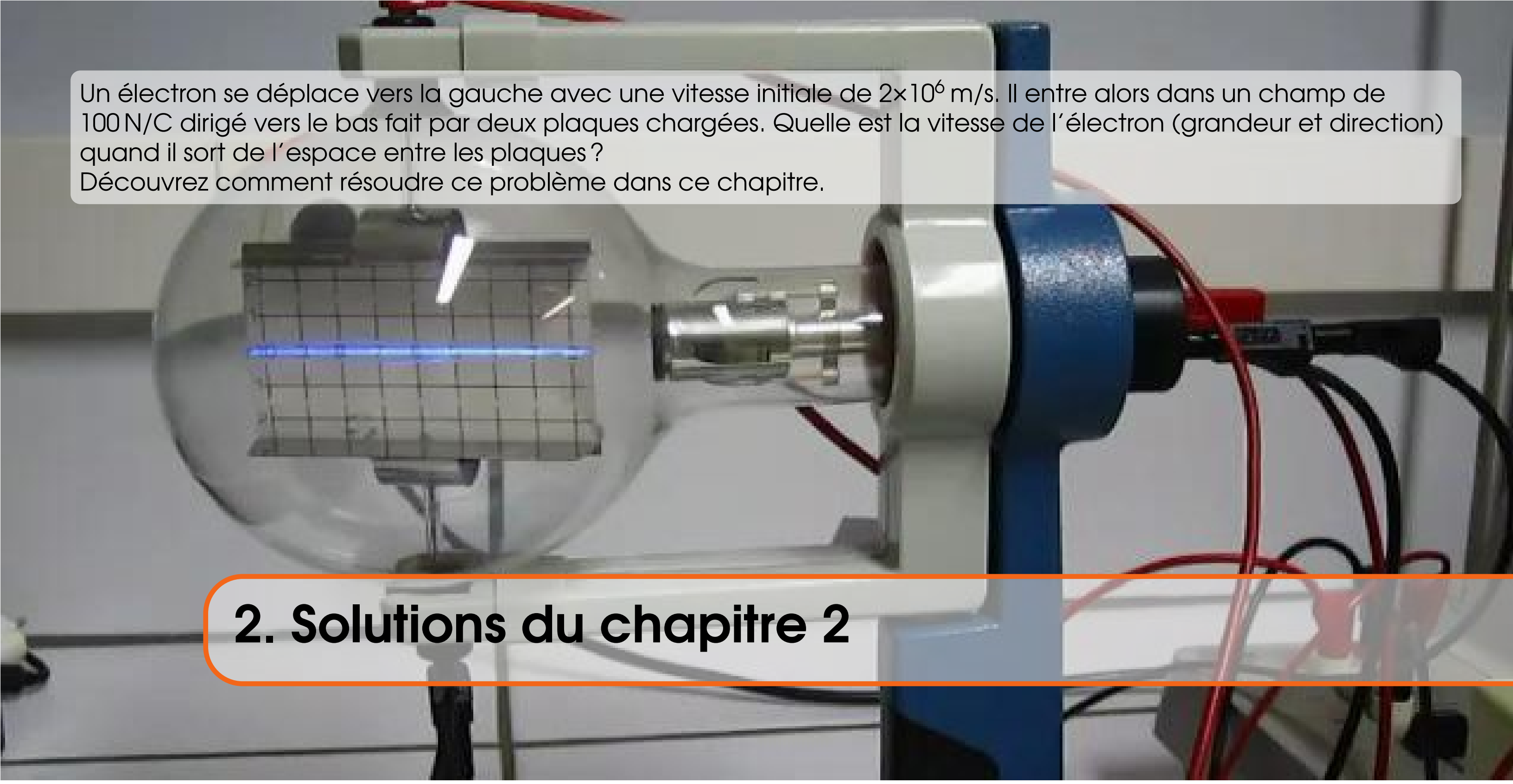
$$(q_1q_2)\times\frac{q_1}{q_2} = -5\times 10^{-10}\times(-0{,}625)$$
$$q_1^2 = 3{,}125\times 10^{-10}$$
$$q_1 = 1{,}767\,8\times 10^{-5}\,\mathrm{C} = 17{,}678\,\mu\mathrm{C}$$

De là, on trouve q_2

$$\frac{q_1}{q_2} = -0{,}625$$
$$\frac{17{,}678}{q_2} = -0{,}625$$
$$q_2 = -28{,}284\,\mu\mathrm{C}$$

et q_3

$$q_3 = \frac{-20\times 10^{-10}}{q_2} = \frac{-20\times 10^{-10}}{-2{,}828\,4\times 10^{-5}} = 7{,}071\,1\times 10^{-5}\,\mathrm{C} = 70{,}711\,\mu\mathrm{C}$$



Un électron se déplace vers la gauche avec une vitesse initiale de 2×10^6 m/s. Il entre alors dans un champ de 100 N/C dirigé vers le bas fait par deux plaques chargées. Quelle est la vitesse de l'électron (grandeur et direction) quand il sort de l'espace entre les plaques ?
Découvrez comment résoudre ce problème dans ce chapitre.

2. Solutions du chapitre 2

Exercice 1 : On trouve le champ avec

$$\begin{aligned} F_x &= qE_x \\ 0 &= 10E_x \\ E_x &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} F_y &= qE_y \\ -25 &= 10E_y \\ E_y &= -2{,}5\times10^6\,\mathrm{N/C} \end{aligned}$$

On a donc un champ de $2{,}5\times10^6\,\mathrm{N/C}$ vers le bas.

Exercice 2 : La somme des forces en y nous donne

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ -mg+F_\mathrm{e} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{soit} \qquad \begin{aligned} -1\times10^{-13}\times9{,}8+F_\mathrm{e} &= 0 \\ F_\mathrm{e} &= 9{,}8\times10^{-13}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} F_y &= qE_y \\ 9{,}8\times10^{-13} &= -2e\cdot E_y \end{aligned} \qquad \text{soit} \qquad \begin{aligned} 9{,}8\times10^{-13} &= -2\times1{,}602\times10^{-19}\cdot E_y \\ E_y &= -3{,}059\times10^6\,\mathrm{N/C} \end{aligned}$$

On a donc un champ de $3{,}059\times10^6\,\mathrm{N/C}$ vers le bas.

Exercice 3 : La charge de 2 µC et celle de 5 µC font respectivement un champ de :

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{kQ_2}{r^2} = \frac{9\times10^9\times2\times10^{-6}}{(4)^2} \\ &= 1\,125\,\mathrm{N/C}\text{ vers la droite} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} E_5 &= \frac{kQ_5}{r^2} = \frac{9\times10^9\times5\times10^{-6}}{(6)^2} \\ &= 1\,250\,\mathrm{N/C}\text{ vers la gauche} \end{aligned}$$

Le champ net est donc

$$E_x = E_{2x}+E_{5x} = 1\,125-1\,250 = -125\,\mathrm{N/C}$$

On a donc un champ de 125 N/C vers la gauche.

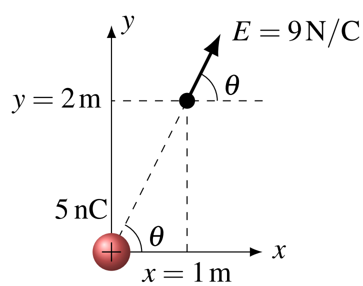
Exercice 4 : À cet endroit, on est à

$$r = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5}\,\mathrm{m}$$

de la charge.
La grandeur de la charge est donc

$$E = \frac{kQ}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-9}}{(\sqrt{5})^2} = 9\,\mathrm{N/C}$$

On a donc la situation suivante



On trouve l'angle avec

$$\tan\theta = \frac{2}{1} \qquad \longrightarrow \qquad \theta = 63{,}43^\circ$$

Les composantes sont donc

$$E_x = 9\cos(63{,}43^\circ) = 4{,}025\,\mathrm{N/C} \qquad E_y = 9\sin(63{,}43^\circ) = 8{,}050\,\mathrm{N/C}$$

Exercice 5 : La charge de 10 nC fait un champ de

$$E_1 = \frac{kQ}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 10 \times 10^{-9}}{(0{,}03)^2} = 100\,000\,\mathrm{N/C} \text{ vers le bas.}$$

La charge de -5 nC fait un champ de

$$E_2 = \frac{kQ}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-9}}{(0{,}05)^2} = 18\,000\,\mathrm{N/C} \text{ vers la droite.}$$

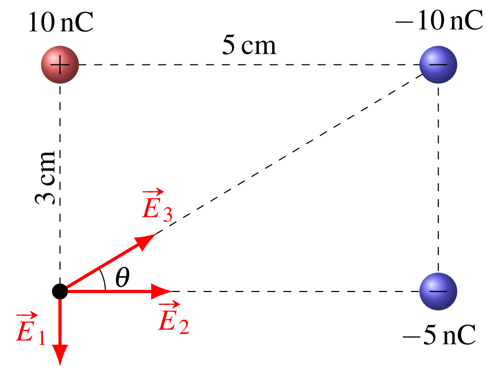
Pour la charge de -10 nC, la distance de la charge est

$$r = \sqrt{(0{,}03)^2 + (0{,}05)^2} = \sqrt{0{,}003\,4}\,\mathrm{m}$$

La grandeur du champ est donc

$$E_3 = \frac{kQ}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 10 \times 10^{-9}}{\left(\sqrt{0{,}003\,4}\right)^2} = 26\,471\,\mathrm{N/C}$$

On a donc la situation suivante.



Pour séparer en composantes, il faut connaitre l'angle θ. Cet angle est

$$\tan\theta = \frac{3}{5} \qquad \longrightarrow \qquad \theta = 30{,}96^\circ$$

Les composantes des champs sont donc

$$\begin{aligned} E_{1x} &= 0\,\text{N/C} & E_{2x} &= 18\,000\,\text{N/C} & E_{3x} &= 26\,471\cos(30{,}96^\circ) = 22\,698\,\text{N/C} \\ E_{1y} &= -100\,000\,\text{N/C} & E_{2y} &= 0\,\text{N/C} & E_{3y} &= 26\,471\sin(30{,}96^\circ) = 13\,619\,\text{N/C} \end{aligned}$$

Les composantes du champ résultant sont donc

$$\begin{aligned} E_x &= 0 + 18\,000 + 22\,698 & E_y &= -100\,000 + 0 + 13\,619 \\ &= 40\,698\,\text{N/C} & &= -86\,381\,\text{N/C} \end{aligned}$$

La grandeur du champ est alors

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{(40\,698)^2 + (-86\,381)^2} = 95\,488\,\text{N/C}$$

alors que la direction du champ est

$$\tan\theta = \frac{-86\,381}{40\,698} \qquad \longrightarrow \qquad \theta = -64{,}8^\circ$$

Exercice 6 : La charge de -4 nC fait un champ de

$$E_- = \frac{kQ}{r^2} = \frac{9\times10^9 \times 4\times10^{-9}}{(0{,}06)^2} = 10\,000\,\text{N/C vers la gauche.}$$

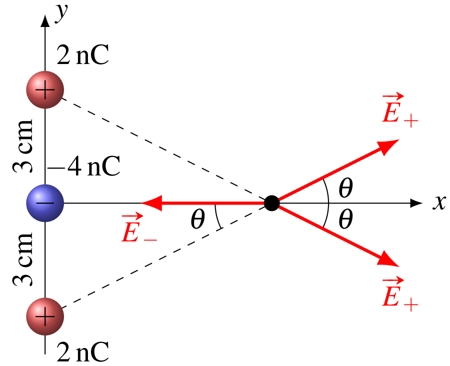
Pour les charges de 2 nC, la distance de la charge est

$$r = \sqrt{(0{,}03)^2 + (0{,}06)^2} = \sqrt{0{,}004\,5}\,\text{m}$$

Les charges de 2 nC font un champ de

$$E_+ = \frac{kQ}{r^2} = \frac{9\times10^9 \times 2\times10^{-9}}{(\sqrt{0{,}004\,5})^2} = 4\,000\,\text{N/C}$$

On a donc la situation suivante



Pour séparer en composantes, il faut connaitre l'angle θ. Cet angle est

$$\tan\theta = \frac{3}{6} \qquad \longrightarrow \qquad \theta = 26{,}57^\circ$$

Les composantes des champs sont donc (le champ 1 est le champ fait par la charge négative, le champ 2 est le champ fait par la charge positive la plus basse et le champ 3 est le champ fait par la charge positive la plus haute)

$$E_{1x} = -10\,000\,\mathrm{N/C}$$
$$E_{1y} = 0\,\mathrm{N/C}$$

$$E_{2x} = 4\,000\cos(26{,}57^\circ) = 3\,578\,\mathrm{N/C}$$
$$E_{2y} = 4\,000\sin(26{,}57^\circ) = 1\,789\,\mathrm{N/C}$$

$$E_{3x} = 4\,000\cos(-26{,}57^\circ) = 3\,578\,\mathrm{N/C}$$
$$E_{3y} = 4\,000\sin(-26{,}57^\circ) = -1\,789\,\mathrm{N/C}$$

Les composantes du champ résultant sont donc

$$E_x = -10\,000 + 3\,578 + 3\,578 = -2\,845\,\mathrm{N/C}$$
$$E_y = 0 + 1\,789 + (-1\,789) = 0\,\mathrm{N/C}$$

Le champ est donc de 2 845 N/C vers la gauche.

Exercice 7 : Le champ est

$$E = \frac{k\,|Q|}{r(r+L)} = \frac{9\times 10^9 \times \left|12\times 10^{-6}\right|}{0{,}06\times(0{,}06+0{,}04)} = 1{,}8\times 10^7\,\mathrm{N/C}$$

Comme la tige est positive, le champ est dans la direction opposée à la tige. On a donc un champ de $1{,}8\times 10^7$ N/C vers la droite.

Exercice 8 : On trouve le champ avec

$$E = \frac{k\,|\lambda|\,L}{r(r+L)}$$

En faisant tendre la valeur de L vers l'infini et en faisant ensuite la règle de l'Hospital, on obtient

$$E = \lim_{L\to\infty} \frac{k\,|\lambda|\,L}{r(r+L)} = \frac{k\,|\lambda|}{r}$$

La grandeur du champ est donc

$$E = \frac{k|\lambda|}{r} = \frac{9\times 10^9 \times \left|2\times 10^6\right|}{0{,}08} = 225\,000\,\mathrm{N/C}$$

Comme la tige est positive, le champ est dans la direction opposée à la tige. On a donc un champ de 225 000 N/C vers la droite.

Exercice 9 : Le champ est

$$E = \frac{2k|\lambda|L}{r\sqrt{L^2+4r^2}} = \frac{2\times 9\times 10^9 \times \left|4\times 10^{-6}\right| \times 0{,}12}{0{,}05\sqrt{(0{,}12)^2+4\times(0{,}05)^2}} = 1{,}106\times 10^6\,\mathrm{N/C}$$

Comme la tige est positive, le champ est dans la direction opposée à la tige. On a donc un champ de $1{,}106\times 10^6$ N/C vers le haut.

Exercice 10 : Le champ est

$$E = \frac{2k|\lambda|}{r} = \frac{2\times 9\times 10^9 \times \left|8\times 10^{-6}\right|}{0{,}2} = 720\,000\,\mathrm{N/C}$$

Comme la tige est négative, le champ est vers la tige. On a donc un champ de 720 000 N/C vers le bas.

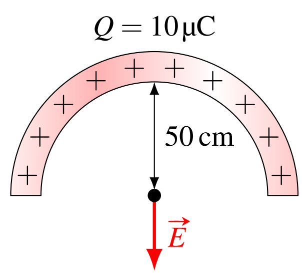
Exercice 11 : Dans cette situation, on a $a = 0{,}5\,\mathrm{m}$ et $\beta = \pi$. Il ne reste qu'à trouver la charge linéique de la tige. Comme la longueur de la tige est égale à la moitié de la circonférence du cercle, on a

$$\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{10\times 10^{-6}}{\frac{1}{2}2\pi(0{,}5)} = 6{,}366\times 10^{-6}\,\mathrm{C/m}$$

Le champ est donc

$$E = \frac{2k|\lambda|}{a}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{2\times 9\times 10^9\times 6{,}366\times 10^{-6}}{0{,}5}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2{,}291\times 10^5\,\mathrm{N/C}$$

Le champ est dans la direction opposée au milieu de la tige puisque la tige a une charge positive.



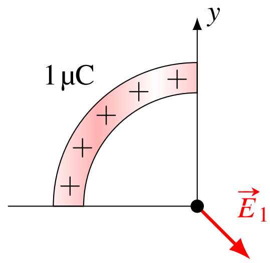
Exercice 12 : Ici, on devra faire chacun des arcs à la fois, puis additionner le champ de chaque arc. Commençons avec l'arc de charge positive. Dans cette situation, on a $a = 0{,}1\,\mathrm{m}$ et $\beta = \pi/2$. Il ne reste qu'à trouver la charge linéique de la tige. Comme la longueur de la tige est égale au quart de la circonférence du cercle, on a

$$\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{10\times 10^{-6}}{\frac{1}{4}2\pi(0{,}15)} = 4{,}244\times 10^{-6}\,\mathrm{C/m}$$

Le champ est donc

$$E_1 = \frac{2k|\lambda|}{a}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{2\times 9\times 10^9\times 4{,}244\times 10^{-6}}{0{,}15}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3{,}601\,3\times 10^5\,\mathrm{N/C}$$

Le champ est dans la direction opposée au milieu de la tige puisque la tige a une charge positive.



Les composantes de ce champ sont

$$E_{1x} = 3{,}601\,3 \times 10^5 \cos(-45°) = 2{,}546\,5 \times 10^5\,\text{N/C}$$
$$E_{1y} = 3{,}601\,3 \times 10^5 \sin(-45°) = -2{,}546\,5 \times 10^5\,\text{N/C}$$

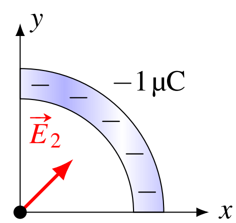
Continuons avec l'arc de charge négative. Dans cette situation, on a encore $a = 0{,}15\,\text{m}$ et $\theta = \pi/2$. Comme la longueur de la tige est égale au quart de la circonférence du cercle, on a

$$\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{-1 \times 10^{-6}}{\frac{1}{4}2\pi(0{,}15)} = -4{,}244 \times 10^{-6}\,\text{N/m}$$

Le champ est donc

$$E_2 = \frac{2k|\lambda|}{a}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{2 \times 9 \times 10^9 \times \left|-4{,}244 \times 10^{-6}\right|}{0{,}15}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3{,}601\,3 \times 10^5\,\text{N/C}$$

Le champ est vers le milieu de la tige puisque la tige a une charge négative.



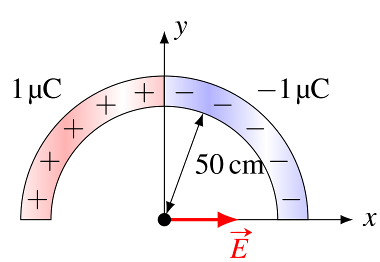
Les composantes de ce champ sont

$$E_{2x} = 3{,}601\,3 \times 10^5 \cos(45°) = 2{,}546\,5 \times 10^5\,\text{N/C}$$
$$E_{2y} = 3{,}601\,3 \times 10^5 \sin(45°) = 2{,}546\,5 \times 10^5\,\text{N/C}$$

Le champ total est donc

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = 2{,}546\,5 \times 10^5 + 2{,}546\,5 \times 10^5 = 5{,}093 \times 10^5\,\text{N/C}$$
$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = -2{,}546\,5 \times 10^5 + 2{,}546\,5 \times 10^5 = 0\,\text{N/C}$$

On a donc un champ dans la direction suivante.



Exercice 13 : Le champ est

$$E = \frac{k|Q|}{r^2} = \frac{9\times 10^9 \times \left|25\times 10^{-6}\right|}{(0{,}5)^2} = 900\,000\,\mathrm{N/C}$$

Comme la sphère est positive, le champ est dans la direction opposée à la direction du centre de la sphère.

Exercice 14 : La charge de la sphère non-trouée est

$$Q = \rho \cdot \text{volume} = 10\times 10^{-6} \times \frac{4}{3}\pi(0{,}06)^3 = 9{,}048\times 10^{-9}\,\mathrm{C}$$

Le champ fait par la sphère non-trouée est donc

$$E = \frac{k|Q|}{r^2} = \frac{9\times 10^9 \times \left|9{,}048\times 10^{-9}\right|}{(0{,}14)^2} = 4\,155\,\mathrm{N/C}$$

La charge de la sphère qui boucherait le trou est

$$Q = \rho \cdot \text{volume} = 10\times 10^{-6} \times \frac{4}{3}\pi(0{,}01)^3 = 4{,}189\times 10^{-11}\,\mathrm{C}$$

Le champ fait par la sphère qui boucherait le trou est donc

$$E = \frac{k|Q|}{r^2} = \frac{9\times 10^9 \times \left|4{,}189\times 10^{-11}\right|}{(0{,}11)^2} = 31\,\mathrm{N/C}$$

Le champ est donc $4\,155 - 31 = 4\,124\,\mathrm{N/C}$.

Exercice 15 : Le champ est

$$E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0} = \frac{\left|1\times 10^{-6}\right|}{2\times 8{,}854\times 10^{-12}} = 56\,470\,\mathrm{N/C}$$

Comme la plaque est positive, le champ est dans la direction opposée à la plaque. On a donc un champ de $56\,470\,\mathrm{N/C}$ vers le haut.

Exercice 16 : La densité de charge des plaques est

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{10\times 10^{-6}}{0{,}002} = 5\times 10^{-3}\,\mathrm{C/m^2}$$

Le champ est donc

$$E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0} = \frac{5\times 10^{-3}}{8{,}854\times 10^{-12}} = 5{,}647\times 10^{8}\,\mathrm{N/C}$$

Le champ va de la plaque positive vers la plaque négative, donc la gauche.

Exercice 17 : On va trouver le champ fait par chacune des plaques.

- Plaque 1 : celle de gauche

  La densité est

  $$\sigma_1 = \frac{Q_1}{A} = \frac{10\times 10^{-6}}{0{,}002} = 5\times 10^{-3}\,\mathrm{C/m^2}$$

  Le champ est donc

  $$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} = \frac{5\times 10^{-3}}{2\times 8{,}854\times 10^{-12}} = 2{,}824\times 10^{8}\,\mathrm{N/C}$$

À droite de cette plaque, le champ est vers la droite (il est dans la direction opposée à la plaque 1 qui est positive). On a donc

$$E_{1x} = 2{,}824 \times 10^8\,\mathrm{N/C}$$

- Plaque 2 : celle du milieu

La densité est

$$\sigma_2 = \frac{Q_2}{A} = \frac{20 \times 10^{-6}}{0{,}002} = 1 \times 10^{-2}\,\mathrm{C/m^2}$$

Le champ est donc

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} = \frac{1 \times 10^{-2}}{2 \times 8{,}854 \times 10^{-12}} = 5{,}647 \times 10^8\,\mathrm{N/C}$$

À droite de cette plaque, le champ est vers la gauche (il est vers la plaque 2 qui est négative). On a donc

$$E_{2x} = -5{,}647 \times 10^8\,\mathrm{N/C}$$

- Plaque 3 : celle de droite

$$\sigma_3 = \frac{Q_3}{A} = \frac{30 \times 10^{-6}}{0{,}002} = 1{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{C/m^2}$$

Le champ est donc

$$E_3 = \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = \frac{1{,}5 \times 10^{-2}}{2 \times 8{,}854 \times 10^{-12}} = 8{,}471 \times 10^8\,\mathrm{N/C}$$

À gauche de cette plaque, le champ est vers la gauche (il est dans la direction opposée à la plaque 3 qui est positive.). On a donc

$$E_{3x} = -8{,}471 \times 10^8\,\mathrm{N/C}$$

Le champ total est donc

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} + E_{3x} = 2{,}824 \times 10^8 - 5{,}647 \times 10^8 - 8{,}471 \times 10^8 = -11{,}294 \times 10^8\,\mathrm{N/C}$$

Le champ est donc de $1{,}129 \times 10^9$ N/C vers la gauche.

Exercice 18 : La force sur la charge est

$$F_x = qE_x = -100 \times 10^{-6} \times (-200\,000) = 20\,\mathrm{N}$$

L'accélération est donc

$$F_x = ma_x \qquad \Longrightarrow \qquad 20 = 0{,}01 \times a_x \qquad \Longrightarrow \qquad a_x = 2\,000\,\mathrm{m/s^2}$$

La vitesse sera donc de

$$v_x = v_{0x} + a_x t = 300 + 2\,000 \times 2 = 4\,300\,\mathrm{m/s}$$

Exercice 19 : La force sur la charge est

$$F_x = qE_x = 30 \times 10^{-6} \times (-200\,000) = -6\,\mathrm{N}$$

L'accélération est donc

$$F_x = ma_x \qquad \Longrightarrow \qquad -6 = 0{,}01 \cdot a_x \qquad \Longrightarrow \qquad a_x = -600\,\mathrm{m/s^2}$$

On trouve finalement la distance d'arrêt avec

$$2a_x(x - x_0) = v_x^2 - v_{0x}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad 2 \times (-600)(x - 0) = (0)^2 - (300)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 75\,\mathrm{m}$$

Exercice 20 : L'accélération du proton se trouve avec

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \Longrightarrow \quad 2{,}5 = 0 + 0 \times t + \frac{1}{2}a_x(0{,}002)^2 \quad \Longrightarrow \quad a_x = 1\,250\,000\,\mathrm{m/s^2}$$

La force est donc

$$F_x = ma_x = 1{,}673 \times 10^{-27} \times 1{,}25 \times 10^6 = 2{,}091 \times 10^{-21}\,\mathrm{N}$$

Ce qui veut dire que le champ est

$$F_x = qE_x \qquad \Longrightarrow \qquad 2{,}091 \times 10^{-21} = 1{,}602 \times 10^{-19} \times E_x \qquad \Longrightarrow \qquad E_x = 0{,}013\,1\,\mathrm{N/C}$$

Exercice 21 : Les forces sur la charge sont :

(a) La force de gravitation (0,019 6 N vers le bas).
(b) La force électrique ($\vec{F}_\mathrm{e}$) vers la droite.
(c) La force de tension ($\vec{T}$) à 120°.

On a donc

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \qquad &\longrightarrow \qquad F_\mathrm{e} + T\cos(120^\circ) = 0 \\ \sum F_y = 0 \qquad &\longrightarrow \qquad -0{,}019\,6 + T\sin(120^\circ) = 0 \end{aligned}$$

Avec la somme des forces en y, on trouve la tension.

$$-0{,}019\,6 + T\sin(120^\circ) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad T = 0{,}022\,63\,\mathrm{N}$$

On utilise ensuite cette valeur pour trouver la force électrique avec la somme des forces en x.

$$F_\mathrm{e} + T\cos(120^\circ) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad F_\mathrm{e} + 0{,}022\,63\cos(120^\circ) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad F_\mathrm{e} = 0{,}011\,32\,\mathrm{N}$$

Puisque cette force est $F_\mathrm{e} = qE_x$ et qu'on connait la valeur du champ, on peut trouver la force.

$$F_\mathrm{e} = qE_x \qquad \Longrightarrow \qquad 0{,}011\,32 = q \times 200\,000 \qquad \Longrightarrow \qquad q = 5{,}658 \times 10^{-8}\,\mathrm{C} = 56{,}58\,\mathrm{nC}$$

Exercice 22 :

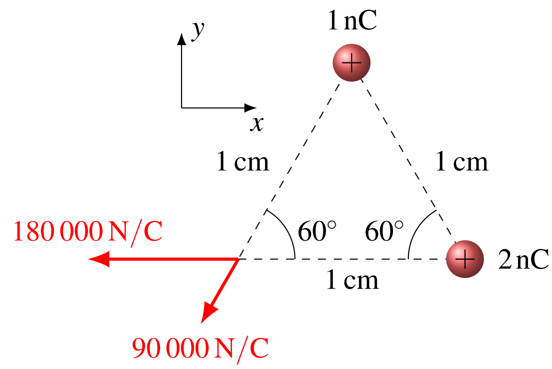
(a) La charge de 1 nC fait un champ de

$$E_1 = \frac{kQ}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 1 \times 10^{-9}}{(0{,}01)^2} = 90\,000\,\mathrm{N/C}$$

La charge de 2 nC fait un champ de

$$E_1 = \frac{kQ}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-9}}{(0{,}01)^2} = 180\,000\,\mathrm{N/C} \text{ vers la gauche.}$$

On a donc les 2 champs suivants.



La composante en x du champ résultant est

$$E_x = E_1 \cos(-120^\circ) - E_2 = 90\,000 \cos(-120^\circ) - 180\,000 = -225\,000\,\mathrm{N/C}$$

La composante en y du champ résultant est

$$E_y = E_1 \sin(-120^\circ) = 90\,000 \sin(-120^\circ) = -77\,942\,\mathrm{N/C}$$

La grandeur du champ est alors

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{(-225\,000)^2 + (-77\,942)^2} = 238\,118\,\mathrm{N/C}$$

alors que la direction du champ est

$$\tan\theta = \frac{-77\,942}{-225\,000} \qquad \longrightarrow \qquad \theta = 199{,}1^\circ$$

(b) La force est

$$F = qE = -3\times 10^{-9} \times 238\,118 = -7{,}144\times 10^{-4}\,\mathrm{N}$$

Cela veut dire que la force a une grandeur de $7{,}144\times 10^{-4}$ N dans la direction opposée au champ, donc à 19,1°.

Exercice 23 : Le champ fait par la tige infinie est

$$E = \frac{2k|\lambda|}{r} = \frac{2\times 9\times 10^9 \times \left|8\times 10^{-6}\right|}{0{,}2} = 720\,000\,\mathrm{N/C}$$

Ce champ est vers la tige, donc vers la gauche.
Le champ fait par la sphère est

$$E = \frac{k|Q|}{r^2} = \frac{9\times 10^9 \times \left|20\times 10^{-6}\right|}{(0{,}4)^2} = 1\,125\,000\,\mathrm{N/C}$$

Ce champ est dans la direction opposée au centre de la sphère, donc vers la gauche.
La composante en x du champ résultant est

$$E_x = -E_1 - E_2 = -720\,000 - 1\,125\,000 = -1\,845\,000\,\mathrm{N/C}$$

La force sur la charge est donc

$$F_x = qE_x = -5\times 10^{-6} \times (-1\,845\,000) = 9{,}225\,\mathrm{N}$$

Finalement, l'accélération est

$$F_x = ma_x \qquad \Longrightarrow \qquad 9{,}225 = 0{,}1\cdot a_x \qquad \Longrightarrow \qquad a_x = 92{,}25\,\mathrm{m/s^2}$$

L'accélération est donc de $92{,}25\,\mathrm{m/s^2}$ vers la droite.

Exercice 24 :

(a) Le champ fait par la plaque est

$$E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0} = \frac{\left|20 \times 10^{-6}\right|}{2 \times 8{,}854 \times 10^{-12}} = 1\,129\,509\,\mathrm{N/C}$$

Ce champ est vers la plaque puisqu'elle a une charge négative. La force sur la charge est donc

$$F = qE = 60 \times 10^{-6} \times |-1\,129\,409| = 67{,}76\,\mathrm{N}$$

Cette force est dans la même direction que le champ, donc vers la plaque négative. L'accélération de la charge est

$$a = \frac{F}{m} = \frac{67{,}76}{0{,}2} = 338{,}8\,\mathrm{m/s^2}$$

On trouve alors le temps pour arriver à la plaque avec (on utilise un axe dirigé vers la plaque avec une origine à l'endroit où est située la charge initialement)

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad \Longrightarrow \quad 0{,}5 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \times 338{,}8 t^2 \quad \Longrightarrow \quad t = 0{,}054\,3\,\mathrm{s}$$

(b) La vitesse de la charge est

$$v = v_0 + at = 0 + 338{,}8 \times 0{,}054\,3 = 18{,}41\,\mathrm{m/s}$$

(c) Puisque la force sur la charge est de 67,76 N vers la plaque, la force sur la plaque est, en vertu de la troisième loi de Newton, de 67,76 N vers la charge de 60 µC.

Exercice 25 : On peut utiliser l'équation

$$2a_y(y - y_0) = v_y^2 - v_{0y}^2$$

Puisque la charge passe de $y = 0$ à $y = -8\,\mathrm{cm}$, on a

$$\begin{aligned}
2a_y(y - y_0) &= v_y^2 - v_{0y}^2 \\
2a_y(-0{,}08 - y_0) &= 0 - (2 \times 10^7 \times \sin(-45°))^2 \\
2a_y(-0{,}08 - y_0) &= 0 - 2 \times 10^{14} \\
a_y &= \frac{2 \times 10^{14}}{2 \times 0{,}08} = 1{,}25 \times 10^{15}\,\mathrm{m/s^2}
\end{aligned}$$

La force sur l'électron est donc

$$F_y = ma_y = 9{,}11 \times 10^{-31} \times 1{,}25 \times 10^{15} = 1{,}138\,75 \times 10^{-15}\,\mathrm{N}$$

Le champ électrique est donc

$$F_y = qE_y \quad \Longrightarrow \quad 1{,}138\,75 \times 10^{-15} = -1{,}602 \times 10^{-19} \cdot E_y \quad \Longrightarrow \quad E_y = -7\,108{,}3\,\mathrm{N/C}$$

La densité de charge des plaques est donc

$$E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad 7\,108{,}3 = \frac{|\sigma|}{8{,}854 \times 10^{-12}} \quad \Longrightarrow \quad \sigma = 6{,}293\,8 \times 10^{-8}\,\mathrm{C/m^2}$$

Avec une aire de $400\,\mathrm{cm^2}$, la charge des plaques est

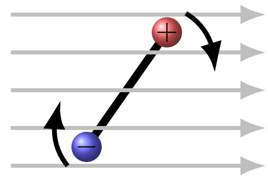
$$Q = \sigma A = 6{,}293\,8 \times 10^{-8} \times 0{,}04 = 2{,}518 \times 10^{-9}\,\mathrm{C} = 2{,}518\,\mathrm{nC}$$

La plaque positive a donc une charge de 2,518 nC et la plaque négative a une charge de −2,518 nC.

Exercice 26 : Le moment de force est

$$\tau = pE\sin\theta = 0{,}002 \times 3\,000\sin(55^\circ) = 4{,}915\,\mathrm{N\,m}$$

Le moment de force veut aligner le dipôle avec le champ pour que la charge positive soit du côté où se dirigent les lignes de champ. Le dipôle cherche donc à tourner dans le sens suivant.



Exercice 27 : Le moment dipolaire de ce dipôle est

$$p = qL = 2 \times 10^{-6} \times 0{,}05 = 1 \times 10^{-7}\,\mathrm{C\,m}$$

L'énergie potentielle initiale est

$$U_\mathrm{i} = -pE\cos\theta = -1 \times 10^{-7} \times 300\,000\cos(0^\circ) = -0{,}03\,\mathrm{J}$$

L'énergie finale est

$$U_\mathrm{f} = -pE\cos\theta = -1 \times 10^{-7} \times 300\,000\cos(180^\circ) = 0{,}03\,\mathrm{J}$$

On doit donc fournir l'énergie suivante.

$$W_\mathrm{ext} = \Delta E_k + \Delta U = 0 + (0{,}03 - (-0{,}03)) = 0{,}06\,\mathrm{J}$$

Exercice 28 : Les charges s'accumulent uniquement sur les faces qui sont dans la direction du champ électrique. Il n'y a donc que des charges qui s'accumulent sur la surface 2 et la surface opposée à la surface 2. On a donc

$$Q = 0 \text{ pour les surfaces 1 et 3}$$

Pour la surface 2, on a

$$\sigma = \varepsilon_0 \cdot E = 8{,}854 \times 10^{-12} \times 50\,000 = 4{,}427 \times 10^{-7}\,\mathrm{C/m^2}$$

En multipliant par l'aire de la surface, on obtient la charge.

$$Q = \sigma A = 4{,}427 \times 10^{-7} \times (0{,}2)^2 = 1{,}771 \times 10^{-8}\,\mathrm{C} = 17{,}71\,\mathrm{nC}$$

Comme les lignes de champ commencent sur la surface 2, la charge doit être positive. Il y a donc 17,71 nC sur la surface 2.

Exercice 29 : La charge sur la surface interne est

$$Q_\text{surface interne} = -Q_\text{dans cavité} = -2\,\mu\mathrm{C}$$

La charge sur la surface externe est

$$Q_\text{surface externe} = Q_\text{du conducteur} - Q_\text{surface interne} = 0 - (-2) = 2\,\mu\mathrm{C}$$

Exercice 30 : La charge sur la surface interne est

$$Q_{\text{surface interne}} = -Q_{\text{dans cavité}} = -4\,\mu\text{C}$$

La charge sur la surface externe est

$$Q_{\text{surface externe}} = Q_{\text{du conducteur}} - Q_{\text{surface interne}} = -2-(-4) = 2\,\mu\text{C}$$

Exercice 31 : Dans l'air, le champ serait

$$E_0 = \frac{2k\,|Q|}{r\sqrt{L^2+4r^2}} = \frac{2\times 9\times 10^9\times \left|10\times 10^{-6}\right|}{0{,}5\cdot\sqrt{(0{,}2)^2+4\times(0{,}5)^2}} = 3{,}53\times 10^5\,\text{N/C}$$

Comme la permittivité relative de l'eau est 78,5, le champ est

$$E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{3{,}53\times 10^5}{78{,}5} = 4\,496\,\text{N/C}$$

Exercice 32 : Pour le polystyrène, le champ maximal est $24\times 10^6\,\text{N/C}$. Comme la permittivité relative est de 2,5, le champ dans le vide qui correspond à ce champ est

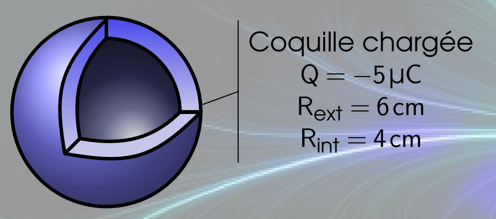
$$E = \frac{E_0}{\kappa} \qquad \Longrightarrow \qquad 24\times 10^6 = \frac{E_0}{2{,}5} \qquad \Longrightarrow \qquad E_0 = 60\times 10^6\,\text{N/C}$$

La charge maximale de la sphère est donc

$$E_{0\,\text{max}} = \frac{k\,|Q_{\text{max}}|}{r^2} \qquad \Longrightarrow \qquad 60\times 10^6 = \frac{9\times 10^9\cdot|Q_{\text{max}}|}{(0{,}3)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad |Q_{\text{max}}| = 600\,\mu\text{C}$$

Cette page est intentionnellement laissée en blanc.

Une sphère vide a un rayon externe de 6 cm, un rayon interne de 4 cm et une charge de −5 µC. La charge est répartie uniformément dans la matière composant la sphère. Quel est le champ électrique à 5 cm du centre de la sphère (grandeur et direction) ?
Découvrez comment résoudre ce problème dans ce chapitre.



3. Solutions du chapitre 3

Exercice 1 :

(a) Sur la surface 1, le flux est

$$\phi = EA\cos\theta = 2\,000 \times (0{,}2 \times 0{,}2)\cos(180^\circ) = -80\,\mathrm{N\,m^2/C}$$

(b) Sur la surface 2, le flux est

$$\phi = EA\cos\theta = 2\,000 \times (0{,}2 \times 0{,}2)\cos(0^\circ) = 80\,\mathrm{N\,m^2/C}$$

(c) Sur la surface 3, le flux est

$$\phi = EA\cos\theta = 2\,000 \times (0{,}2 \times 0{,}2)\cos(90^\circ) = 0\,\mathrm{N\,m^2/C}$$

Exercice 2 : Si la surface est dans le plan xy, alors le vecteur $\vec{A}$ est dans la direction de l'axe des z puisqu'il doit être perpendiculaire au plan. Le vecteur surface est donc

$$\vec{A} = 10\,\mathrm{m^2}\,\vec{k}$$

Le flux est donc

$$\phi = \vec{E}\cdot\vec{A} = (1\,000\,\vec{i} + 2\,000\,\vec{j} - 3\,000\,\vec{k})\cdot(10\,\vec{k})$$
$$\phi = 1\,000 \times 0 + 2\,000 \times 0 - 3\,000 \times 10 = -30\,000\,\mathrm{N\,m^2/C}$$

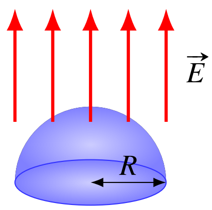
(Ici, on a mis le vecteur $\vec{A}$ vers les z positifs. Si on avait mis ce vecteur vers les z négatifs, la réponse aurait été de $30\,000\,\mathrm{N\,m^2/C}$. Ces deux réponses sont bonnes.)

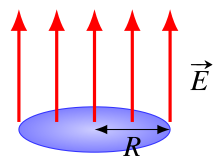
Exercice 3 : Le flux est

$$\phi = EA\cos\theta = 200 \times (0{,}1 \times 0{,}1) \times \cos(60^\circ) = 1\,\mathrm{N\,m^2/C}$$

(Ici, on a mis le vecteur $\vec{A}$ vers le haut. Si on avait mis ce vecteur vers le bas, l'angle aurait été de 120° et la réponse aurait été de $-1\,\mathrm{N\,m^2/C}$. Ces deux réponses sont bonnes.)

Exercice 4 : Il serait assez difficile de trouver le flux qui traverse l'hémisphère parce que l'angle entre le champ et la surface change constamment. Il faudrait ainsi faire une intégrale pour y arriver. Toutefois, on peut simplifier le calcul si on se rappelle qu'en calculant le flux on compte le nombre de lignes de champ qui traversent la surface. Le nombre de lignes de champ est le même que le nombre qui traverse un cercle ayant le même rayon que l'hémisphère.





Le flux à travers ce cercle est

$$\phi = EA\cos\theta = 2\,000 \times \left(\pi \times (0{,}2)^2\right) \times \cos(0°) = 251{,}3\,\mathrm{N\,m^2/C}$$

(Ici, on a mis le vecteur $\vec{A}$ vers le haut. Si on avait mis ce vecteur vers le bas, l'angle aurait été de 180° et la réponse aurait été de $-251{,}3\,\mathrm{N\,m^2/C}$. Ces deux réponses sont bonnes.)

Exercice 5 : Nous allons calculer le flux avec

$$\phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Comme il n'y a que la charge de 2 µC à l'intérieur de la surface, on a

$$\phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{2 \times 10^{-6}}{8{,}854 \times 10^{-12}} = 225\,882\,\mathrm{N\,m^2/C}$$

Exercice 6 : Le flux total à travers le cube est

$$\phi = 3\,000 - 1\,000 + 500 - 2\,500 + 1\,500 + 800 = 2\,300\,\mathrm{N\,m^2/C}$$

On trouve ensuite la charge nette à l'intérieur avec

$$\phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad 2\,300 = \frac{Q_{\text{int}}}{8{,}854 \times 10^{-12}} \quad \longrightarrow \quad Q_{\text{int}} = 2{,}036 \times 10^{-8}\,\mathrm{C} = 20{,}36\,\mathrm{nC}$$

Exercice 7 : La charge à l'intérieur de la surface correspond à la charge de la partie de la tige qui est à l'intérieur de la surface. Cette charge est

$$Q_{\text{int}} = \lambda L = 20 \times 0{,}5 = 10\,\mu\mathrm{C}$$

Le flux est donc

$$\phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{10 \times 10^{-6}}{8{,}854 \times 10^{-12}} = 1{,}129 \times 10^{6}\,\mathrm{N\,m^2/C}$$

Exercice 8 : Pour trouver le champ, on fait une surface cylindrique autour du fil. Cette surface a un rayon de 30 cm et une longueur h. On a alors

$$E(2\pi r h) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la charge de la partie de la tige qui est à l'intérieur de la surface. Cette charge est

$$Q_{\text{int}} = \lambda h = 50h$$

On a donc

$$E(2\pi rh) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad \text{soit} \qquad E(2\pi \times 0{,}3) = \frac{50}{8{,}854 \times 10^{-12}}$$

$$E \cdot (2\pi \cdot 0{,}3 \cdot h) = \frac{50h}{8{,}854 \times 10^{-12}} \qquad E = 2{,}996 \times 10^{6}\,\text{N/C}$$

Comme la réponse est positive, le champ est dans la direction opposée au centre de la tige.

Exercice 9 :

(a) On va faire une surface sphérique autour de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 40 cm. On a alors

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la charge de la charge centrale et de la coquille sphérique. La charge totale est donc de $-10\,\mu\text{C} + 5\,\mu\text{C} = -5\,\mu\text{C}$. On a donc

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E \cdot (4\pi \cdot (0{,}4)^2) = \frac{-5 \times 10^{-6}}{8{,}854 \times 10^{-12}} \quad \longrightarrow \quad E = -2{,}809 \times 10^{5}\,\text{N/C}$$

Comme la réponse est négative, on a un champ de $2{,}809 \times 10^{5}$ N/C vers le centre de la sphère.

(b) À 22 cm du centre, on est dans le conducteur. Le champ est donc nul.

(c) On va faire une surface sphérique autour de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 5 cm. On a alors

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Maintenant, il n'y a que la charge centrale qui est à l'intérieur de la surface de Gauss. On a donc

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E \cdot (4\pi \cdot (0{,}05)^2) = \frac{-10 \times 10^{-6}}{8{,}854 \times 10^{-12}} \quad E = -3{,}595 \times 10^{7}\,\text{N/C}$$

Comme la réponse est négative, on a un champ de $3{,}595 \times 10^{7}$ N/C vers le centre de la sphère.

Exercice 10 :

(a) On va faire une surface sphérique autour de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 30 cm. On a alors

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la charge de la sphère au complet. On trouve cette charge avec

$$Q_{\text{int}} = \rho \cdot (\text{vol})$$

N'oublions pas ici que le volume correspond au volume d'une sphère vide. Il faut donc enlever le volume de la cavité au volume de la sphère.

$$Q_{\text{int}} = \rho(\text{vol}) = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R_{\text{ext}}^3 - \frac{4}{3}\pi R_{\text{int}}^3\right) = 5\times 10^{-3}\cdot\left(\frac{4}{3}\pi(0{,}25)^3 - \frac{4}{3}\pi(0{,}2)^3\right) = 1{,}597\times 10^{-4}\,\text{C}$$

On a donc

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad\longrightarrow\quad E\cdot(4\pi\cdot(0{,}3)) = \frac{1{,}594\times 10^{-4}}{8{,}854\times 10^{-12}} \quad\longrightarrow\quad E = 1{,}595\times 10^{7}\,\text{N/C}$$

Comme la réponse est positive, le champ est dans la direction opposée au centre de la sphère.

(b) On va faire une surface sphérique autour de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 22 cm. On a alors

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la partie de la charge de la sphère qui est à moins de 22 cm du centre. On trouve cette charge avec

$$Q_{\text{int}} = \rho(\text{vol})_{\text{int}}$$

N'oublions pas ici que le volume correspond au volume d'une sphère de 22 cm à laquelle il faut enlever la cavité.

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} = \rho(\text{vol})_{\text{int}} &= \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi R_{\text{int}}^3\right) \\ &= 5\times 10^{-3}\cdot\left(\frac{4}{3}\pi(0{,}22)^3 - \frac{4}{3}\pi(0{,}2)^3\right) = 5{,}546\times 10^{-5}\,\text{C} \end{aligned}$$

On a donc

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad\longrightarrow\quad E\cdot(4\pi\cdot(0{,}22)^2) = \frac{5{,}546\times 10^{-5}}{8{,}854\times 10^{-12}} \quad\longrightarrow\quad E = 1{,}030\times 10^{7}\,\text{N/C}$$

À cet endroit, on est dans le diélectrique. On doit donc diviser cette valeur du champ par la permittivité relative pour obtenir la véritable grandeur du champ. Le champ est donc

$$E = \frac{1{,}030\times 10^{7}}{15} = 6{,}866\times 10^{5}\,\text{N/C}$$

Comme la réponse est positive, le champ est dans la direction opposée au centre de la sphère.

(c) On va faire une surface sphérique autour de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 10 cm. On a alors

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface est nulle puisque la surface de Gauss n'inclut aucune partie de la sphère chargée, elle n'inclut qu'une partie de la cavité.

$$Q_{\text{int}} = 0$$

On a donc

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E \cdot (4\pi \cdot (0{,}1)^2) = \frac{0}{8{,}854 \times 10^{-12}} \quad \longrightarrow \quad E = 0\,\text{N/C}$$

En fait, peu importe la valeur du rayon de la sphère de Gauss, le champ est toujours nul. Il n'y a donc pas de champ partout dans la cavité.

Exercice 11 : On va faire une surface sphérique autour de la sphère qui passe par l'endroit où on connait le champ. Cette surface a donc un rayon de 3 m. On a alors

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la charge de la sphère au complet. On a donc

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad 2\,400 \cdot (4\pi \cdot (3)^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{8{,}854 \times 10^{-12}} \quad \longrightarrow \quad Q_{\text{int}} = 2{,}403 \times 10^{-6}\,\text{C}$$

La densité surfacique de charge de la sphère est donc

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{2{,}403 \times 10^{-6}}{4\pi \times (0{,}6)^2} = 5{,}313 \times 10^{-7}\,\text{C/m}^2$$

Exercice 12 :

(a) On va faire une surface sphérique autour de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 50 cm. On a alors

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la charge de la sphère au complet. On a donc

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E(4\pi \cdot (0{,}5)^2) = \frac{60 \times 10^{-6}}{8{,}854 \times 10^{-12}} \quad \longrightarrow \quad E = 2{,}157 \times 10^{6}\,\text{N/C}$$

Comme la réponse est positive, le champ est dans la direction opposée au centre de la sphère.

(b) On va faire une surface sphérique autour de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 10 cm. On a alors

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface est nulle puisque la sphère est conductrice et que les charges se retrouvent en surface de la sphère. Comme la surface de Gauss est plus petite que la sphère, il n'y a pas de charge à l'intérieur de la surface. On a donc

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E(4\pi \cdot (0{,}1)^2) = \frac{0}{8{,}854 \times 10^{-12}} \quad \longrightarrow \quad E = 0\,\text{N/C}$$

On aurait pu aussi simplement dire que $E = 0$ puisqu'on est dans un conducteur.

Exercice 13 :

(a) On va faire une surface sphérique autour de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 50 cm. On a alors

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la charge de la sphère au complet. On a donc

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E(4\pi \cdot (0{,}5)^2) = \frac{-40 \times 10^{-6}}{8{,}854 \times 10^{-12}} \quad \longrightarrow \quad E = -1{,}438 \times 10^6\,\text{N/C}$$

Comme la réponse est négative, le champ est de $1{,}438 \times 10^6$ N/C vers le centre de la sphère.

(b) On va faire une surface sphérique autour de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 12 cm. On a alors

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur correspond à la charge de la partie de la sphère à l'intérieur de la surface. Il faut donc trouver la charge de la sphère qui est à moins de 12 cm du centre de la sphère. Pour y arriver, on trouve la densité de charge de la sphère. Cette densité est

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{-40 \times 10^{-6}}{\frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}2)^3}$$

Ce serait très correct de calculer cette valeur, mais on va la laisser sous cette forme parce qu'il y aura simplification plus tard.
La charge à l'intérieur de la surface de 12 cm de rayon est donc

$$Q_{\text{int}} = \rho V_{\text{int}} = \left(\frac{-40 \times 10^{-6}}{\frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}2)^3}\right) \frac{4}{3}\pi(0{,}12)^3$$

C'est là que plusieurs termes se simplifient et il reste

$$Q_{\text{int}} = \rho V_{\text{int}} = \frac{-40 \times 10^{-6}}{(0{,}2)^3}(0{,}12)^3 = -8{,}64 \times 10^{-6}\,\text{C}$$

On a donc

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E(4\pi \cdot (0{,}12)^2) = \frac{-8{,}64 \times 10^{-6}}{8{,}854 \times 10^{-12}} \quad \longrightarrow \quad E = -5{,}393 \times 10^6\,\text{N/C}$$

À cet endroit, on est dans le diélectrique. On doit donc diviser cette valeur du champ par la permittivité relative pour obtenir la véritable grandeur du champ. Le champ est donc

$$E = \frac{-5{,}393 \times 10^6}{24} = -2{,}247 \times 10^5\,\text{N/C}$$

Comme la réponse est négative, le champ est de $2{,}247 \times 10^5$ N/C vers le centre de la sphère.

Exercice 14 :

(a) On va faire une surface cylindrique autour de la tige qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 40 cm et une longueur h. On a alors

$$E(2\pi rh) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la partie de la charge de la tige qui est à l'intérieur de la surface de longueur h. Cette charge est

$$Q_{\text{int}} = \lambda h$$

On a donc

$$\begin{aligned} E(2\pi rh) &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ E(2\pi rh) &= \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad \text{soit} \quad \begin{aligned} E(2\pi r) &= \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \\ E\cdot(2\pi\cdot 0{,}4) &= \frac{35\times 10^{-6}}{8{,}854\times 10^{-12}} \\ E &= 1{,}573\times 10^{6}\,\text{N/C} \end{aligned}$$

Comme la réponse est positive, le champ est dans la direction opposée au centre de la tige.

(b) On va faire une surface cylindrique autour de la tige qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 1 cm et une longueur h. On a alors

$$E(2\pi rh) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface est nulle puisque la tige est conductrice et que les charges se retrouvent en surface de la tige. Comme la surface de Gauss est plus petite que la tige, il n'y a pas de charge à l'intérieur de la surface. On a donc

$$E(2\pi rh) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E\cdot(2\pi\cdot 0{,}01\cdot h) = \frac{0}{8{,}854\times 10^{-12}} \quad \longrightarrow \quad E = 0\,\text{N/C}$$

On aurait pu aussi simplement dire que $E = 0$ puisqu'on est dans un conducteur.

Exercice 15 :

(a) On va faire une surface cylindrique autour de la tige qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 20 cm et une longueur h. On a alors

$$E(2\pi rh) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la partie de la charge de la tige qui est à l'intérieur de la surface de longueur h. Cette charge est

$$Q_{\text{int}} = \lambda h$$

On a donc

$$\begin{aligned} E(2\pi rh) &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ E(2\pi rh) &= \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad \text{soit} \quad \begin{aligned} E(2\pi r) &= \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \\ E\cdot(2\pi\cdot(0{,}2)) &= \frac{36\times 10^{-6}}{8{,}854\times 10^{-12}} \\ E &= 3{,}236\times 10^{6}\,\text{N/C} \end{aligned}$$

Comme la réponse est positive, le champ est dans la direction opposée au centre de la tige.

(b) On va faire une surface cylindrique autour de la tige qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 8 cm et une longueur h. On a alors

$$E(2\pi rh) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la partie de la charge de la tige qui est à l'intérieur de la surface de longueur h. Mais cette fois, la surface est plus petite que la tige. Il faut donc trouver la charge qui est à moins de 8 cm du centre de la tige et enlever la charge qui est entre 8 cm et 12 cm du centre de la tige. Pour y arriver, on trouve la densité de charge d'une partie de la tige de longueur h. Cette densité est

$$\rho = \frac{Q}{\text{volume}} = \frac{Q}{\pi R^2 h} = \frac{36 \times 10^{-6} \cdot h}{\pi (0{,}12)^2 \cdot h}$$

Ce serait très correct de calculer cette valeur, mais on va la laisser sous cette forme parce qu'il y aura simplification plus tard.
La charge à l'intérieur de la surface de 8 cm de rayon est donc

$$Q_{\text{int}} = \rho V_{\text{int}} = \left(\frac{36 \times 10^{-6} \cdot h}{\pi \cdot (0{,}12)^2 \cdot h} \right) \pi (0{,}08)^2 h$$

C'est là que plusieurs termes se simplifient et il reste

$$Q_{\text{int}} = \frac{36 \times 10^{-6} \cdot h}{(0{,}12)^2} (0{,}08)^2 = 16 \times 10^{-6} \cdot h$$

On a donc

$$\begin{aligned} E(2\pi rh) &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ E(2\pi rh) &= \frac{16 \times 10^{-6} \cdot h}{\varepsilon_0} \end{aligned} \qquad \text{soit} \qquad \begin{aligned} E(2\pi r) &= \frac{16 \times 10^{-6}}{\varepsilon_0} \\ E \cdot (2\pi \cdot (0{,}08)) &= \frac{16 \times 10^{-6}}{8{,}854 \times 10^{-12}} \\ E &= 3{,}595 \times 10^6 \,\text{N/C} \end{aligned}$$

À cet endroit, on est dans le diélectrique. On doit donc diviser cette valeur du champ par la permittivité relative pour obtenir la véritable grandeur du champ. Le champ est donc

$$E = \frac{3{,}595 \times 10^6}{5} = 7{,}19 \times 10^5 \,\text{N/C}$$

Exercice 16 :

(a) On va faire une surface cylindrique autour de la tige qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 6 cm et une longueur h. On a alors

$$E(2\pi rh) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond seulement à la partie de la charge de la tige centrale qui est à l'intérieur de la surface de longueur h. Cette charge est

$$Q_{\text{int}} = \lambda_1 h$$

(On va appeler λ_1 la charge linéique de la tige centrale et λ_2 la charge linéique de l'enveloppe.)
On a donc

$$\begin{aligned} E(2\pi rh) &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ E(2\pi rh) &= \frac{\lambda_1 h}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad \text{soit} \quad \begin{aligned} E(2\pi r) &= \frac{\lambda_1}{\varepsilon_0} \\ E\cdot(2\pi\cdot(0{,}06)) &= \frac{50\times10^{-6}}{8{,}854\times10^{-12}} \\ E &= 1{,}498\times10^{7}\,\text{N/C} \end{aligned}$$

Comme la réponse est positive, le champ est dans la direction opposée au centre de la tige.

(b) On va faire une surface cylindrique autour de la tige qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 20 cm et une longueur h. On a alors

$$E(2\pi rh) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond seulement à la partie de la charge des deux tiges qui est à l'intérieur de la surface de longueur h. Cette charge est

$$Q_{\text{int}} = \lambda_1 h + \lambda_2 h$$

On a donc

$$\begin{aligned} E(2\pi rh) &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ E(2\pi rh) &= \frac{\lambda_1 h + \lambda_2 h}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad \text{soit} \quad \begin{aligned} E(2\pi r) &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\varepsilon_0} \\ E\cdot(2\pi\cdot(0{,}2)) &= \frac{50\times10^{-6}+(-200\times10^{-6})}{8{,}854\times10^{-12}} \\ E &= -1{,}348\times10^{7}\,\text{N/C} \end{aligned}$$

Comme la réponse est négative, on a un champ de $1{,}348\times10^{7}$ N/C vers le centre de la tige.

Exercice 17 : On va faire une surface cylindrique autour de la tige qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de r et une longueur h. On a alors

$$E(2\pi rh) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond seulement à la partie de la charge de la tige centrale qui est à l'intérieur de la surface de longueur h. Cette charge est

$$Q_{\text{int}} = \lambda_1 h$$

(On va appeler λ_1 la charge linéique de la tige centrale et λ_2 la charge linéique de l'enveloppe.)
On a donc

$$E(2\pi rh) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad\longrightarrow\quad E(2\pi rh) = \frac{\lambda_1 h}{\varepsilon_0} \quad\longrightarrow\quad E(2\pi r) = \frac{\lambda_1}{\varepsilon_0} \quad\longrightarrow\quad E = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Exercice 18 :

(a) On va faire une surface cylindrique autour de la tige qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 2 cm et une longueur h. On a alors

$$E(2\pi rh) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond seulement à la partie de la charge de la partie centrale de la tige qui est à l'intérieur de la surface de longueur h. Cette charge est

$$Q_{\text{int}} = \rho_1 \cdot (\text{vol})_{\text{int}}$$

(On va appeler ρ_1 la charge volumique de la partie centrale et ρ_2 la charge volumique de l'enveloppe.)
La charge est la charge à l'intérieur de la surface de Gauss d'un rayon de 2 cm. Elle est donc

$$Q_{\text{int}} = \rho_1 \cdot (\text{vol})_{\text{int}} = \rho_1 \cdot \pi r^2 h = 0{,}05 \cdot \pi \cdot (0{,}02)^2 \cdot h = 6{,}283 \times 10^{-5} \cdot h$$

On a donc

$$\begin{aligned} E(2\pi rh) &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ E(2\pi rh) &= \frac{6{,}283 \times 10^{-5} \cdot h}{\varepsilon_0} \end{aligned} \qquad \text{soit} \qquad \begin{aligned} E(2\pi r) &= \frac{6{,}283 \times 10^{-5}}{\varepsilon_0} \\ E \cdot (2\pi \cdot 0{,}02) &= \frac{6{,}283 \times 10^{-5}}{8{,}854 \times 10^{-12}} \\ E &= 5{,}647 \times 10^7\,\text{N/C} \end{aligned}$$

À cet endroit, on est dans un diélectrique. On doit donc diviser cette valeur du champ par la permittivité relative pour obtenir la véritable grandeur du champ. Le champ est donc

$$E = \frac{5{,}647 \times 10^7}{3} = 1{,}882 \times 10^7\,\text{N/C}$$

Comme la réponse est positive, le champ est dans la direction opposée au centre de la tige.

(b) On va faire une surface cylindrique autour de la tige qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 8 cm et une longueur h. On a alors

$$E(2\pi rh) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à toute la charge de la partie centrale de la tige qui est à l'intérieur de la surface de longueur h et a une partie de la charge de l'enveloppe à moins de 8 cm du centre de la tige. Cette charge est

$$Q_{\text{int}} = \rho_1 \cdot (\text{vol})_{\text{partie centrale}} + \rho_2 \cdot (\text{vol})_{\text{enveloppe à moins de 8 cm}} = \rho_1 \cdot \pi R_1^2 h + \rho_2 \cdot (\pi r^2 h - \pi R_1^2 h)$$

Le volume de la deuxième partie correspond au volume d'un cylindre se terminant à la surface de Gauss auquel on enlève la partie centrale qui a une densité différente. On a alors

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \rho_1 \cdot \pi R_1^2 h + \rho_2 \cdot (\pi r^2 h - \pi R_1^2 h) \\ &= 0{,}05 \cdot \pi \cdot (0{,}04)^2 \cdot h + (-0{,}02) \cdot (\pi \cdot (0{,}08)^2 \cdot h - \pi \cdot (0{,}04)^2 \cdot h) \\ &= \left[0{,}05 \cdot \pi \cdot (0{,}04)^2 + (-0{,}02) \cdot (\pi \cdot (0{,}08)^2 - \pi \cdot (0{,}04)^2)\right] \cdot h = -5{,}027 \times 10^{-5} \cdot h \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} E(2\pi rh) &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ E(2\pi rh) &= \frac{-5{,}027 \times 10^{-5} \cdot h}{\varepsilon_0} \end{aligned} \qquad \text{soit} \qquad \begin{aligned} E(2\pi r) &= \frac{-5{,}027 \times 10^{-5}}{\varepsilon_0} \\ E \cdot (2\pi \cdot 0{,}08) &= \frac{-5{,}027 \times 10^{-5}}{8{,}854 \times 10^{-12}} \\ E &= -1{,}129 \times 10^7\,\text{N/C} \end{aligned}$$

À cet endroit, on est dans un diélectrique. On doit donc diviser cette valeur du champ par la permittivité relative pour obtenir la véritable grandeur du champ. Le champ est donc

$$E = \frac{-1{,}129 \times 10^{-7}}{9} = -1{,}255 \times 10^{6}\,\mathrm{N/C}$$

Comme la réponse est négative, on a un champ de $1{,}255 \times 10^{6}\,\mathrm{N/C}$ vers le centre de la tige.

(c) On va faire une surface cylindrique autour de la tige qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 12 cm et une longueur h. On a alors

$$Q_{\text{int}} = \rho_1 \cdot (\text{vol})_{\text{partie centrale}} + \rho_2 \cdot (\text{vol})_{\text{enveloppe}} = \rho_1 \cdot \pi R_1^2 h + \rho_2 \cdot (\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h)$$

Le volume de la deuxième partie correspond au volume d'un cylindre auquel on enlève la partie centrale qui a une densité différente. On a alors

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \rho_1 \cdot \pi R_1^2 h + \rho_2 \cdot (\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h) \\ &= 0{,}05 \cdot \pi \cdot (0{,}04)^2 \cdot h + (-0{,}02) \cdot (\pi \cdot (0{,}10)^2 \cdot h - \pi \cdot (0{,}04)^2 \cdot h) \\ &= \left[0{,}05 \cdot \pi \cdot (0{,}04)^2 + (-0{,}02) \cdot (\pi \cdot (0{,}10)^2 - \pi \cdot (0{,}04)^2)\right] \cdot h = -2{,}765 \times 10^{-4} \cdot h \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} E(2\pi r h) &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ E(2\pi r h) &= \frac{-2{,}765 \times 10^{-4} \cdot h}{\varepsilon_0} \end{aligned} \qquad \text{soit} \qquad \begin{aligned} E(2\pi r) &= \frac{-2{,}765 \times 10^{-4}}{\varepsilon_0} \\ E \cdot (2\pi \cdot 0{,}12) &= \frac{-2{,}765 \times 10^{-4}}{8{,}854 \times 10^{-12}} \\ E &= -4{,}141 \times 10^{7}\,\mathrm{N/C} \end{aligned}$$

Comme la réponse est négative, on a un champ de $4{,}141 \times 10^{7}\,\mathrm{N/C}$ vers le centre de la tige.

Exercice 19 :

(a) On va faire une surface sphérique autour du centre de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 5 cm. On a alors

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la charge ponctuelle au centre de la sphère. On a donc

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E \cdot (4\pi \cdot (0{,}05)^2) = \frac{5 \times 10^{-6}}{8{,}854 \times 10^{-12}} \quad \longrightarrow \quad E = 1{,}798\,\mathrm{N/C}$$

Comme la réponse est positive, le champ est de $1{,}798 \times 10^{7}\,\mathrm{N/C}$ dans la direction opposée au centre de la sphère.

(b) On va faire une surface sphérique autour du centre de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 15 cm. On a alors

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la charge ponctuelle au centre de la sphère additionné à la partie de la charge de la sphère qui est dans la surface de Gauss.

$$Q_{\text{int}} = Q_{\text{int charge ponctuelle}} + Q_{\text{int sphère}}$$

Pour trouver la partie de la charge de la sphère, on va calculer sa charge volumique.

$$\rho = \frac{\text{charge}}{\text{volume}} = \frac{-20\,\mu\text{C}}{\frac{4}{3}\pi\left((0{,}16)^3-(0{,}12)^3\right)} = -2{,}016\times10^{-3}\,\text{C/m}^3$$

La charge à l'intérieur du volume de Gauss est donc

$$Q_{\text{int}} = \rho_{\text{int}}\cdot V_{\text{int}} = -2{,}016\times10^{-3}\cdot\frac{4}{3}\rho\left((0{,}15)^3-(0{,}12)^3\right) = -1{,}391\times10^{-5}\,\text{C} = -13{,}91\,\mu\text{C}$$

La charge totale à l'intérieur de la surface de Gauss est donc

$$Q_{\text{int}} = Q_{\text{int charge ponctuelle}} + Q_{\text{int sphère}} = 5-13{,}91 = -8{,}91\,\mu\text{C}$$

Le théorème de Gauss donne donc

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad\longrightarrow\quad E\cdot(4\pi\cdot(0{,}15)^2) = \frac{-8{,}91\times10^{-6}}{8{,}854\times10^{-12}} \quad\longrightarrow\quad E = -3{,}559\times10^6\,\text{N/C}$$

Comme la réponse est positive, le champ est de $3{,}559\times10^6$ N/C vers le centre de la sphère.

(c) On va faire une surface sphérique autour du centre de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a un rayon de 20 cm. On a alors

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à la charge ponctuelle au centre de la sphère additionné à la charge totale de la sphère.

$$Q_{\text{int}} = Q_{\text{int charge ponctuelle}} + Q_{\text{int sphère}} = 5-20 = -15\,\mu\text{C}$$

Le théorème de Gauss donne donc

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad\longrightarrow\quad E\cdot(4\pi\cdot(0{,}20)^2) = \frac{-15\times10^{-6}}{8{,}854\times10^{-12}} \quad\longrightarrow\quad E = -3{,}370\times10^6\,\text{N/C}$$

Comme la réponse est positive, le champ est de $3{,}370\times10^6$ N/C vers le centre de la sphère.

Exercice 20 :

(a) On va faire une surface sphérique autour du centre de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 5 cm. On a alors

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond seulement à la partie de la charge de la partie centrale de la sphère qui est à l'intérieur de la surface de Gauss. Cette charge est

$$Q_{\text{int}} = \rho_1\cdot V_{\text{int}}$$

(On va appeler ρ_1 la charge volumique de la partie centrale et ρ_2 la charge volumique de l'enveloppe.) La charge est donc

$$Q_{\text{int}} = \rho_1\cdot V_{\text{int}} = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = 0{,}005\times\frac{4}{3}\pi\times(0{,}05)^3 = 2{,}618\times10^{-6}\,\text{C}$$

On a donc

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad\qquad E \cdot (4\pi \cdot (0{,}05)^2) = \frac{2{,}618 \times 10^{-6}}{8{,}854 \times 10^{-12}}$$
$$E(4\pi r^2) = \frac{2{,}618 \times 10^{-6}}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E = 9{,}412 \times 10^{6}\,\text{N/C}$$

À cet endroit, on est dans un diélectrique. On doit donc diviser cette valeur du champ par la permittivité relative pour obtenir la véritable grandeur du champ. Le champ est donc

$$E = \frac{9{,}412 \times 10^{6}}{3} = 3{,}137 \times 10^{6}\,\text{N/C}$$

Comme la réponse est positive, le champ est dans la direction opposée au centre de la sphère.

(b) On va faire une surface sphérique autour du centre de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 15 cm. On a alors

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à toute la charge de la sphère centrale et a une partie de la charge de l'enveloppe à moins de 15 cm du centre. Cette charge est

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \rho_1 \cdot (\text{vol})_{\text{partie centrale}} + \rho_2 \cdot (\text{vol})_{\text{enveloppe à moins de 15 cm}} \\ &= \rho_1 \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3 + \rho_2 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3\right) \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \rho_1 \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3 + \rho_2 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3\right) \\ &= 0{,}005 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}1)^3 + (-0{,}01) \cdot \left(\frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}15)^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}1)^3\right) = -7{,}854 \times 10^{-5}\,\text{C} \end{aligned}$$

On a donc

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad\qquad E \cdot (4\pi \cdot (0{,}15)^2) = \frac{-7{,}854 \times 10^{-5}}{8{,}854 \times 10^{-12}}$$
$$E(4\pi r^2) = \frac{-7{,}854 \times 10^{-5}}{\varepsilon_0} \quad \text{soit} \quad E = -3{,}137\,2 \times 10^{7}\,\text{N/C}$$

À cet endroit, on est dans un diélectrique. On doit donc diviser cette valeur du champ par la permittivité relative pour obtenir la véritable grandeur du champ. Le champ est donc

$$E = \frac{3{,}137\,2 \times 10^{7}}{9} = -3{,}485\,8 \times 10^{6}\,\text{N/C}$$

Comme la réponse est négative, on a un champ de $3{,}486 \times 10^{6}\,\text{N/C}$ vers le centre de la sphère.

(c) On va faire une surface sphérique autour du centre de la sphère qui passe par l'endroit où on veut connaitre le champ. Cette surface a donc un rayon de 25 cm. On a alors

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La charge à l'intérieur de la surface correspond à toute la charge de la partie centrale et toute la charge de l'enveloppe. Cette charge est

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \rho_1 \cdot (\text{vol})_{\text{partie centrale}} + \rho_2 \cdot (\text{vol})_{\text{enveloppe}} = \rho_1 \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3 + \rho_2 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi R_2^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3\right) \\ &= 0{,}005 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}1)^3 + (-0{,}01) \cdot \left(\frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}2)^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}1)^3\right) = -2{,}723 \times 10^{-4}\,\text{C} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} E(4\pi r^2) &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\ E(4\pi r^2) &= \frac{-2{,}723 \times 10^{-4}}{\varepsilon_0} \end{aligned} \qquad \text{soit} \qquad \begin{aligned} E \cdot (4\pi \cdot (0{,}25)^2) &= \frac{-2{,}723 \times 10^{-4}}{8{,}854 \times 10^{-12}} \\ E &= -3{,}915 \times 10^7\,\text{N/C} \end{aligned}$$

Comme la réponse est négative, on a un champ de $3{,}915 \times 10^7$ N/C vers le centre de la sphère.

Exercice 21 : La densité surfacique de charge de la sphère est

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{50 \times 10^6}{4\pi \cdot (0{,}25)^2} = 6{,}366 \times 10^{-5}\,\text{C/m}^2$$

Le champ est donc

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{6{,}366 \times 10^{-5}}{8{,}854 \times 10^{-12}} = 7{,}19 \times 10^6\,\text{N/C}$$

Exercice 22 : On trouve la densité de charge avec

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad 200\,000 = \frac{\sigma}{8{,}854 \times 10^{-12}} \quad \longrightarrow \quad \sigma = 1{,}771 \times 10^{-6}\,\text{C/m}^2$$

Exercice 23 : (a) On trouve le champ avec le théorème de Gauss

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

On doit trouver la charge à l'intérieur. Cela demande de faire une intégrale puisque la densité varie avec la distance.

Pour faire l'intégrale, on sépare la sphère en coquilles sphériques minces. Comme le volume d'une mince coquille de rayon x est

$$dV = \text{surface} \cdot \text{épaisseur} = 4\pi x^2 dx$$

la charge de la coquille est

$$dQ = \text{densité} \cdot dV = \rho_0 \left(1 - \frac{x}{R}\right) \cdot 4\pi x^2 dx$$

La charge à l'intérieur d'une sphère de rayon r est donc

$$Q_{\text{int}} = \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{x}{R}\right) \cdot 4\pi x^2 dx = \rho_0 4\pi \int_0^r \left(1 - \frac{x}{R}\right) \cdot x^2 dx = \rho_0 4\pi \int_0^r \left(x^2 - \frac{x^3}{R}\right) dx$$

$$Q_{\text{int}} = \rho_0 4\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4R}\right]_0^r = \rho_0 4\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right)$$

Le champ est donc

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 4\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right) \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 \left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R}\right)$$

Mais comme on est dans une substance de permittivité κ, le champ est

$$E = \frac{1}{\kappa\varepsilon_0}\rho_0 \left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R}\right)$$

(b) On trouve encore le champ avec le théorème de Gauss

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Cette fois-ci, il faut calculer la charge de toute la sphère en intégrant jusqu'à R.

$$Q_{\text{int}} = \int_0^R \rho_0 \left(1 - \frac{x}{R}\right) \cdot 4\pi x^2 dx = \rho_0 4\pi \int_0^R \left(1 - \frac{x}{R}\right) \cdot x^2 dx = \rho_0 4\pi \int_0^R \left(x^2 - \frac{x^3}{R}\right) dx$$

$$Q_{\text{int}} = \rho_0 4\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4R}\right]_0^R = \rho_0 4\pi \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{4R}\right) = \rho_0 4\pi R^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}\rho_0 4\pi R^3$$

Le champ est donc

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad E(4\pi r^2) = \frac{1}{12\varepsilon_0}\rho_0 4\pi R^3 \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}$$

(c) Quand le champ est maximal, on a

$$\frac{dE}{dr} = 0$$

On a donc

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\kappa\varepsilon_0}\rho_0 \left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R}\right)\right) = 0$$

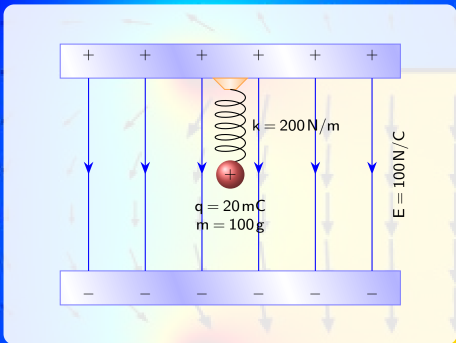
$$\frac{1}{\kappa\varepsilon_0}\rho_0 \left(\frac{1}{3} - \frac{2r}{4R}\right) = 0$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2r}{4R}$$

$$r = \frac{2R}{3}$$

Cette page est intentionnellement laissée en blanc.

Un objet de 100 g est suspendu à un ressort qui n'est pas étiré initialement, tel qu'illustré sur la figure. Quel sera l'étirement maximal du ressort quand on laissera tomber la masse si on tient compte de la gravitation ? Découvrez comment résoudre ce problème dans ce chapitre.



4. Solutions du chapitre 4

Exercice 1 : L'énergie potentielle est

$$U_{\mathrm{E}} = \frac{kQq}{r} = \frac{9\times10^{9}\times(-10\times10^{-6})\times(-18\times10^{-6})}{0{,}2} = 8{,}1\,\mathrm{J}$$

Exercice 2 : On va faire ce problème avec la conservation de l'énergie. L'énergie mécanique de cette charge est

$$E_{\mathrm{mec}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{kq_1q_2}{r}$$

Au départ, la charge est très loin du noyau, de sorte que l'énergie potentielle est négligeable. L'énergie initiale est donc

$$E_{\mathrm{mec}} = \frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}1{,}67\times10^{-27}\times(10^7)^2 = 8{,}35\times10^{-14}\,\mathrm{J}$$

Au point le plus près, la vitesse est nulle. On a donc

$$\begin{aligned} E'_{\mathrm{mec}} &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{kq_1q_2}{r'} = 0 + \frac{kq_1q_2}{r'} \\ &= \frac{9\times10^{9}\times1{,}602\times10^{-19}\times(92\times1{,}602\times10^{-19})}{r'} = \frac{2{,}125\times10^{-26}}{r'} \end{aligned}$$

Avec la conservation de l'énergie, on obtient

$$E_{\mathrm{mec}} = E'_{\mathrm{mec}} \quad\longrightarrow\quad 8{,}35\times10^{-14} = \frac{2{,}125\times10^{-26}}{r'} \quad\longrightarrow\quad r' = 2{,}545\times10^{-13}\,\mathrm{m}$$

Puisque le noyau a un rayon de $1{,}4\times10^{-15}$ m (qui est 180 fois plus petit que notre réponse), le proton n'a pas atteint le noyau.

Exercice 3 : Le potentiel est

$$\begin{aligned} V &= \sum\frac{kQ}{r} = \frac{9\times10^{9}\times2\times10^{-9}}{0{,}03} + \frac{9\times10^{9}\times2\times10^{-9}}{0{,}04} + \frac{9\times10^{9}\times2\times10^{-9}}{0{,}05} \\ &= 600 + 450 + 360 = 1\,410\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

Exercice 4 : On a

$$\Delta V = V' - V = \frac{kQ}{r'} - \frac{kQ}{r} = kQ\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)$$
$$-180 = 9\times 10^{9}\times 10^{-9}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{0{,}01}\right)$$

soit

$$-20 = \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{0{,}01}\right)$$
$$r' = 0{,}012\,5\,\mathrm{m} = 1{,}25\,\mathrm{cm}$$

Comme on était initialement à 1 cm de la charge, il faut s'éloigner de 0,25 cm.

Exercice 5 : On a deux équations.

$$V = \frac{kQ}{r} \longrightarrow 900 = \frac{kQ}{r}$$
$$E = \frac{kQ}{r^2} \longrightarrow 2\,000 = \frac{kQ}{r^2}$$

Si on isole Q dans la première équation

$$Q = \frac{900\times r}{k}$$

et qu'on remplace dans la deuxième équation, on a

$$2\,000 = \frac{kQ}{r^2} \longrightarrow 2\,000 = \frac{k\frac{900\times r}{k}}{r^2} \longrightarrow 2\,000 = \frac{900}{r} \longrightarrow r = 0{,}45\,\mathrm{m} = 45\,\mathrm{cm}$$

De là, on obtient

$$900 = \frac{kQ}{r} \longrightarrow 900 = \frac{9\times 10^{9}\times Q}{0{,}45} \longrightarrow Q = 4{,}5\times 10^{-8}\,\mathrm{C} = 45\,\mathrm{nC}$$

Exercice 6 : On a

$$V = \sum \frac{kQ}{r}$$
$$0 = \frac{k\cdot 5}{0{,}5} + \frac{k\cdot 15}{0{,}2} + \frac{k\cdot Q}{0{,}3}$$
$$0 = \frac{5}{0{,}5} + \frac{15}{0{,}2} + \frac{Q}{0{,}3}$$

soit

$$0 = 85 + \frac{Q}{0{,}3}$$
$$\frac{Q}{0{,}3} = -85$$
$$Q = -25{,}5\,\mu\mathrm{C}$$

Exercice 7 : On trouve le travail avec

$$E_k + U_\mathrm{E} + W_\mathrm{ext} = E_k' + U_\mathrm{E}'$$

L'énergie potentielle électrique étant $U = qV$, on arrive à

$$E_k + qV + W_\mathrm{ext} = E_k' + qV'$$

Comme la charge est immobile au départ et à la fin, les énergies cinétiques sont nulles. Il reste donc

$$qV + W_\mathrm{ext} = qV' \longrightarrow W_\mathrm{ext} = qV' - qV \longrightarrow W_\mathrm{ext} = q(V' - V)$$

Avec les valeurs, on arrive à

$$W_\mathrm{ext} = q(V' - V) = -0{,}2\times(30-6) = -4{,}8\,\mathrm{J}$$

On reçoit donc 4,8 J.

Exercice 8 : La variation d'énergie potentielle est

$$\Delta U_\text{E} = U'_\text{E} - U_\text{E} = qV' - qV = q(V' - V)$$

Pour trouver la variation d'énergie potentielle, il nous faut donc le potentiel à ces deux positions. Le potentiel à $x = 1\,\text{m}$ est

$$\begin{aligned} V &= \sum \frac{kQ}{r} = \frac{9\times 10^9 \times (-10\times 10^{-6})}{1} + \frac{9\times 10^9 \times (15\times 10^{-6})}{3} \\ &= -90\,000 + 45\,000 = -45\,000\,\text{V} \end{aligned}$$

Le potentiel à $x = 3\,\text{m}$ est

$$\begin{aligned} V' &= \sum \frac{kQ}{r'} = \frac{9\times 10^9 \times (-10\times 10^{-6})}{3} + \frac{9\times 10^9 \times (15\times 10^{-6})}{1} \\ &= -30\,000 + 135\,000 = 105\,000\,\text{V} \end{aligned}$$

On a donc

$$\Delta U_\text{E} = q(V' - V) = -1\times 10^{-6} \times (105\,000 - (-45\,000)) = -0{,}15\,\text{J}$$

Exercice 9 : On trouve le travail avec

$$E_k + U_\text{E} + W_\text{ext} = E'_k + U'_\text{E}$$

L'énergie potentielle électrique étant $U = qV$, on arrive à

$$E_k + qV + W_\text{ext} = E'_k + qV'$$

Comme la charge est immobile au départ et à la fin, les énergies cinétiques sont nulles. Il reste donc

$$qV + W_\text{ext} = qV' \qquad \longrightarrow \qquad W_\text{ext} = qV' - qV \qquad \longrightarrow \qquad W_\text{ext} = q(V' - V)$$

Il faut donc trouver le potentiel au point de départ et au point d'arrivée. Le potentiel au point de départ est

$$\begin{aligned} V &= \sum \frac{kQ}{r} = \frac{9\times 10^9 \times (-5\times 10^{-6})}{0{,}014\,14} + \frac{9\times 10^9 \times (2\times 10^{-6})}{0{,}014\,14} + \frac{9\times 10^9 \times (-10\times 10^{-6})}{0{,}014\,14} \\ &= -3{,}182\times 10^6 + 1{,}273\times 10^6 + (-6{,}364\times 10^6) = -8{,}273\times 10^6\,\text{V} \end{aligned}$$

Le potentiel au point d'arrivée est

$$\begin{aligned} V' &= \sum \frac{kQ}{r'} = \frac{9\times 10^9 \times (-5\times 10^{-6})}{0{,}02} + \frac{9\times 10^9 \times (2\times 10^{-6}}{0{,}028\,28)} + \frac{9\times 10^9 \times (-10\times 10^{-6})}{0{,}02} \\ &= -2{,}25\times 10^6 + 0{,}636\times 10^6 + (-4{,}5\times 10^6) = -6{,}114\times 10^6\,\text{V} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} W_\text{ext} &= q(V' - V) = 1\times 10^{-6} \times (-6{,}114\times 10^6 - (-8{,}273\times 10^6)) \\ &= 1\times 10^{-6} \times (2{,}159\times 10^6) = 2{,}159\,\text{J} \end{aligned}$$

Exercice 10 : On trouve le travail avec

$$E_k + U_E + W_{ext} = E'_k + U'_E$$

L'énergie potentielle électrique étant $U = qV$, on arrive à

$$E_k + qV + W_{ext} = E'_k + qV'$$

Comme la charge est immobile au départ et à la fin, les énergies cinétiques sont nulles. Il reste donc

$$qV + W_{ext} = qV' \qquad \longrightarrow \qquad W_{ext} = qV' - qV \qquad \longrightarrow \qquad W_{ext} = q(V' - V)$$

Il faut donc trouver le potentiel au point de départ et au point d'arrivée. Le potentiel au point de départ est

$$V = \sum \frac{kQ}{r} = 0\,\text{V}$$

puisque les distances sont infinies. Le potentiel au point d'arrivée est

$$\begin{aligned} V' = \sum \frac{kQ}{r'} &= \frac{9 \times 10^9 \times (5 \times 10^{-6})}{0{,}04} + \frac{9 \times 10^9 \times (-10 \times 10^{-6})}{0{,}05)} \\ &= 1{,}125 \times 10^6 + (1{,}8 \times 10^6) = -6{,}75 \times 10^5\,\text{V} \end{aligned}$$

On a donc

$$W_{ext} = q(V' - V) = -2 \times 10^{-6} \times (-6{,}75 \times 10^5 - 0) = 1{,}35\,\text{J}$$

Exercice 11 : Pour la charge de gauche, on a

$$V_1 = \frac{kQ_1}{5} \qquad \text{et} \qquad E_{1x} = \frac{kQ_1}{(5)^2}$$

Cette dernière formule donne aussi la direction du champ. Si Q_1 est positive, le champ est vers la droite, et notre composante est positive. Si Q_1 est négative, le champ est vers la gauche, et notre composante est négative.
Pour la charge de droite, on a

$$V_2 = \frac{kQ_2}{5} \qquad \text{et} \qquad E_{2x} = -\frac{kQ_2}{(5)^2}$$

Cette dernière formule donne aussi la direction du champ. Si Q_2 est positive, le champ est vers la gauche, et notre composante est négative. Si Q_2 est négative, le champ est vers la droite, et notre composante est positive.
Nos deux équations sont donc

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 = 12\,600\,\text{V} \qquad &\longrightarrow \qquad \frac{kQ_1}{5} + \frac{kQ_2}{5} = 12\,600\,\text{V} \\ E_{1x} + E_{2x} = 1\,080\,\text{V/m} \qquad &\longrightarrow \qquad \frac{kQ_1}{(5)^2} - \frac{kQ_2}{(5)^2} = 1\,080\,\text{V/m} \end{aligned}$$

L'équation du potentiel nous donne

$$\begin{aligned} \frac{kQ_1}{5} + \frac{kQ_2}{5} &= 12\,600 & & & Q_1 + Q_2 &= \frac{63\,000}{9 \times 10^9} \\ kQ_1 + kQ_2 &= 63\,000 & &\text{soit} & Q_1 + Q_2 &= 7 \times 10^{-6}\,\text{C} = 7\,\mu\text{C} \end{aligned}$$

L'équation de champ nous donne

$$\frac{kQ_1}{(5)^2} - \frac{kQ_2}{(5)^2} = 1\,080 \qquad \text{soit} \qquad Q_1 - Q_2 = \frac{27\,000}{9\times 10^9}$$

$$kQ_1 - kQ_2 = 27\,000 \qquad\qquad Q_1 - Q_2 = 3\times 10^{-6}\,\mathrm{C} = 3\,\mu\mathrm{C}$$

On a maintenant ces deux équations

$$Q_1 + Q_2 = 7\,\mu\mathrm{C} \qquad \text{et} \qquad Q_1 - Q_2 = 3\,\mu\mathrm{C}$$

En additionnant les deux équations, on a

$$(Q_1+Q_2)+(Q_1-Q_2) = 7+3 \quad\longrightarrow\quad 2Q_1 = 10 \quad\longrightarrow\quad Q_1 = 5\,\mu\mathrm{C}$$

De là, on trouve l'autre charge avec

$$Q_1 + Q_2 = 7 \quad\longrightarrow\quad 5+Q_2 = 7 \quad\longrightarrow\quad Q_2 = 2\,\mu\mathrm{C}$$

Exercice 12 : La charge linéique est

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{90\times 10^{-6}}{0{,}3} = 3\times 10^{-4}\,\mathrm{C/m}$$

Le potentiel est donc

$$V = k\lambda \ln\left(\frac{r+L}{r}\right) = 9\times 10^9 \times 3\times 10^{-4} \times \ln\left(\frac{0{,}2+0{,}3}{0{,}2}\right) = 2{,}474\times 10^6\,\mathrm{V}$$

Exercice 13 : La charge linéique est

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{-20\times 10^{-6}}{0{,}2} = -1\times 10^{-4}\,\mathrm{C/m}$$

Le potentiel est donc

$$V = k\lambda \ln\left(\frac{\sqrt{L^2+4r^2}+L}{\sqrt{L^2+4r^2}-L}\right) = 9\times 10^9 \times (-1\times 10^{-4}) \times \ln\left(\frac{\sqrt{(0{,}2)^2+4\times(0{,}08)^2}+0{,}2}{\sqrt{(0{,}2)^2+4\times(0{,}08)^2}-0{,}2}\right)$$

$$= 9\times 10^9 \times (-1\times 10^{-4}) \times \ln(8{,}126\,9) = -1{,}886\times 10^6\,\mathrm{V}$$

Exercice 14 : Le potentiel est

$$V = \frac{kQ}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{9\times 10^9 \times 8\times 10^{-5}}{\sqrt{(0{,}18)^2+(0{,}24)^2}} = 2{,}4\times 10^6\,\mathrm{V}$$

Exercice 15 : Le potentiel est

$$V = \frac{kQ}{r} = \frac{9\times 10^9 \times (-1{,}6\times 10^{-4})}{0{,}4} = -3{,}6\times 10^6\,\mathrm{V}$$

Exercice 16 : Pour trouver le potentiel, on doit connaitre le champ électrique. Entre deux plaques parallèles, ce champ est

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{0{,}02}{8{,}854\times 10^{-12}} = 2{,}259\times 10^9\,\mathrm{N/C}$$

Comme la plaque négative est à $V=0$, on doit mettre notre $x=0$ à la plaque négative. À 1 mm de la plaque négative, le potentiel est donc

$$V = -E_x x = -(-2{,}259\times 10^9)\times 0{,}001 = 2{,}259\times 10^6\,\mathrm{V}$$

Exercice 17 :

(a) Le potentiel est

$$V = -E_y y = -2\,500 \times 0{,}08 = -200\,\mathrm{V}$$

(b) L'énergie potentielle électrique est

$$U_\mathrm{E} = qV = -0{,}05 \times (-200) = 10\,\mathrm{J}$$

Exercice 18 : À l'intérieur d'une sphère uniformément chargée, le potentiel est donné par la formule

$$V = \frac{kQ}{2R}\left(2 + \frac{1}{\kappa} - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Au centre, $r = 0$. On a alors

$$V = \frac{kQ}{2R}\left(2 + \frac{1}{\kappa} - 0\right) = \frac{9\times 10^9 \times (-160 \times 10^{-6})}{2 \times 0{,}15}\left(2 + \frac{1}{2}\right) = -1{,}2 \times 10^7\,\mathrm{V}$$

Exercice 19 : Il suffit d'additionner les potentiels faits par la tige droite et la tige courbée.

Le potentiel fait par la tige droite est

$$V = k\lambda \ln\left(\frac{r+L}{r}\right) = 9 \times 10^9 \times \frac{-40 \times 10^{-6}}{0{,}5} \ln\left(\frac{0{,}8+0{,}5}{0{,}8}\right) = -3{,}496 \times 10^5\,\mathrm{V}$$

Le potentiel fait par la tige courbée est

$$V = \frac{kQ}{a} = \frac{9 \times 10^9 \times 20 \times 10^{-6}}{0{,}48} = 375\,000\,\mathrm{V}$$

Le potentiel est donc

$$V = V_\text{sphère} + V_\text{tige} = -3{,}496 \times 10^5 + 3{,}75 \times 10^5 = 0{,}254\,34 \times 10^5\,\mathrm{V} = 25\,434\,\mathrm{V}$$

Exercice 20 : On va faire ce problème avec la conservation de l'énergie. L'énergie de la charge est

$$E_\text{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + qV$$

Initialement, la charge est immobile. L'énergie initiale est donc

$$E_\text{mec} = qV$$

Trouvons alors le potentiel à la position initiale. Le potentiel est

$$V = \frac{kq}{a} = \frac{9 \times 10^9 \times (-10 \times 10^{-6})}{0{,}5} = -180\,000\,\mathrm{V}$$

L'énergie initiale est donc

$$E_\text{mec} = qV = -1 \times 10^{-6} \times (-180\,000) = 0{,}18\,\mathrm{J}$$

Quand la charge est très loin de la tige, l'énergie est

$$E'_\text{mec} = \frac{1}{2}mv'^2 + qV'$$

À cet endroit, le potentiel est nul. L'énergie est donc

$$E'_{\text{mec}} = \frac{1}{2}mv'^2 + qV' = \frac{1}{2}mv'^2 + 0 = \frac{1}{2}mv'^2$$

Selon la conservation de l'énergie on a donc

$$E_{\text{mec}} = E'_{\text{mec}} \quad \longrightarrow \quad 0{,}18 = \frac{1}{2}mv'^2 \quad \longrightarrow \quad 8{,}285 = \frac{1}{2} \times 0{,}04 \cdot v'^2 \quad \longrightarrow \quad v' = 3\,\text{m/s}$$

Exercice 21 : L'énergie mécanique de la charge est

$$E_{\text{mec}} = \frac{1}{2}mv^2 + qV$$

Énergie mécanique quand la charge est à 1 m *de la tige.*
En plaçant notre $V = 0$ à $r = 1\,\text{m}$, l'énergie mécanique est

$$E_{\text{mec}} = \frac{1}{2}mv^2 + qV = \frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2} \times 0{,}01 \times (12)^2 = 0{,}72\,\text{J}$$

Énergie mécanique quand la charge a une vitesse nulle.
L'énergie mécanique est

$$\begin{aligned} E'_{\text{mec}} &= \frac{1}{2}mv'^2 + qV' = 0 + q\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r'}{1}\right) \\ &= -1 \times 10^{-6}\frac{-20 \times 10^{-6}}{2\pi \cdot 8{,}854 \times 10^{-12}}\ln\left(\frac{r'}{1}\right) = 0{,}359\,5\ln\left(\frac{r'}{1}\right) \end{aligned}$$

Application du principe de conservation de l'énergie mécanique.
On a

$$\begin{aligned} E_{\text{mec}} &= E'_{\text{mec}} \\ 0{,}72 &= 0{,}359\,5\ln\left(\frac{r'}{1}\right) \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} 2{,}002\,8 &= \ln\left(\frac{r'}{1}\right) \\ e^{2{,}002\,8} &= \frac{r'}{1} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad r' = 7{,}409\,6\,\text{m}$$

Exercice 22 : On va faire ce problème avec la conservation de l'énergie. L'énergie de la charge est

$$E_{\text{mec}} = \frac{1}{2}mv^2 + qV$$

Initialement, la charge est immobile. L'énergie initiale est donc

$$E_{\text{mec}} = qV$$

Trouvons alors le potentiel à la position initiale. La charge linéique est

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{45 \times 10^{-6}}{0{,}2} = 2{,}25 \times 10^{-4}\,\text{C/m}$$

Le potentiel est donc

$$V = k\lambda\ln\left(\frac{r+L}{r}\right) = 9 \times 10^9 \times 2{,}25 \times 10^{-4} \times \ln\left(\frac{0{,}4+0{,}2}{0{,}4}\right) = 8{,}211 \times 10^5\,\text{V}$$

L'énergie initiale est donc

$$E_{\text{mec}} = qV = 12\times 10^{-6}\times 8{,}211\times 10^{5} = 9{,}853\,\text{J}$$

Quand la charge est à 3 m de la tige, l'énergie est

$$E'_{\text{mec}} = \frac{1}{2}mv'^2 + qV'$$

Encore une fois, il faut trouver le potentiel quand la charge est à 3 m du bout de la tige.

$$V = k\lambda \ln\left(\frac{r+L}{r}\right) = 9\times 10^{9}\times 2{,}25\times 10^{-4}\times \ln\left(\frac{3+0{,}2}{3}\right) = 1{,}307\times 10^{5}\,\text{V}$$

L'énergie est donc

$$E'_{\text{mec}} = \frac{1}{2}mv'^2 + qV' = \frac{1}{2}mv'^2 + 12\times 10^{-6}\times 1{,}307\times 10^{5} = \frac{1}{2}mv'^2 + 1{,}568$$

Selon la conservation de l'énergie on a donc

$$\begin{aligned} E_{\text{mec}} &= E'_{\text{mec}} \\ 9{,}853 &= \frac{1}{2}mv'^2 + 1{,}568 \end{aligned} \quad\longrightarrow\quad \begin{aligned} 8{,}285 &= \frac{1}{2}mv'^2 \\ 8{,}285 &= \frac{1}{2}\times 10^{-9}\cdot v'^2 \end{aligned} \quad\longrightarrow\quad v' = 1{,}287\times 10^{5}\,\text{m/s}$$

Exercice 23 : Avec la gravitation, l'énergie mécanique de la charge est

$$E_{\text{mec}} = \frac{1}{2}mv^2 - qE_y y + mgy$$

On va mettre notre $y = 0$ à la plaque négative.
Au départ, la charge est immobile à $y = 1\,\text{m}$. L'énergie initiale est donc

$$\begin{aligned} E_{\text{mec}} &= \frac{1}{2}mv^2 - qE_y y + mgy \\ &= 0 - (-5\times 10^{-6})\times 100\,000\times 1 + 0{,}1\times 9{,}8\times 1 = 0{,}5 + 0{,}98 = 1{,}48\,\text{J} \end{aligned}$$

Quand la charge frappe la plaque positive, elle a maintenant une vitesse et elle est à $y = 0$. On a

$$E'_{\text{mec}} = \frac{1}{2}mv'^2 - qE_y y' + mgy' = \frac{1}{2}\times 0{,}1\cdot v'^2 + 0 + 0 = 0{,}05\cdot v'^2$$

Avec la conservation de l'énergie on a donc

$$E_{\text{mec}} = E'_{\text{mec}} \qquad\longrightarrow\qquad 1{,}48 = 0{,}05\cdot v'^2 v' = 5{,}44\,\text{m/s}$$

Exercice 24 : Pour trouver l'énergie potentielle, on va séparer la tige en petite charge dont la charge est λdy. (On utilise dy puisque la longueur du petit morceau est verticale. On aurait quand même pu utiliser dx.) L'énergie de ce petit morceau est

$$dU_{\text{E}} = V dq = V\lambda dy$$

Le potentiel est le potentiel fait par la plaque (kQ/r). Comme une plaque fait un champ constant, le potentiel est

$$V = -E_x x - E_y y$$

Dans ce cas, il n'y a qu'une composante en y. Le potentiel est donc

$$V = -E_y y$$

Comme le champ d'une plaque est

$$E_y = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

le potentiel est

$$V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} y$$

L'énergie potentielle du petit morceau est donc

$$dU_\mathrm{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} y\lambda dy$$

En sommant l'énergie de tous les morceaux, on arrive à

$$U_\mathrm{E} = \int_{1\,\mathrm{m}}^{3\,\mathrm{m}} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} y\lambda dy$$

Les bornes d'intégrations sont 1 m et 3 m parce qu'un bout de la tige est à 1 m du $y = 0$ et l'autre bout est à 1 m du $y = 0$.

L'énergie est donc

$$U_\mathrm{E} = -\frac{\sigma\lambda}{2\varepsilon_0} \int_1^3 y dy = -\frac{\sigma\lambda}{2\varepsilon_0} \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^3 = -\frac{\sigma\lambda}{2\varepsilon_0} \left[\frac{(3)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right]$$

Comme la densité de la plaque est $\sigma = 40\,\mu\mathrm{C/m^2}$ et que la charge linéique de la tige est $\lambda = 60\,\mu\mathrm{C}/2\,\mathrm{m} = 30\,\mu\mathrm{C/m}$, l'énergie est

$$U_\mathrm{E} = -\frac{40\times10^{-6}\times30\times10^{-6}}{2\times8{,}854\times10^{-12}} \left[\frac{(3)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right] = -271{,}1\,\mathrm{J}$$

Exercice 25 :

(a) La différence de potentiel est

$$\Delta V = -E\Delta s\cos\theta = -5\,000\times(0{,}1)\times\cos(180^\circ) = 500\,\mathrm{V}$$

(b) La différence de potentiel est

$$\Delta V = -E\Delta s\cos\theta = -5\,000\times(0{,}1)\times\cos(45^\circ) = -353{,}6\,\mathrm{V}$$

Exercice 26 : La variation de potentiel est

$$\Delta V = -E\Delta s\cos\theta = -200\,000\times2\times\cos(35^\circ) = -327\,661\,\mathrm{V}$$

La variation d'énergie potentielle est donc

$$\Delta U_\mathrm{E} = q\Delta V = -2\times10^{-6}\times(-327\,661) = 0{,}655\,\mathrm{J}$$

Exercice 27 : Les composantes du déplacement sont

$$\Delta x = x' - x = -1 - 1 = -2\,\mathrm{m}$$
$$\Delta y = y' - y = 8 - 2 = 6\,\mathrm{m}$$
$$\Delta z = z' - z = -5 - 3 = -8\,\mathrm{m}$$

Le vecteur déplacement est donc

$$\overrightarrow{\Delta s} = (-2\,\overrightarrow{i} + 6\,\overrightarrow{j} - 8\,\overrightarrow{k})\,\mathrm{m}$$

La différence de potentiel est alors

$$\begin{aligned}\Delta V &= -\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\Delta s} = -(-2\,\overrightarrow{i} + 5\,\overrightarrow{j} - 3\,\overrightarrow{k}) \cdot (-2\,\overrightarrow{i} + 6\,\overrightarrow{j} - 8\,\overrightarrow{k}) \\ &= -(-2 \times (-2) + 5 \times 6 - 3 \times (-8)) = -(4 + 30 + 24) = -58\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

Exercice 28 : L'énergie mécanique de la charge est

$$E_{\mathrm{mec}} = \frac{1}{2}mv^2 + qV$$

Au départ, la vitesse est nulle. On va également choisir que le potentiel est nul à cet endroit. (Ce qui revient à placer notre $x = 0$ à cet endroit). L'énergie initiale est donc

$$E_{\mathrm{mec}} = 0$$

Après le déplacement, il y a une vitesse et le potentiel est maintenant de $-5\,000\,\mathrm{V}$. L'énergie est donc

$$E'_{\mathrm{mec}} = \frac{1}{2}mv'^2 + qV' = \frac{1}{2}0{,}25 \cdot v'^2 + 0{,}001 \times (-5\,000) = 0{,}125 \cdot v'^2 + (-5)$$

La conservation de l'énergie nous donne donc

$$E_{\mathrm{mec}} = E'_{\mathrm{mec}} \quad \longrightarrow \quad 0 = 0{,}125 \cdot v'^2 - 5 \quad \longrightarrow \quad 5 = 0{,}125 \cdot v'^2 \quad \longrightarrow \quad v' = 6{,}325\,\mathrm{m/s}$$

Exercice 29 : Si la force est de $3\,\mathrm{N}$, le champ est

$$F = qE \qquad \longrightarrow \qquad 3 = 6 \times 10^{-6} \cdot E \qquad \longrightarrow \qquad E = 5 \times 10^5\,\mathrm{N/C}$$

La différence de potentiel entre les plaques est donc de

$$\Delta V = Ed = 5 \times 10^5 \times 0{,}1 = 50\,000\,\mathrm{V}$$

Exercice 30 : Le travail est

$$W_{\mathrm{ext}} = \Delta E_{\mathrm{mec}}$$

L'énergie mécanique initiale est

$$E_{\mathrm{mec}} = \frac{1}{2}mv^2 + qV = \frac{1}{2} \times 0{,}1 \times (3)^2 + 0{,}001 \times 2\,000 = 0{,}45 + 2 = 2{,}45\,\mathrm{J}$$

L'énergie mécanique finale est

$$E'_{\mathrm{mec}} = \frac{1}{2}mv'^2 + qV' = \frac{1}{2} \times 0{,}1 \times (5)^2 + 0{,}001 \times 8\,000 = 1{,}25 + 8 = 9{,}25\,\mathrm{J}$$

Le travail est donc

$$W_{\mathrm{ext}} = \Delta E_{\mathrm{mec}} = E'_{\mathrm{mec}} - E_{\mathrm{mec}} = 9{,}25 - 2{,}45 = 6{,}8\,\mathrm{J}$$

Exercice 31 : Comme il y a une force électrique et une force gravitationnelle, l'énergie mécanique est

$$E_{\text{mec}} = \frac{1}{2}mv^2 + U_{\text{g}} + U_{\text{E}} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy - qE_x x - qE_y y$$

Il nous faudra les composantes du champ. Ces composantes sont

$$E_x = 200 \times \cos(30°) = 173{,}2\,\text{V/m} \qquad \text{et} \qquad E_y = 200 \times \sin(30°) = 100\,\text{V/m}$$

On va mettre l'origine de nos axes à la position initiale de l'objet. L'énergie initiale est donc

$$E_{\text{mec}} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy - qE_x x - qE_y y = \frac{1}{2} \times 0{,}1 \times (8)^2 + 0 - 0 - 0 = 3{,}2\,\text{J}$$

À l'endroit où on veut savoir la vitesse, l'énergie est

$$\begin{aligned} E'_{\text{mec}} &= \frac{1}{2}mv'^2 + mgy' - qE_x x' - qE_y y' \\ &= \frac{1}{2} \times 0{,}1 \times v^2 + 0{,}1 \times 9{,}8 \times 6{,}44 - 0{,}005 \times 173{,}2 \times 7{,}98 - 0{,}005 \times 100 \times 6{,}44 \\ &= 0{,}05 \cdot v^2 - 3{,}819\,5 \end{aligned}$$

Avec la conservation de l'énergie, on a

$$E_{\text{mec}} = E'_{\text{mec}} \qquad \longrightarrow \qquad 3{,}2 = 0{,}05 \cdot v^2 - 3{,}819\,5 \qquad \longrightarrow \qquad v = 11{,}85\,\text{m/s}$$

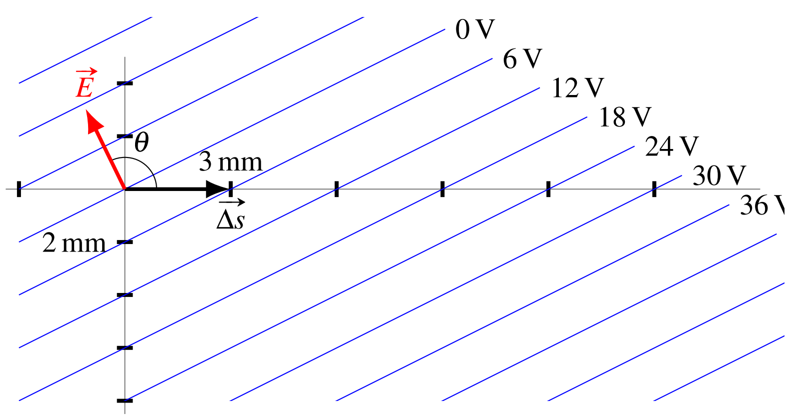
Exercice 32 : On va trouver la grandeur du champ en utilisant la formule qui donne la variation de potentiel entre deux points dans un champ uniforme.

$$\Delta V = -E \Delta s \cos\theta$$

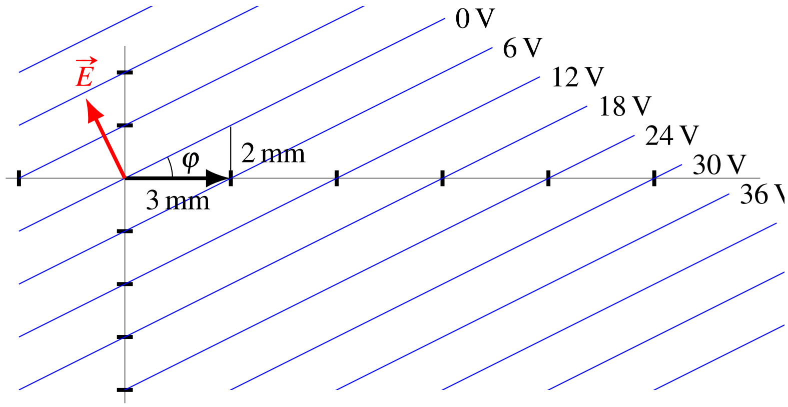
On va utiliser les deux points suivants.

$$(0\,\text{mm}, 0\,\text{mm}) : V = 0\,\text{V}$$
$$(3\,\text{mm}, 0\,\text{mm}) : V = 6\,\text{V}$$

On a donc $\Delta V = 6\,\text{V}$ et $\Delta s = 0{,}003\,\text{m}$. Reste à trouver l'angle entre le déplacement et le champ électrique. Le champ est perpendiculaire aux lignes équipotentielles, dans la direction où le potentiel baisse. On a donc la situation suivante.



On peut alors trouver l'angle φ sur la figure suivante.



Cet angle est

$$\tan\phi = \frac{2}{3} \qquad \longrightarrow \qquad \phi = 33{,}7^\circ$$

Pour l'angle θ, on ajoute simplement 90° pour obtenir 123,7°. On a alors

$$\Delta V = -E\Delta s\cos\theta \quad \longrightarrow \quad 6 = -E\cdot 0{,}003\times\cos(123{,}7^\circ) \quad \longrightarrow \quad E = 3\,605{,}6\,\mathrm{V/m}$$

Exercice 33 :

(a) Pour trouver la différence de potentiel, il faut séparer la trajectoire en 3 parties.

$$\begin{aligned}\Delta V &= \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = -E_1\Delta s_1\cos\theta_1 - E_2\Delta s_2\cos\theta_2 - E_3\Delta s_3\cos\theta_3\\ &= -1\,000\times 0{,}003\cdot\cos(35^\circ) - 2\,000\times 0{,}002\cdot\cos(145^\circ) - 3\,000\times 0{,}001\cdot\cos(35^\circ)\\ &= -2{,}457 - (-3{,}277) - 2{,}457 = -1{,}638\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

(b) Le changement d'énergie est

$$\Delta U_\mathrm{E} = q\Delta V = -1{,}602\times 10^{-19}\times(-1{,}638) = 2{,}624\times 10^{-19}\,\mathrm{J} = 1{,}638\,\mathrm{eV}$$

En fait, le calcul est plus simple si on se rappelle que l'électronvolt est le changement d'énergie potentielle d'un électron quand il y a un changement de potentiel de 1 V. On a donc

$$1\,\mathrm{eV} = 1e\cdot 1\,\mathrm{V} = 1e\cdot\mathrm{V}$$

On aurait donc pu écrire

$$\Delta U_\mathrm{E} = q\Delta V = -e\cdot(-1{,}638\,\mathrm{V}) = 1{,}638e\cdot\mathrm{V} = 1{,}638\,\mathrm{eV}$$

Exercice 34 :

(a) Pour trouver la différence de potentiel, il faut séparer la trajectoire en 3 parties.

$$\begin{aligned}\Delta V &= \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = -E_1\Delta s_1\cos\theta_1 - E_2\Delta s_2\cos\theta_2 - E_3\Delta s_3\cos\theta_3\\ &= -2\,000\times 10\cdot\cos(0^\circ) - 2\,000\times 8\cdot\cos(90^\circ) - 2\,000\times 12\cdot\cos(135^\circ)\\ &= -20\,000 - 0 - (-16\,971) = -3\,029\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

(b) Le changement d'énergie est

$$\Delta U_\mathrm{E} = q\Delta V = 2\times 10^{-3}\times(-3\,029) = -6{,}059\,\mathrm{J}$$

Exercice 35 : La différence de potentiel est

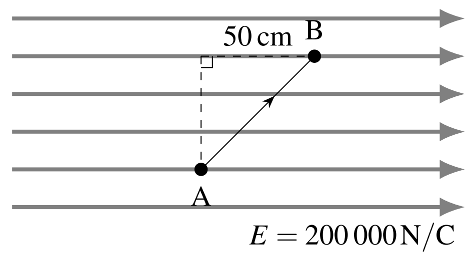
$$\Delta V = -\int E_x dx = -\int_{0\,\mathrm{m}}^{10\,\mathrm{m}} 30 \times \mathrm{e}^{-\frac{x}{5}} dx = \left[-30 \times \mathrm{e}^{-\frac{x}{5}} \times \frac{1}{-\frac{1}{5}} \right]_0^{10}$$

$$= \left[150 \times \mathrm{e}^{-\frac{x}{5}} \right]_0^{10} = \left(150 \times \mathrm{e}^{-\frac{10}{5}} \right) - \left(150 \times \mathrm{e}^{-\frac{0}{2}} \right) = \left(150 \times \mathrm{e}^{-2} \right) - (150) = -129{,}7\,\mathrm{V}$$

Exercice 36 : Il serait assez difficile de calculer la différence de potentiel en suivant la trajectoire en arc de cercle parce que l'angle entre le champ et la trajectoire change constamment. Il faudrait utiliser

$$\Delta V = -\int E \cos\theta \, ds$$

et trouver une formule qui nous donne l'angle en fonction de la position sur l'arc de cercle. Cependant, on a vu que la différence de potentiel entre deux points est indépendante de la trajectoire entre ces points. On va donc utiliser cet autre trajet pour calculer la différence de potentiel.



Puisque le champ et l'angle sont constants, on peut alors calculer la différence de potentiel avec

$$\Delta V = -E \Delta s \cos\theta = -200\,000 \sqrt{(0{,}5)^2 + (0{,}5)^2} \cdot \cos(45°) = -100\,000\,\mathrm{V}$$

Exercice 37 : La composante en x du champ est

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial (2xyz - 2x^2y + 4xz^2 - 12y^2z)}{\partial x} = -(2yz - 4xy + 4z^2 - 0)$$

Au point (2 m, −3 m, 1 m), cela donne

$$E_x = -(2 \times (-3) \times 1 - 4 \times 2 \times (-3) + 4 \times (1)^2) = -(-6 + 24 + 4) = -22\,\mathrm{V/m}$$

La composante en y du champ est

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial (2xyz - 2x^2y + 4xz^2 - 12y^2z)}{\partial y} = -(2xz - 2x^2 + 0 - 24yz)$$

Au point (2 m, −3 m, 1 m), cela donne

$$E_y = -(2 \times 2 \times 1 - 2 \times (2)^2 - 24 \times (-3) \times 1) = -(4 - 8 + 72) = -68\,\mathrm{V/m}$$

La composante en z du champ est

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial (2xyz - 2x^2y + 4xz^2 - 12y^2z)}{\partial z} = -(2xy - 0 + 8xz - 12y^2)$$

Au point (2 m, −3 m, 1 m), cela donne

$$E_y = -(2\times 2\times(-3)+8\times 2\times 1-12\times(-3)^2) = -(-12+16-108) = 104\,\mathrm{V/m}$$

Le champ est donc

$$\vec{E} = (-22\,\vec{i} - 68\,\vec{j} + 104\,\vec{k}\,)\,\mathrm{V/m}$$

Exercice 38 : Le champ est

$$E_z = \frac{kQz}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{9\times 10^9\times 80\times 10^{-6}\times 0{,}24}{((0{,}18)^2+(0{,}24)^2)^{\frac{3}{2}}} = 6{,}4\times 10^6\,\mathrm{N/C}$$

Exercice 39 :

(a) Le potentiel est

$$V = \frac{kQ_1}{r_1}+\frac{kQ_2}{r_2} = \frac{kQ}{\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{kQ}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{2kQ}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

(b) La composante en x du champ est

$$E = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2kQ}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\frac{2kQ}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}2x\right) = \frac{2kQx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Exercice 40 : L'énergie potentielle est

$$\begin{aligned}
U_\mathrm{E} = \sum\frac{kq_iq_j}{r_{ij}} &= \frac{kq_1q_2}{r_{12}}+\frac{kq_1q_3}{r_{13}}+\frac{kq_1q_4}{r_{14}}+\frac{kq_2q_3}{r_{23}}+\frac{kq_2q_4}{r_{24}}+\frac{kq_3q_4}{r_{34}}\\
&= \frac{9\times 10^9\times 6\times 10^{-6}\times(-20\times 10^{-6})}{0{,}3}+\frac{9\times 10^9\times 6\times 10^{-6}\times 2\times 10^{-6}}{0{,}3}\\
&\quad +\frac{9\times 10^9\times 6\times 10^{-6}\times 12\times 10^{-6}}{\sqrt{2}\times 0{,}3}+\frac{9\times 10^9\times(-20\times 10^{-6})\times 2\times 10^{-6}}{\sqrt{2}\times 0{,}3}\\
&\quad +\frac{9\times 10^9\times(-20\times 10^{-6})\times 12\times 10^{-6}}{0{,}3}+\frac{9\times 10^9\times 2\times 10^{-6}\times 12\times 10^{-6}}{0{,}3}\\
&= -3{,}6+0{,}36+1{,}527\,4-0{,}848\,5-7{,}2+0{,}72\\
&= -9{,}041\,2\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

Exercice 41 : L'énergie potentielle est

$$\begin{aligned}
U_\mathrm{E} = \sum\frac{kq_iq_j}{r_{ij}} &= \frac{kq_1q_2}{r_{12}}+\frac{kq_1q_3}{r_{13}}+\frac{kq_2q_3}{r_{23}}\\
&= \frac{9\times 10^9\times(-1\times 10^{-9})\times 2\times 10^{-9}}{0{,}03}\\
&\quad +\frac{9\times 10^9\times(-1\times 10^{-9})\times(-1\times 10^{-9})}{0{,}03}+\frac{9\times 10^9\times 2\times 10^{-9}\times(-1\times 10^{-9})}{0{,}03}\\
&= -6\times 10^{-7}+3\times 10^{-7}-6\times 10^{-7}\\
&= -9\times 10^{-7}\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

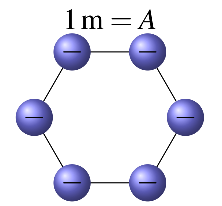
Il faut donc fournir 9×10^{-7} J pour détruire ce groupe de charges.

Exercice 42 :

(a) On va résoudre ce problème avec la conservation de l'énergie. Ici, on va utiliser le moins de paires possible pour calculer la variation d'énergie potentielle électrique.

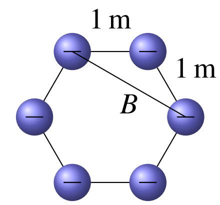
Comme on laisse partir seulement la charge 1, on va faire seulement toutes les paires possibles dans lesquelles il y a la charge 1. Il y a 5 de ces paires. (1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 5, 1 et 6)

Pour calculer l'énergie, il nous faut les distances dans l'hexagone.



On a premièrement la distance entre des charges voisines. On va appeler cette distance A.

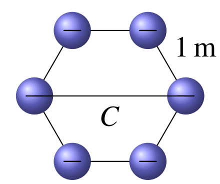
On a ensuite la distance B montrée sur cette figure.



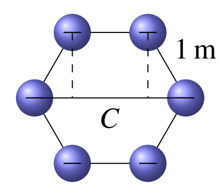
Cette distance se trouve avec la loi des cosinus. On a

$$B^2 = (1)^2 + (1)^2 - 2 \times (1) \times (1) \times \cos(120°) = 3\,\mathrm{m}^2$$
$$B = \sqrt{3}\,\mathrm{m}$$

On a ensuite la distance C montrée sur cette figure.



Pour trouver cette distance, on va former 2 triangles.



La longueur de la base de ces triangles est

$$\cos(60°) = \frac{L}{1} \quad \text{soit} \quad L = 0{,}5\,\mathrm{m}$$

La longueur C est donc égale à

$$C = 0{,}5 + 1 + 0{,}5 = 2\,\mathrm{m}$$

On peut maintenant calculer l'énergie potentielle avec les 5 paires. Dans ces 5 paires, il y en 2 avec la distance A, 2 avec la distance B et une avec la distance C. On a donc

$$U_\mathrm{E} = \sum \frac{kq_iq_j}{r_{ij}} = 9 \times 10^9 \times (-2 \times 10^{-6}) \times (-2 \times 10^{-6}) \left(2\frac{1}{1} + 2\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right) = 0{,}131\,57\,\mathrm{J}$$

La conservation de l'énergie nous donne alors

$$E_\mathrm{mec} = E'_\mathrm{mec} \longrightarrow E_\mathrm{k} + U_\mathrm{E} = E'_\mathrm{k} + U'_\mathrm{E} \longrightarrow 0 + 0{,}131\,57 = E'_\mathrm{k} + 0 \longrightarrow E'_\mathrm{k} = 0{,}131\,57\,\mathrm{J}$$

On a donc

$$\frac{1}{2}mv'^2 = 0{,}131\,57\,\mathrm{J} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot 0{,}01v'^2 = 0{,}131\,57 \quad \longrightarrow \quad v' = 5{,}13\,\mathrm{m/s}$$

(b) Encore une fois, on va résoudre ce problème en considérant le moins de paires de charges pour calculer la variation d'énergie potentielle.

Comme on laisse partir seulement les charges 1, 3 et 5 on va faire seulement toutes les paires possibles dans lesquelles il y a les charges 1, 3 et 5. Il y a 12 de ces paires. (1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 5, 1 et 6, 3 et 2, 3 et 4, 3 et 5, 3 et 6, 5 et 2, 5 et 4, 5 et 6)

Dans ces 12 paires, il y en 6 avec la distance A, 3 avec la distance B et 3 avec la distance C. On a donc

$$U_{\mathrm{E}} = \sum \frac{kq_iq_j}{r_{ij}} = 9\times 10^9 \times (-2\times 10^{-6}) \times (-2\times 10^{-6}) \left(6\frac{1}{1} + 3\frac{1}{\sqrt{3}} + 3\frac{1}{2}\right) = 0{,}332\,35\,\mathrm{J}$$

La conservation de l'énergie nous donne alors

$$E_{\mathrm{mec}} = E'_{\mathrm{mec}} \longrightarrow E_{\mathrm{k}} + U_{\mathrm{E}} = E'_{\mathrm{k}} + U'_{\mathrm{E}} \longrightarrow 0 + 0{,}332\,35 = E'_{\mathrm{k}} + 0 \longrightarrow E'_{\mathrm{k}} = 0{,}332\,35\,\mathrm{J}$$

Cette énergie cinétique est l'énergie de 3 charges. On a donc

$$3\cdot\frac{1}{2}mv'^2 = 0{,}332\,35\,\mathrm{J} \quad \longrightarrow \quad 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 0{,}01v'^2 = 0{,}332\,35 \quad \longrightarrow \quad v' = 4{,}71\,\mathrm{m/s}$$

(c) Comme on laisse partir les 6 charges, on va faire toutes les paires possibles. Il y a 15 de ces paires. (1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 5, 1 et 6, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 6, 3 et 4, 3 et 5, 3 et 6, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6)

Dans ces 15 paires, il y en 6 avec la distance A, 6 avec la distance B et 3 avec la distance C. On a donc

$$U_{\mathrm{E}} = \sum \frac{kq_iq_j}{r_{ij}} = 9\times 10^9 \times (-2\times 10^{-6}) \times (-2\times 10^{-6}) \left(6\frac{1}{1} + 6\frac{1}{\sqrt{3}} + 3\frac{1}{2}\right) = 0{,}394\,71\,\mathrm{J}$$

La conservation de l'énergie nous donne alors

$$E_{\mathrm{mec}} = E'_{\mathrm{mec}} \longrightarrow E_{\mathrm{k}} + U_{\mathrm{E}} = E'_{\mathrm{k}} + U'_{\mathrm{E}} \longrightarrow 0 + 0{,}332\,35 = E'_{\mathrm{k}} + 0 \longrightarrow E'_{\mathrm{k}} = 0{,}394\,71\,\mathrm{J}$$

Cette énergie cinétique est l'énergie de 6 charges. On a donc

$$6\cdot\frac{1}{2}mv'^2 = 0{,}394\,71\,\mathrm{J} \quad \longrightarrow \quad 6\cdot\frac{1}{2}\cdot 0{,}01v'^2 = 0{,}394\,71 \quad \longrightarrow \quad v' = 3{,}63\,\mathrm{m/s}$$

Exercice 43 :

(a) Comme le potentiel à l'intérieur d'un conducteur est le même que celui à la surface du conducteur, le potentiel au centre est aussi de 450 V.

(b) On trouve la charge de la sphère avec la formule donnant le potentiel.

$$V = \frac{kQ}{r} \qquad \longrightarrow \qquad 450 = \frac{9\times 10^9 \times Q}{0{,}25} \qquad \longrightarrow \qquad Q = 1{,}25\times 10^{-8}\,\mathrm{C}$$

Le nombre d'électrons enlevés est donc

$$Q = Ne \qquad \longrightarrow \qquad 1{,}25\times 10^{-8} = N \times 1{,}602\times 10^{-19} \qquad \longrightarrow \qquad N = 7{,}802\times 10^{10}$$

(c) La charge surfacique est

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{1{,}25\times 10^{-8}}{4\pi(0{,}25)^2} = 1{,}592\times 10^{-8}\,\mathrm{C/m^2}$$

(d) Le champ juste au-dessus de la surface est

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1{,}592 \times 10^{-8}}{8{,}854 \times 10^{-12}} = 1\,797{,}5\,\mathrm{N/C}$$

(e) L'énergie est

$$U_\mathrm{E} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2} \times 1{,}25 \times 10^{-8} \times 450 = 2{,}812\,5 \times 10^{-6}\,\mathrm{J}$$

Exercice 44 : Puisque les deux sphères ont le même potentiel, on a

$$\frac{kQ_1}{R_1} = \frac{kQ_2}{R_2} \quad \longrightarrow \quad \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \quad \longrightarrow \quad \frac{20}{10} = \frac{Q_2}{18} \quad \longrightarrow \quad Q_2 = 36\,\mu\mathrm{C}$$

Exercice 45 :

(a) Quand les sphères sont reliées par le fil, elles deviennent le même conducteur et elles échangent des charges jusqu'à ce qu'elles aient le même potentiel. On aura donc

$$V_\mathrm{A} = V_\mathrm{B} \quad \longrightarrow \quad \frac{kQ'_\mathrm{A}}{R_\mathrm{A}} = \frac{kQ'_\mathrm{B}}{R_\mathrm{B}} \quad \longrightarrow \quad \frac{Q'_\mathrm{A}}{0{,}08} = \frac{Q'_\mathrm{B}}{0{,}24}$$

(On note les charges après l'échange avec des primes.)

Il nous faut une autre équation pour résoudre ce problème. Cette équation est la conservation de la charge. La somme des charges des sphères avant l'échange doit être égale à la somme des charges après l'échange.

$$Q_\mathrm{A} + Q_\mathrm{B} = Q'_\mathrm{A} + Q'_\mathrm{B} \quad \longrightarrow \quad 120 + (-40) = Q'_\mathrm{A} + Q'_\mathrm{B} \quad \longrightarrow \quad 80 = Q'_\mathrm{A} + Q'_\mathrm{B}$$

Si on isole Q'_B dans cette équation et qu'on remplace dans l'équation des potentiels, on obtient

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{Q'_\mathrm{A}}{0{,}08} = \dfrac{Q'_\mathrm{B}}{0{,}24} & & 0{,}24Q'_\mathrm{A} = 0{,}08(80 - Q'_\mathrm{A}) & & 0{,}32Q'_\mathrm{A} = 6{,}4 \\ & \longrightarrow & & \longrightarrow & \\ \dfrac{Q'_\mathrm{A}}{0{,}08} = \dfrac{80 - Q'_\mathrm{A}}{0{,}24} & & 0{,}24Q'_\mathrm{A} = 6{,}4 - 0{,}08Q'_\mathrm{A} & & Q'_\mathrm{A} = 20\,\mu\mathrm{C} \end{array}$$

Ce qui nous permet d'obtenir $Q'_\mathrm{A} = 20\,\mu\mathrm{C}$ et $Q'_\mathrm{B} = 60\,\mu\mathrm{C}$.

(b) Le potentiel après l'échange de charge est

$$V' = \frac{kQ'_\mathrm{A}}{R_\mathrm{A}} = \frac{9 \times 10^9 \times 20 \times 10^{-6}}{0{,}08} = 2\,250\,000\,\mathrm{V}$$

Exercice 46 : Chacune des gouttes a une certaine charge Q et un rayon R. On sait que

$$\frac{kQ}{R} = 30\,\mathrm{V}$$

En fusionnant les deux gouttes, les *charges* s'additionnent. La grosse goutte a donc une charge de $2Q$. On a donc

$$Q' = 2Q$$

En fusionnant les deux gouttes, les *volumes* s'additionnent. La grosse goutte a donc un volume de $2(\text{Vol})$. Cela signifie que

$$\begin{gathered}
\text{Vol}' = \text{Vol} + \text{Vol} \\
\frac{4}{3}\pi R'^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{4}{3}\pi R^3 \\
R'^3 = R^3 + R^3 = 2R^3 \\
R' = \sqrt[3]{2} \cdot R
\end{gathered}$$

Le potentiel de la grosse goutte est donc

$$V' = \frac{kQ'}{R'} = \frac{k2Q}{\sqrt[3]{2} \cdot R} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} \frac{kQ}{R}$$

Puisque

$$\frac{kQ}{R} = 30\,\text{V}$$

on a

$$V' = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} \frac{kQ}{R} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} \times 30 = 47{,}62\,\text{V}$$

Exercice 47 : On trouve le champ entre les plaques avec

$$\Delta V = Ed \qquad \longrightarrow \qquad 1\,000 = E \cdot 0{,}1 \qquad \longrightarrow \qquad E = 10\,000\,\text{N/C}$$

La densité d'énergie est donc

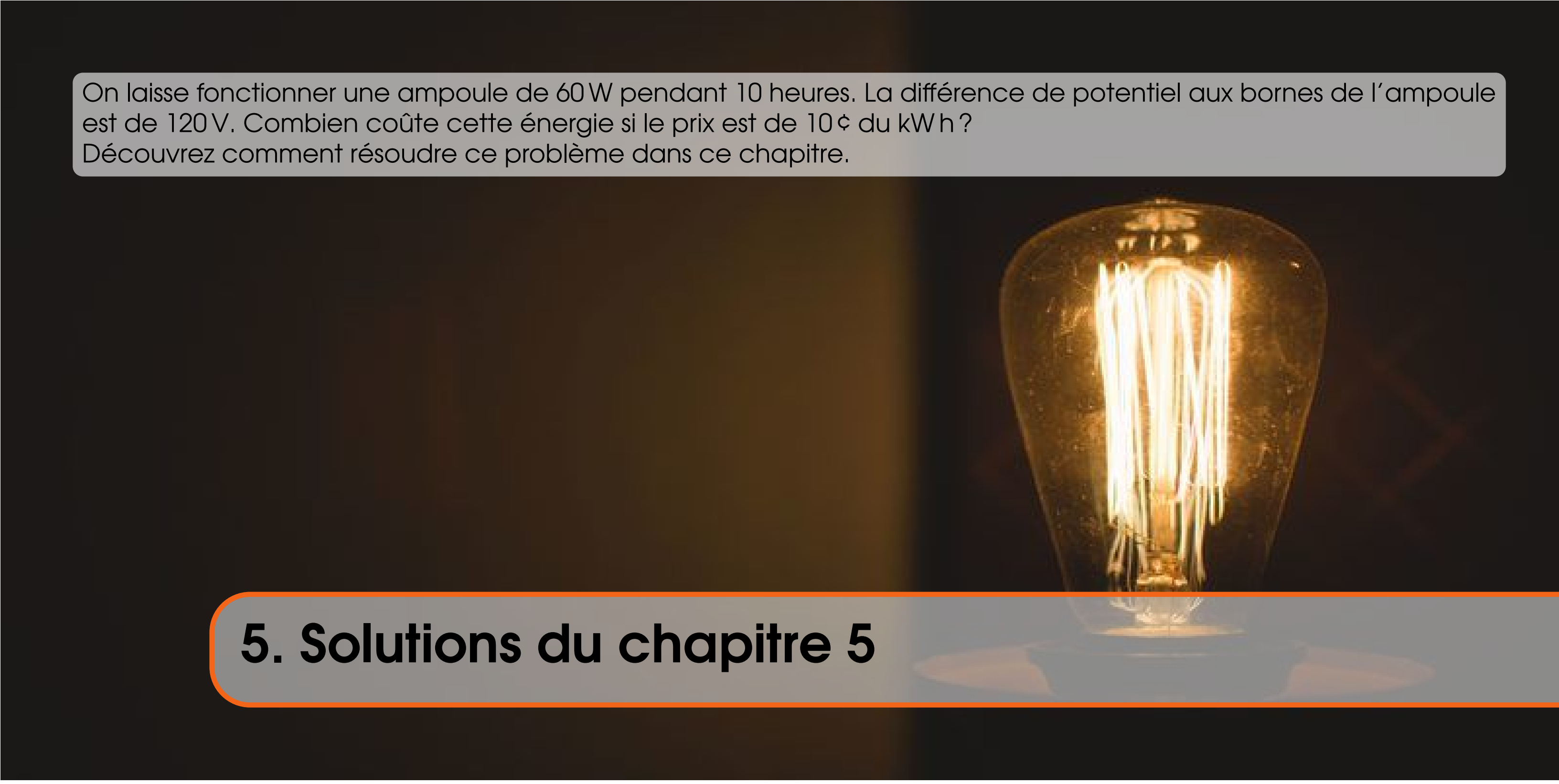
$$u_\text{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times (10\,000)^2 = 4{,}427 \times 10^{-4}\,\text{J/m}^3$$

Exercice 48 : La densité d'énergie est

$$u_\text{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times (20\,000)^2 = 1{,}771 \times 10^{-3}\,\text{J/m}^3$$

L'énergie dans le cube est

$$U = u_\text{E} \cdot \text{volume} = 1{,}771 \times 10^{-3} \times (2)^3 = 0{,}014\,17\,\text{J}$$



On laisse fonctionner une ampoule de 60 W pendant 10 heures. La différence de potentiel aux bornes de l'ampoule est de 120 V. Combien coûte cette énergie si le prix est de 10 ¢ du kW h ?
Découvrez comment résoudre ce problème dans ce chapitre.

5. Solutions du chapitre 5

Exercice 1 : Le courant moyen est

$$I = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{30}{5} = 6\,\mathrm{A}$$

Exercice 2 : On a

$$\frac{dQ}{dt} = I$$

$$\frac{dQ}{dt} = 3t^2 + 8t + 2$$

$$Q = \int_{0\,\mathrm{s}}^{5\,\mathrm{s}} (3t^2 + 8t + 2)dt$$

$$Q = \left[1t^3 + 4t^2 + 2t\right]_{0\,\mathrm{s}}^{5\,\mathrm{s}} = \left[1 \times (5)^3 + 4 \times (5)^2 + 2 \times (5)\right] - [0] = 235\,\mathrm{C}$$

Exercice 3 : On a

$$I = \frac{Q}{\Delta t}$$

La charge qui entre dans le fil en 1 seconde est

$$10 = \frac{Q}{1} \qquad \text{soit} \qquad Q = 10\,\mathrm{C}$$

Le nombre d'électrons que représente cette charge est

$$Q = Ne \qquad \text{soit} \qquad 10 = N \cdot 1{,}602 \times 10^{-19} \qquad \text{et} \qquad N = 6{,}242 \times 10^{19}$$

Exercice 4 : Le champ électrique est

$$E = \frac{\Delta V}{l} = \frac{40}{10} = 4\,\mathrm{V/m} = 4\,\mathrm{N/C}$$

Exercice 5 : On a

$$Q = I\Delta t \qquad \text{soit} \qquad 0{,}75 = 50 \times 10^{-3} \cdot \Delta t \qquad \text{et} \qquad \Delta t = 15\,\mathrm{h}$$

Exercice 6 : On a

$$I = nev_{\mathrm{d}}A$$
$$5 = 2\times 10^{28}\times 1{,}602\times 10^{-19}\times v_{\mathrm{d}}\times \pi \times (0{,}001)^2$$
$$v_{\mathrm{d}} = 4{,}967\times 10^{-4}\,\mathrm{m/s}$$

Exercice 7 :

(a) Trouvons premièrement la densité d'électrons libres de l'aluminium.

$$n = \text{valence}\times \frac{\rho N_{\mathrm{A}}}{M} = 3\times \frac{2\,699\times 6{,}02\times 10^{23}}{0{,}026\,982} = 1{,}807\times 10^{29}\,\mathrm{m}^{-3}$$

La vitesse de dérive est donc

$$I = nev_{\mathrm{d}}A$$
$$0{,}05 = 1{,}807\times 10^{29}\times 1{,}602\times 10^{-19}\times v_{\mathrm{d}}\times \pi \times (0{,}000\,5)^2$$
$$v_{\mathrm{d}} = 2{,}199\times 10^{-6}\,\mathrm{m/s}$$

(b)

$$t = \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}} = \frac{5}{2{,}199\times 10^{-6}} = 2{,}274\times 10^{6}\,\mathrm{s} = 26 \text{ jours } 7 \text{ heures } 40 \text{ minutes } 56 \text{ secondes}$$

Exercice 8 : Si le fil a une longueur L, le temps est

$$t = \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}} = \frac{L}{v_{\mathrm{d}}}$$

La vitesse de dérive se trouve avec la formule suivante.

$$I = nev_{\mathrm{d}}A \qquad \text{soit} \qquad v_{\mathrm{d}} = \frac{I}{neA}$$

Le temps est donc

$$t = \frac{L}{v_{\mathrm{d}}} = \frac{LneA}{I}$$

Or, le volume du cylindre est vol $= Ad$. On a donc

$$t = \frac{ne(\text{vol})}{I}$$

Il y a un lien entre le volume du cylindre et la masse volumique ρ. Ce lien est

$$\rho = \frac{m}{\text{vol}}$$

Cela signifie que le volume est

$$\text{vol} = \frac{m}{\rho}$$

Le temps devient donc

$$t = \frac{ne(\text{vol})}{I} = \frac{nem}{I\rho}$$

Finalement, la densité d'électrons libres est

$$n = \text{valence} \times \frac{\rho N_\text{A}}{M}$$

Le temps est donc

$$t = \text{valence} \times \frac{\rho N_\text{A}}{M} \cdot \frac{em}{I\rho} = \text{valence} \times \frac{N_\text{A}}{M} \cdot \frac{em}{I}$$

En utilisant les valeurs, on obtient

$$t = \text{valence} \times \frac{N_\text{A}}{M} \cdot \frac{em}{I} = 3 \times \frac{6{,}02 \times 10^{23}}{0{,}026\,982} \cdot \frac{1{,}602 \times 10^{-19} \times 0{,}004}{8} = 5\,361\,\text{s}$$

Exercice 9 : La résistance est

$$\Delta V = RI \qquad \text{soit} \qquad 100 = R \times 0{,}05 \qquad \text{et} \qquad R = 2\,000\,\Omega$$

Exercice 10 :

(a) La résistance est

$$R = \rho\frac{l}{A} = 1{,}678 \times 10^{-8} \times \frac{8}{\pi \times (0{,}000\,5)^2} = 0{,}170\,9\,\Omega$$

(b) Le courant est

$$\Delta V = RI \qquad \text{soit} \qquad 50 = 0{,}170\,9 \times I \qquad \text{et} \qquad I = 292{,}5\,\text{A}$$

Exercice 11 : Si les fils ont la même résistance, alors on a

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 \\ \rho_\text{Cu}\frac{l_1}{A_1} &= \rho_\text{Al}\frac{l_2}{A_2} \\ 1{,}678 \times 10^{-8} \times \frac{10}{\pi(0{,}001)^2} &= 2{,}650 \times 10^{-8} \times \frac{50}{\pi r_2^2} \\ 1{,}678 \times \frac{10}{(0{,}001)^2} &= 2{,}650 \times \frac{50}{r_2^2} \\ r_2 &= 2{,}81 \times 10^{-3}\,\text{m} = 2{,}81\,\text{mm} \\ d_2 &= 2 \times 2{,}81 = 5{,}62\,\text{mm} \end{aligned}$$

Exercice 12 : On a

$$R = \rho\frac{l}{A} \qquad \text{soit} \qquad 559 = \rho\frac{100}{\pi(0{,}000\,05)^2} \qquad \text{et} \qquad \rho = 4{,}39 \times 10^{-8}\,\Omega\text{m}$$

Selon le tableau, ce fil est fait de magnésium.

Exercice 13 : Trouvons la résistivité avec les données du premier fil.

$$R = \rho\frac{l}{A} \qquad \text{soit} \qquad 5 = \rho \times \frac{40}{\pi(0{,}000\,5)^2} \qquad \text{et} \qquad \rho = 9{,}817 \times 10^{-8}\,\Omega\text{m}$$

La résistance du deuxième fil est donc

$$R = \rho\frac{l}{A} = 9{,}817 \times 10^{-8} \times \frac{60}{\pi(0{,}000\,1)^2} = 187{,}5\,\Omega$$

Exercice 14 : La résistance est

$$R = \rho \frac{l}{A} = 20{,}8 \times 10^{-8} \frac{0{,}1}{(0{,}03 \times 0{,}04)} = 1{,}733 \times 10^{-5}\,\Omega$$

Exercice 15 : L'aire du bout de cet objet consiste en la moitié de l'aire d'un cercle de 20 cm de rayon à laquelle on soustrait la moitié de l'aire d'un cercle de 18 cm de rayon.

$$A = \frac{1}{2}\pi(0{,}2)^2 - \frac{1}{2}\pi(0{,}18)^2 = 0{,}011\,94\,\mathrm{m}^2$$

La résistance est donc

$$R = \rho \frac{l}{A} = 10{,}5 \times 10^{-8} \frac{1}{0{,}011\,94} = 8{,}795 \times 10^{-6}\,\Omega$$

Exercice 16 : La puissance est

$$P = RI^2 = 100 \times (8)^2 = 6\,400\,\mathrm{W}$$

Exercice 17 : Le courant est

$$P = I \cdot \Delta V \qquad \text{soit} \qquad 60 = I \cdot 12 \qquad \text{et} \qquad I = 5\,\mathrm{A}$$

On a donc

$$Q = I \cdot \Delta t \qquad \text{soit} \qquad 80 = 5 \cdot \Delta t \qquad \text{soit} \qquad \Delta t = 16\,\mathrm{h}$$

Exercice 18 : La résistance du fil est

$$R = \rho \frac{l}{A} = 1{,}678 \times 10^{-8} \frac{10}{\pi(0{,}000\,1)^2} = 5{,}341\,\Omega$$

La puissance dissipée est donc

$$P = \frac{\Delta V^2}{R} = \frac{(120)^2}{5{,}341} = 2\,696\,\mathrm{W}$$

Exercice 19 : La puissance dissipée en chaleur est

$$P_R = RI^2 = 4\,000 \times (0{,}5)^2 = 1\,000\,\mathrm{W}$$

On doit donc avoir

$$1\,000 = \sigma A(T^4 - T_0^4)$$

On doit donc maintenant trouver l'aire de cet objet. On va négliger les bouts de la résistance. Le côté de la résistance a une aire de

$$A = (2\pi r)L = (2\pi \times 0{,}2) \times 2 = 2{,}513\,\mathrm{m}^2$$

On a donc

$$1\,000 = \sigma A(T^4 - T_0^4)$$
$$1\,000 = 5{,}67 \times 10^{-8} \times 2{,}513 \times (T^4 - (293)^4)$$
$$T = 346\,\mathrm{K} = 73\,^\circ\mathrm{C}$$

Exercice 20 : La puissance dissipée en chaleur est

$$P = RI^2 = 250 \times (4)^2 = 4\,000\,\text{W}$$

L'énergie nécessaire pour chauffer l'eau est

$$E = 4\,190 \times 2{,}5 \times (80 - 20) = 628\,500\,\text{J}$$

Le temps est donc

$$E = P\Delta t \qquad \text{soit} \qquad 628\,500 = 4\,000 \times \Delta t \qquad \text{et} \qquad \Delta t = 157{,}1\,\text{s}$$

Exercice 21 : La puissance fournie par la borne est

$$P = I \cdot \Delta V = 16 \times 120 = 1\,920\,\text{W}$$

Le temps de recharge est donc

$$E = P\Delta t \qquad \text{soit} \qquad 16 = 1{,}92 \times \Delta t \qquad \text{et} \qquad \Delta t = 8{,}33\,\text{h}$$

Exercice 22 : La résistance est

$$R = R_0(1 + \alpha(T - T_0)) = 10 \times (1 + 0{,}003\,9 \times (80 - 20)) = 12{,}34\,\Omega$$

Exercice 23 : On a

$$R = R_0(1 + \alpha(T - T_0)) \implies 18{,}2 = 20 \times (1 + 0{,}004\,5 \times (T - 30)) \implies T = 10\,^\circ\text{C}$$

Exercice 24 : Trouvons la valeur de α avec les données à 0 °C et 40 °C. On a

$$R = R_0(1 + \alpha(T - T_0)) \implies 12 = 10 \times (1 + \alpha(40 - 0)) \implies \alpha = 0{,}005\,\text{K}^{-1}$$

On peut maintenant trouver la résistance à 100 °C.

$$R = R_0(1 + \alpha(T - T_0)) = 10 \times (1 + 0{,}005 \times (100 - 0)) = 15\,\Omega$$

Exercice 25 : À 20 °C, on a

$$P_0 = \frac{\Delta V^2}{R_0}$$

À la nouvelle température, on a

$$P = \frac{\Delta V^2}{R}$$

Puisqu'on veut que $P = 1{,}25P_0$, on a

$$P = 1{,}25P_0 \implies \frac{\Delta V^2}{R} = 1{,}25\frac{\Delta V^2}{R_0} \implies \frac{1}{R} = 1{,}25\frac{1}{R_0} \implies R_0 = 1{,}25R$$

On a donc

$$\begin{gathered}
R = R_0(1 + \alpha(T - T_0)) \\
R = 1{,}25R \times (1 + 0{,}005(T - 20)) \\
1 = 1{,}25(1 + 0{,}005(T - 20)) \\
T = -20\,^\circ\text{C}
\end{gathered}$$

Cette page est intentionnellement laissée en blanc.

6. Solutions du chapitre 6

Exercice 1 :

(a) La puissance de la source est

$$P = I\mathscr{E} = 6 \times 24 = 144\,\mathrm{W}$$

(b) La charge qui est passée par la source est

$$Q = I\Delta t = 6 \times 120 = 720\,\mathrm{C}$$

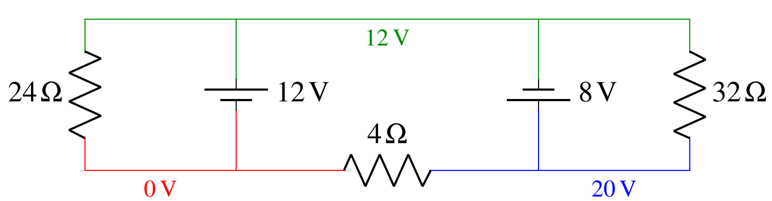
L'énergie fournie par la source est donc

$$E = Q\mathscr{E} = 720 \times 24 = 17\,280\,\mathrm{J}$$

On aurait aussi pu trouver cette énergie avec

$$E = P\Delta t = 144 \times 120 = 17\,280\,\mathrm{J}$$

Exercice 2 : En posant que le fil du bas à gauche est à 0 V, l'image suivante vous montre les potentiels des fils.



On remarque qu'il y a une différence de potentiel de 12 V aux bornes de la résistance de 24 Ω. Le courant est donc

$$I_{24\,\Omega} = \frac{12}{24} = 0{,}5\,\mathrm{A}$$

Ce courant est vers le bas, soit du potentiel le plus haut vers le potentiel le plus bas.

On remarque qu'il y a une différence de potentiel de 20 V aux bornes de la résistance de 4 Ω. Le courant est donc

$$I_{4\,\Omega} = \frac{20}{4} = 5\,\text{A}$$

Ce courant est vers la gauche, soit du potentiel le plus haut vers le potentiel le plus bas.

On remarque qu'il y a une différence de potentiel de 8 V aux bornes de la résistance de 32 Ω. Le courant est donc

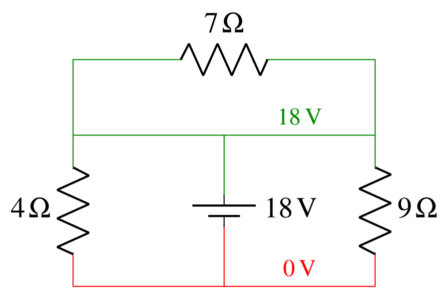
$$I_{32\,\Omega} = \frac{8}{32} = 0{,}25\,\text{A}$$

Ce courant est vers le haut, soit du potentiel le plus haut vers le potentiel le plus bas.

Nos réponses sont donc :

- Résistance de 24 Ω : courant de 0,5 A vers le bas.
- Résistance de 4 Ω : courant de 5 A vers la gauche.
- Résistance de 32 Ω : courant de 0,25 A vers le haut.

Exercice 3 : En posant que le fil du bas est à 0 V, l'image suivante vous montre les potentiels des fils.



On remarque alors que les deux côtés de la résistance de 7 Ω sont au même potentiel. Il n'y a donc pas de différence de potentiel aux bornes de cette résistance, et il n'y a donc pas de courant dans cette résistance.

On remarque ensuite qu'il y a 18 V de différence de potentiel aux bornes des deux autres résistances. Les courants sont donc

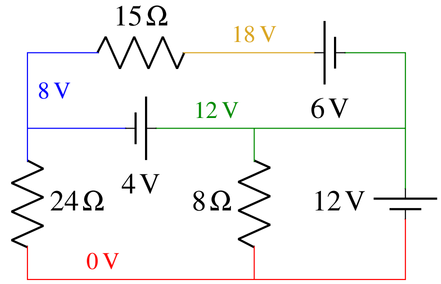
$$I_{4\,\Omega} = \frac{18}{4} = 4{,}5\,\text{A} \qquad \text{et} \qquad I_{9\,\Omega} = \frac{18}{9} = 2\,\text{A}$$

Ces courants sont tous les deux vers le bas, soit du potentiel le plus haut vers le potentiel le plus bas.

Nos réponses sont donc :

- Résistance de 7 Ω : courant nul.
- Résistance de 4 Ω : courant de 4,5 A vers le bas.
- Résistance de 9 Ω : courant de 2 A vers le bas.

Exercice 4 : En posant que le fil du bas à gauche est à 0 V, l'image suivante vous montre les potentiels des fils.



On remarque qu'il y a une différence de potentiel de 12 V aux bornes de la résistance de 8 Ω. Le courant est donc

$$I_{8\,\Omega} = \frac{12}{8} = 1{,}5\,\text{A}$$

Ce courant est vers le bas, soit du potentiel le plus haut vers le potentiel le plus bas.
On remarque qu'il y a une différence de potentiel de 8 V aux bornes de la résistance de 24 Ω. Le courant est donc

$$I_{24\,\Omega} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}\,\text{A}$$

Ce courant est vers le bas, soit du potentiel le plus haut vers le potentiel le plus bas.
On remarque qu'il y a une différence de potentiel de 10 V aux bornes de la résistance de 15 Ω. Le courant est donc

$$I_{15\,\Omega} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}\,\text{A}$$

Ce courant est vers la gauche, soit du potentiel le plus haut vers le potentiel le plus bas.
Nos réponses sont donc :

- Résistance de 8 Ω : courant de 1,5 A vers le bas.
- Résistance de 24 Ω : courant de 1/3 A vers le bas.
- Résistance de 15 Ω : courant de 2/3 A vers la gauche.

Exercice 5 : On va supposer que I_1 quitte le nœud à gauche de la résistance R_1. À ce nœud, on a alors

$$12 + 9 + 4 = I_1 \qquad \text{soit} \qquad I_1 = 25\,\text{A}$$

Le courant I_1 est donc de 25 A vers la droite.
Pour le nœud à droite de la résistance R_1, on a, en supposant que I_2 part du nœud,

$$25 + 4 = 6 + I_2 \qquad \text{soit} \qquad I_2 = 23\,\text{A}$$

Le courant I_2 est donc de 23 A vers la droite et vers le bas.
Pour le nœud à droite en bas et à droite de la résistance R_2, on a, en supposant que I_3 part du nœud

$$23 = 3 + I_3 \qquad \text{soit} \qquad I_3 = 20\,\text{A}$$

Le courant I_3 est donc de 20 A vers le bas et un peu vers la gauche.

Exercice 6 : On va supposer que I_1 quitte le nœud à gauche de la résistance R_1. À ce nœud, on alors

$$20 = I_1 + 9 \qquad \text{soit} \qquad I_1 = 11\,\text{A}$$

Le courant I_1 est donc de 11 A vers la droite.
Pour le nœud à droite de la résistance R_1, on a, en supposant que I_2 part du nœud,

$$11 = 5 + I_2 \qquad \text{soit} \qquad I_2 = 6\,\text{A}$$

Le courant I_2 est donc de 6 A vers la droite.
Pour le nœud à droite de la résistance R_2, on a, en supposant que I_3 part du nœud,

$$6+8=I_3 \qquad \text{soit} \qquad I_3=14\,\text{A}$$

Le courant I_3 est donc de 14 A vers le bas.
Pour le nœud en bas de la résistance R_3, on a, en supposant que I_4 part du nœud,

$$14=4+I_4 \qquad \text{soit} \qquad I_4=10\,\text{A}$$

Le courant I_4 est donc de 10 A vers le bas.

Exercice 7 :

(a) On va supposer que le courant va dans le sens des aiguilles d'une montre. On va faire la loi des mailles en allant aussi dans le sens des aiguilles d'une montre en partant du coin supérieur droit (point B). On a alors

$$\begin{gathered}-7\cdot I-12-12\cdot I-14\cdot I+20-19\cdot I+5=0\\ -52\cdot I-13=0\\ I=0{,}25\,\text{A}\end{gathered}$$

Puisque la réponse est positive, le courant est dans le sens supposé, donc dans le sens des aiguilles d'une montre.

(b) On va passer du point B au point A en suivant les mêmes règles que pour les lois de Kirchhhoff. On va passer par le fil de droite et le fil du bas. On a alors

$$\Delta V=-7\times 0{,}25-12-12\times 0{,}25=-16{,}75\,\text{V}$$

La réponse négative veut simplement dire que le potentiel du point d'arrivée (point A) a un potentiel plus bas que le point de départ (point B). Comme on demandait la différence de potentiel entre ces points, le signe n'a pas d'importance. La différence de potentiel est donc de 16,75 V.
(On aurait pu aussi passer par le fil du haut et le fil de gauche pour passer de B à A. On aurait eu alors

$$\Delta V=-5+19\times 0{,}25-20+14\times 0{,}25=-16{,}75\,\text{V}$$

qui est la même réponse.)

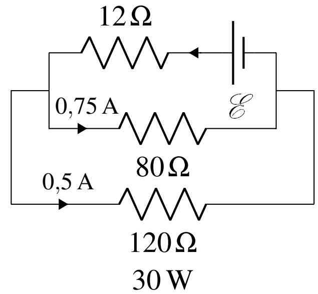
Exercice 8 : Trouvons la différence de potentiel et le courant pour la résistance de 120 Ω. On a

$$\begin{array}{ccccc} P=RI^2 & \longrightarrow & 30=120\cdot I^2 & \longrightarrow & I=0{,}5\,\text{A}\\ \Delta V=RI & \longrightarrow & \Delta V=120\times 0{,}5 & \longrightarrow & \Delta V=60\,\text{V}\end{array}$$

La résistance de 80 Ω étant en parallèle avec celle de 120 Ω, la différence de potentiel aux bornes de cette résistance est aussi de 60 V. Le courant dans la résistance de 80 Ω est donc

$$\Delta V=RI \qquad \longrightarrow \qquad 60=80\cdot I \qquad \longrightarrow \qquad I=0{,}75\,\text{A}$$

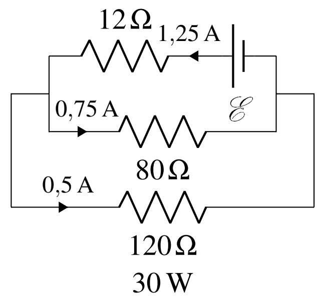
On a donc la situation suivante.



En appliquant la loi des nœuds (nœud de gauche), on trouve le courant dans la résistance de 12 Ω.

$$I = 0{,}5 + 0{,}75 = 1{,}25\,\mathrm{A}$$

On a alors



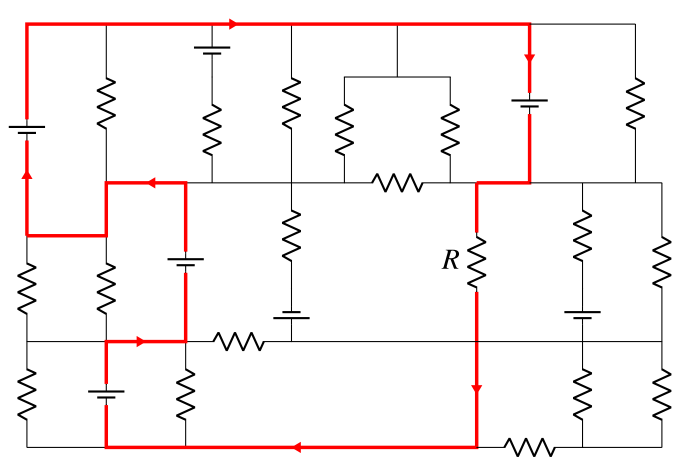
On va alors faire une loi des mailles pour trouver la différence de potentiel de la source. On va faire le tour de la maille du haut dans le sens contraire des aiguilles d'une montre en partant du coin supérieur droit. On a alors

$$\mathscr{E} - 12 \times 1{,}25 - 80 \times 0{,}75 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \mathscr{E} = 75\,\mathrm{V}$$

Exercice 9 : On va faire la loi des mailles en allant dans le sens des aiguilles d'une montre en partant du coin supérieur droit. On a alors

$$\begin{aligned} -R \cdot 2 + 36 - 3 \times 2 - 12 - 2 \times 2 &= 0 \\ R \cdot 2 &= 36 - 3 \times 2 - 12 - 2 \times 2 \end{aligned} \qquad \text{soit} \qquad \begin{aligned} R \cdot 2 &= 14 \\ R &= 7\,\Omega \end{aligned}$$

Exercice 10 : La super maille de ce circuit est



L'équation de cette maille est (on part du coin supérieur droit et en allant dans la direction montrée sur la figure. On suppose que le courant dans la résistance est vers le bas.)

$$-8-4\cdot I+8+8+8=0 \qquad \longrightarrow \qquad -4\cdot I+16=0 \qquad \longrightarrow \qquad I=4\,\mathrm{A}$$

Comme la réponse est positive, le courant est dans le sens supposé, donc vers le bas.

Exercice 11 : Les résistances de $7\,\Omega$ et de $5\,\Omega$ sont en série. La résistance équivalente est donc

$$R_{\text{eq }1}=7+5=12\,\Omega$$

Cette résistance est ensuite en parallèle avec une résistance de $6\,\Omega$. On a donc

$$\frac{1}{R_{\text{eq }2}}=\frac{1}{12}+\frac{1}{6} \qquad \text{soit} \qquad R_{\text{eq }2}=4\,\Omega$$

Cette résistance est finalement en série avec des résistances de $4\,\Omega$ et $3\,\Omega$. On a donc

$$R_{\text{eq }3}=4+4+3=11\,\Omega$$

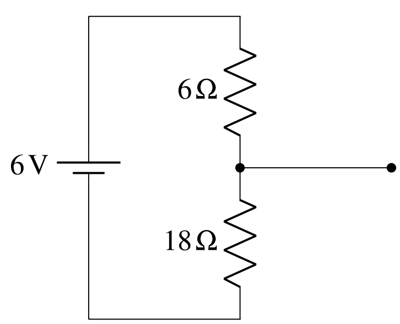
Exercice 12 : Les résistances de $10\,\Omega$ et $15\,\Omega$ sont en parallèle. La résistance équivalente est

$$\frac{1}{R_{\text{eq }1}}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15} \qquad \text{soit} \qquad R_{\text{eq }1}=6\,\Omega$$

Les résistances de $30\,\Omega$ et $45\,\Omega$ sont en parallèle. La résistance équivalente est

$$\frac{1}{R_{\text{eq }2}}=\frac{1}{30}+\frac{1}{45} \qquad \text{soit} \qquad R_{\text{eq }2}=18\,\Omega$$

Ensuite, ces deux résistances équivalentes sont en série.



On a donc

$$R_{\text{eq}}=R_{\text{eq }1}+R_{\text{eq }2}=6+18=24\,\Omega$$

Le courant fourni par la pile est donc

$$\Delta V=R_{\text{eq}}I \qquad \longrightarrow \qquad 6=24\cdot I \qquad \longrightarrow \qquad I=0{,}25\,\mathrm{A}$$

Exercice 13 : On a les équations

$$R_1+R_2=16\,\Omega \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{3\,\Omega}$$

Si on isole R_2 dans la première équation

$$R_2 = 16 - R_1$$

et qu'on remplace dans la deuxième équation, on a

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{16 - R_1} = \frac{1}{3}$$

Pour résoudre cette équation, on fait les étapes suivantes.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R_1} + \frac{1}{16-R_1} &= \frac{1}{3} \\
\frac{16-R_1}{R_1(16-R_1)} + \frac{R_1}{R_1(16-R_1)} &= \frac{1}{3} \\
\frac{16-R_1+R_1}{R_1(16-R_1)} &= \frac{1}{3} \\
\frac{16}{R_1(16-R_1)} &= \frac{1}{3}
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
\frac{R_1(16-R_1)}{16} &= 3 \\
R_1(16-R_1) &= 48 \\
16R_1 - R_1^2 &= 48 \\
R_1^2 - 16R_1 + 48 &= 0
\end{aligned}$$

Les solutions de cette équation quadratique sont

$$R_1 = 12\,\Omega \qquad \text{et} \qquad R_1 = 4\,\Omega$$

Si $R_1 = 12\,\Omega$, alors R_2 est

$$R_2 = 16 - R_1 = 16 - 12 = 4\,\Omega$$

Si $R_1 = 4\,\Omega$, alors R_2 est

$$R_2 = 16 - R_1 = 16 - 4 = 12\,\Omega$$

De toute évidence, les solutions sont $12\,\Omega$ et $4\,\Omega$.

Exercice 14 : La différence de potentiel aux bornes de la résistance de $70\,\Omega$ est

$$\Delta V = RI = 70 \times 0{,}2 = 14\,\text{V}$$

Comme la différence de potentiel aux bornes de la source est de 30 V, la différence de potentiel aux bornes des trois résistances en parallèle est

$$\Delta V = 30 - 14 = 16\,\text{V}$$

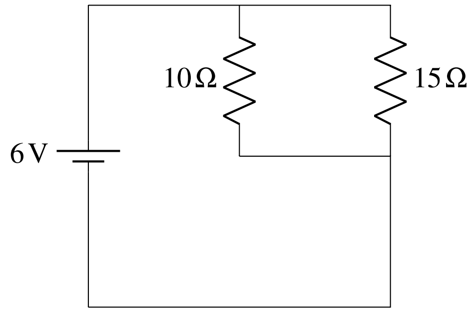
On peut trouver la résistance équivalente de ces trois résistances puisqu'il passerait un courant de 0,2 A dans la résistance équivalente. La résistance équivalente est donc

$$\Delta V = R_{\text{eq}} \cdot I \qquad \longrightarrow \qquad 16 = R_{\text{eq}} \cdot 0{,}2 \qquad \longrightarrow \qquad R_{\text{eq}} = 80\,\Omega$$

On a donc

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{240} + \frac{1}{320} + \frac{1}{R} \qquad \text{soit} \qquad R = 192\,\Omega$$

Exercice 15 : La résistance de $30\,\Omega$ étant court-circuitée, on peut simplifier le circuit en effaçant la branche où est située cette résistance. On a alors le circuit suivant.



Il ne reste alors que les résistances de $10\,\Omega$ et $15\,\Omega$ sont en parallèle. La résistance équivalente est

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} \qquad \text{soit} \qquad R_{\text{eq}} = 6\,\Omega$$

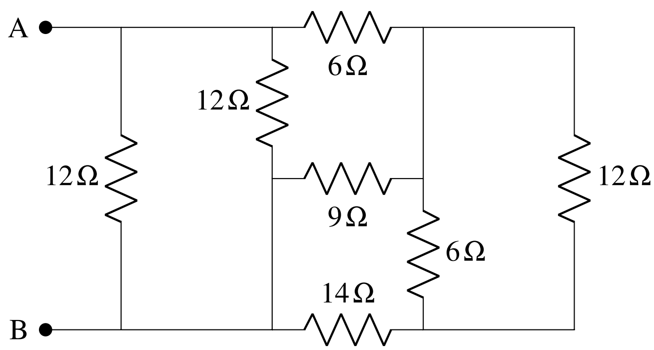
Le courant fourni par la pile est donc

$$\Delta V = R_{\text{eq}} I \qquad \longrightarrow \qquad 6 = 6 \cdot I \qquad \longrightarrow \qquad I = 1\,\text{A}$$

Exercice 16 : Premièrement, on a deux résistances de $6\,\Omega$ en série sur la branche la plus à droite et la branche le plus à gauche. La résistance équivalente est

$$R_{\text{eq 1}} = 6 + 6 = 12\,\Omega$$

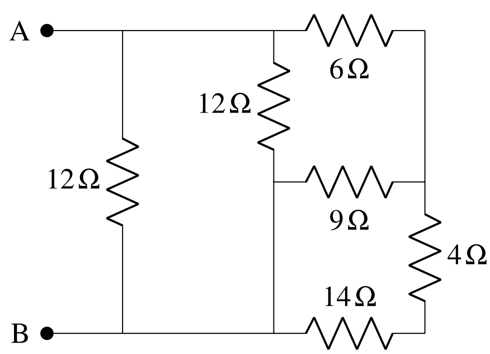
On a alors le circuit suivant.



À droite, nous avons alors une résistance de $12\,\Omega$ en parallèle avec une résistance de $6\,\Omega$. La résistance équivalente est

$$\frac{1}{R_{\text{eq 2}}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6}$$
$$R_{\text{eq 2}} = 4\,\Omega$$

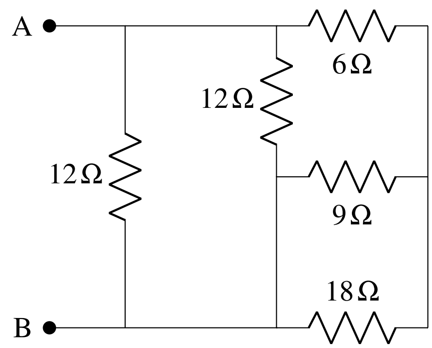
On a alors le circuit suivant.



(Remarquez la façon de remplacer des résistances en parallèle par la résistance équivalente : la résistance équivalente prend la place d'une des résistances en parallèle et on efface les branches où il y avait les autres résistances en parallèle.)
En bas à droite, nous avons alors une résistance de $4\,\Omega$ en série avec une résistance de $14\,\Omega$. La résistance équivalente est

$$R_{\text{eq }3} = 4 + 14 = 18\,\Omega$$

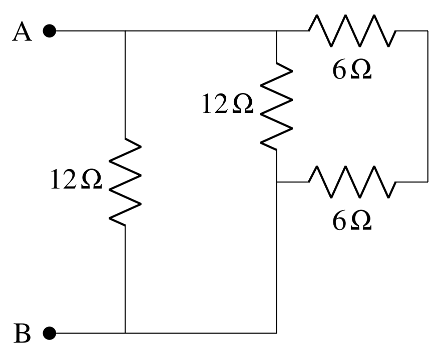
On a alors le circuit suivant.



En bas à droite, nous avons alors une résistance de $18\,\Omega$ en parallèle avec une résistance de $9\,\Omega$. La résistance équivalente est

$$\frac{1}{R_{\text{eq }4}} = \frac{1}{18} + \frac{1}{9}$$
$$R_{\text{eq }4} = 6\,\Omega$$

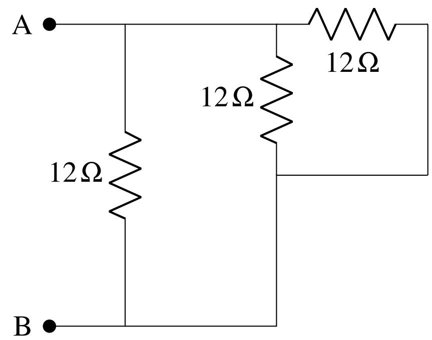
On a alors le circuit suivant.



En haut à droite, nous avons alors une résistance de $6\,\Omega$ en série avec une résistance de $6\,\Omega$. La résistance équivalente est

$$R_{\text{eq }5} = 6 + 6 = 12\,\Omega$$

On a alors le circuit suivant.



Nous avons alors trois résistances de 12 Ω en parallèle. La résistance équivalente est

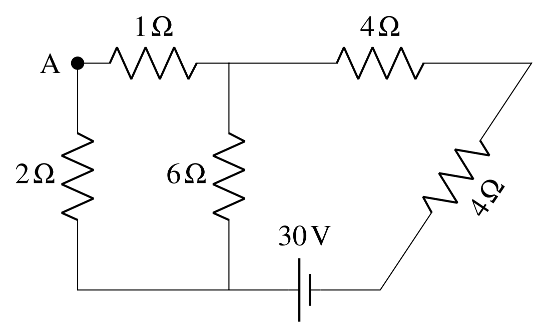
$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \qquad \Longrightarrow \qquad R_{\text{eq}} = 4\,\Omega$$

Exercice 17 :

(a) À droite, nous avons une résistance de 20 Ω en parallèle avec une résistance de 5 Ω. La résistance équivalente est

$$\frac{1}{R_{\text{eq}\,1}} = \frac{1}{20} + \frac{1}{5} \qquad \Longrightarrow \qquad R_{\text{eq}} = 4\,\Omega$$

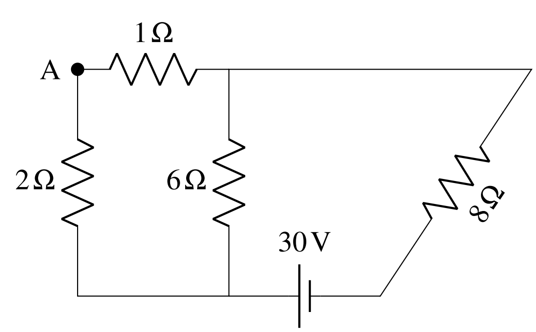
On a alors le circuit suivant.



À droite, nous avons alors une résistance de 4 Ω en série avec une résistance de 4 Ω. La résistance équivalente est

$$R_{\text{eq}\,2} = 4 + 4 = 8\,\Omega$$

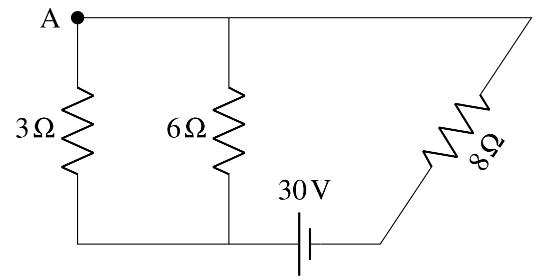
On a alors le circuit suivant.



À gauche, nous avons alors une résistance de 2 Ω en série avec une résistance de 1 Ω. La résistance équivalente est

$$R_{\text{eq}\,3} = 2 + 1 = 3\,\Omega$$

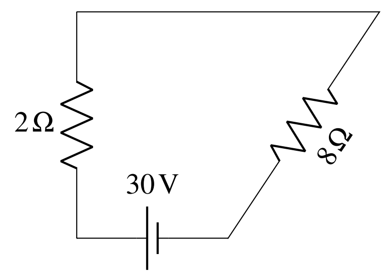
On a alors le circuit suivant.



À gauche, nous avons une résistance de $3\,\Omega$ en parallèle avec une résistance de $6\,\Omega$. La résistance équivalente est

$$\frac{1}{R_{\text{eq}\,4}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad R_{\text{eq}\,4} = 2\,\Omega$$

On a alors le circuit suivant.



Il ne reste alors qu'une résistance de $2\,\Omega$ en série avec une résistance de $8\,\Omega$. La résistance équivalente est

$$R_{\text{eq}} = 2 + 8 = 10\,\Omega$$

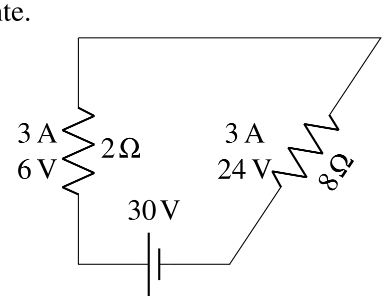
(b) Le courant fourni par la pile est

$$\Delta V = R_{\text{eq}} I \qquad \Longrightarrow \qquad 30 = 10 \cdot I \qquad \Longrightarrow \qquad I = 3\,\text{A}$$

Il y a donc un courant de 3 A qui passe par les résistances équivalentes de $2\,\Omega$ et $8\,\Omega$. Les différences de potentiel aux bornes de ces résistances sont alors

$$\Delta V_1 = 2 \times 3 = 6\,\text{V} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta V_2 = 8 \times 3 = 24\,\text{V}$$

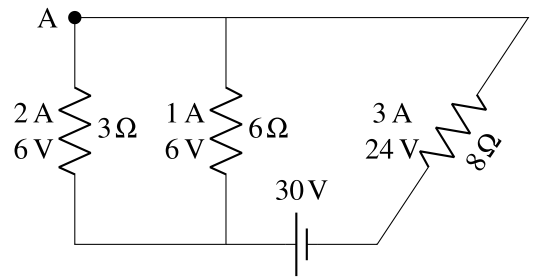
On a alors la situation suivante.



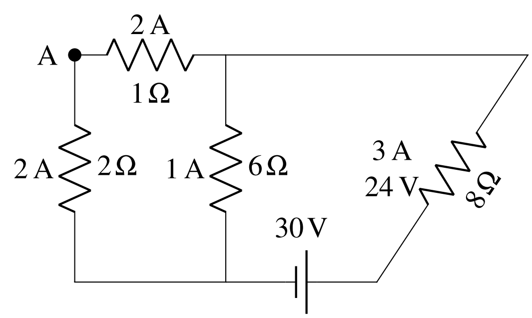
On va alors ramener les résistances en parallèle de gauche. En parallèle, les résistances ont la même différence de potentiel que la résistance équivalente. La différence de potentiel aux bornes de ces résistances est donc aussi de 6 V. Les courants sont donc

$$6 = 3 \cdot I \qquad \longrightarrow \qquad I = 2\,\text{A}$$
$$6 = 6 \cdot I \qquad \longrightarrow \qquad I = 1\,\text{A}$$

On a donc la situation suivante.



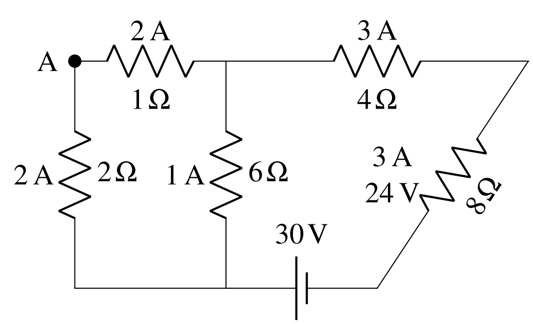
On va alors ramener les résistances en série de gauche. En série, les résistances ont le même courant que la résistance équivalente. Le courant dans ces résistances est donc aussi de 2 A. On a donc la situation suivante.



On va alors ramener les résistances en série de droite. En série, les résistances ont le même courant que la résistance équivalente. Le courant dans ces résistances est donc aussi de 3 A. Les différences de potentiel sont donc

$$\Delta V = 4 \times 3 \qquad \longrightarrow \qquad \Delta V = 12\,\text{V}$$
$$\Delta V = 4 \times 3 \qquad \longrightarrow \qquad \Delta V = 12\,\text{V}$$

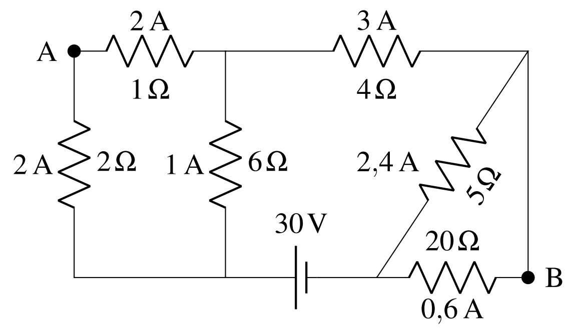
On a donc la situation suivante.



On va alors ramener les résistances en parallèle de droite. En parallèle, les résistances ont la même différence de potentiel que la résistance équivalente. La différence de potentiel aux bornes de ces résistances est donc aussi de 12 V. Les courants sont donc

$$12 = 5 \cdot I \qquad \longrightarrow \qquad I = 2{,}4\,\mathrm{A}$$
$$12 = 20 \cdot I \qquad \longrightarrow \qquad I = 0{,}6\,\mathrm{A}$$

Les courants sont donc



(c) Le courant fourni par la source est le même que celui qui passait par la résistance équivalente, soit 3 A.

(d) Les puissances dissipées dans chaque résistance sont

$$\begin{aligned} P_{2\,\Omega} &= 2 \times (2)^2 = 8\,\mathrm{W} \\ P_{1\,\Omega} &= 1 \times (2)^2 = 4\,\mathrm{W} \\ P_{6\,\Omega} &= 6 \times (1)^2 = 6\,\mathrm{W} \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} P_{4\,\Omega} &= 4 \times (3)^2 = 36\,\mathrm{W} \\ P_{5\,\Omega} &= 5 \times (2{,}4)^2 = 28{,}8\,\mathrm{W} \\ P_{20\,\Omega} &= 20 \times (0{,}6)^2 = 7{,}2\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

La somme de ces puissances est 90 W. Remarquez qu'on aurait pu y arriver plus rapidement parce que la somme des puissances dissipée par les résistances d'un circuit est toujours égale à la puissance dissipée par la résistance équivalente. La résistance équivalente est de 10 Ω et elle est traversée par un courant de 10 A. La puissance dissipée est donc de

$$P = 10 \times (3)^2 = 90\,\mathrm{W}$$

(e) La puissance de la source est

$$P = I\mathscr{E} = 3 \times 30 = 90\,\mathrm{W}$$

Notez que la somme des puissances des sources est toujours égale à la somme des puissances dissipées par les résistances.

(f) On va passer du point A au point B en passant par un chemin qui suit le fil du haut et le fil de droite. On passe alors à travers les résistances de 1 Ω et de 4 Ω. Dans ces deux résistances, le courant est vers la droite, donc dans le même sens que notre trajectoire. En appliquant les mêmes règles que pour la loi des mailles, on a

$$\Delta V = -1 \times 2 - 4 \times 3 = -14\,\mathrm{V}$$

Le signe négatif veut dire que le potentiel du point B est inférieur de 14 V au potentiel du point A. Ici, on s'intéresse uniquement à la différence entre les deux et le signe n'a pas d'importance. La différence de potentiel est donc de 14 V.

Exercice 18 : En série, la puissance dissipée est

$$P_{\text{série}} = \frac{\Delta V^2}{R_{\text{eq}}} = \frac{\Delta V^2}{R_1 + R_2} = \frac{\Delta V^2}{5 + R_2}$$

On a choisi la formule avec ΔV parce que la différence de potentiel de la source est la même dans les deux cas, ce qui n'est pas le cas du courant.

En parallèle, la puissance dissipée est

$$P_{\text{parallèle}} = \frac{\Delta V^2}{R_{\text{eq}}} = \Delta V^2 \frac{1}{R_{\text{eq}}} = \Delta V^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \Delta V^2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{R_2} \right)$$

On a donc

$$\begin{aligned} P_{\text{parallèle}} &= 4{,}5 P_{\text{série}} \\ \Delta V^2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{R_2} \right) &= 4{,}5 \cdot \frac{\Delta V^2}{5 + R_2} \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{R_2} &= 4{,}5 \cdot \frac{1}{5 + R_2} \\ \frac{R_2}{5R_2} + \frac{5}{5R_2} &= 4{,}5 \cdot \frac{1}{5 + R_2} \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{R_2 + 5}{5R_2} &= 4{,}5 \cdot \frac{1}{5 + R_2} \\ (R_2 + 5)^2 &= 22{,}5 R_2 \\ R_2^2 + 10R_2 + 25 &= 22{,}5 R_2 \\ R_2^2 - 12{,}5 R_2 + 25 &= 0 \end{aligned}$$

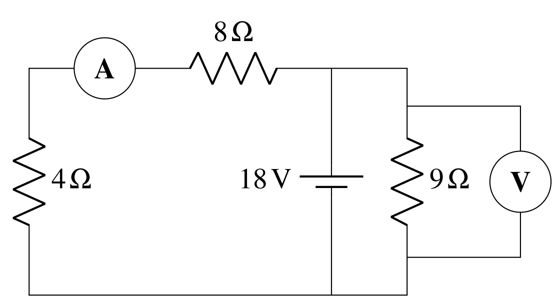
Les solutions de cette équation sont $10\,\Omega$ et $2{,}5\,\Omega$. Ces deux réponses sont bonnes.

Exercice 19 : Pour le voltmètre, c'est assez facile. Le voltmètre mesure la différence de potentiel aux bornes de la résistance de $9\,\Omega$, qui est en parallèle avec la source de 18 V. Le voltmètre indique donc 18 V.

Pour trouver la valeur affichée par l'ampèremètre, il faut trouver le courant qui va vers la partie gauche du circuit. Pour trouver ce courant, il faut trouver la résistance équivalente de la partie de gauche du circuit. On a premièrement deux résistances en parallèle. La résistance équivalente est

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad R_{\text{eq}} = 4\,\Omega$$

On a donc la situation suivante.



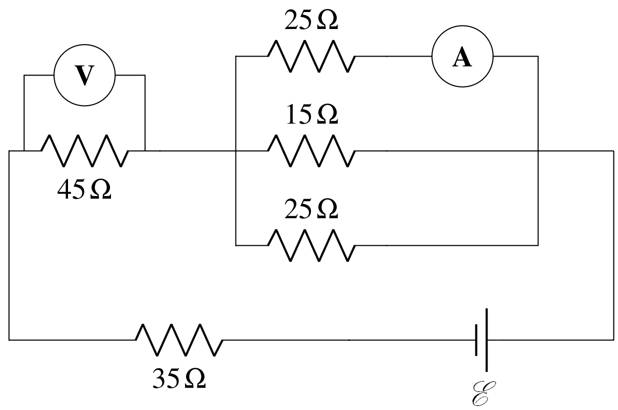
On voit assez facilement que la résistance équivalente est de $12\,\Omega$ pour la partie gauche du circuit. Cette résistance équivalente est branchée aux bornes de la pile de 18 V. Le courant est donc

$$\begin{aligned} \Delta V &= RI \\ 18 &= 12 \cdot I \\ I &= 1{,}5\,\text{A} \end{aligned}$$

C'est la valeur affichée par l'ampèremètre.

Exercice 20 :

(a) On va premièrement simplifier un peu le circuit en prenant la résistance équivalente des résistances de 10 Ω et 15 Ω en série. On a alors le circuit suivant



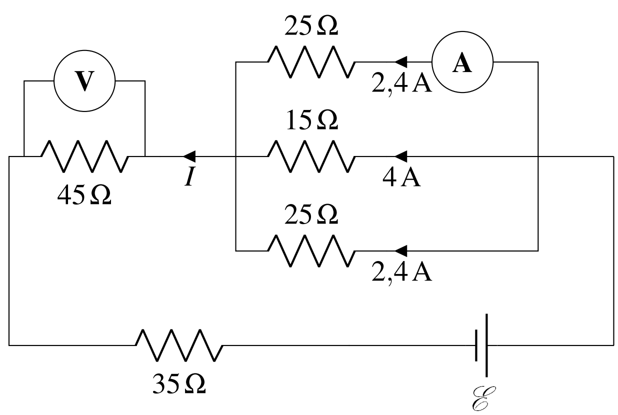
On peut alors trouver la différence de potentiel aux bornes des trois résistances en parallèle puisque la différence de potentiel aux bornes de ces résistances est la même que celle de 25 Ω du haut. La différence de potentiel est

$$\Delta V = RI = 25 \times 2{,}4 = 60\,\mathrm{V}$$

De là, on peut trouver le courant dans les 2 autres résistances en parallèle.

$$\Delta V = RI \quad \longrightarrow \quad 60 = 15 \cdot I \quad \longrightarrow \quad I = 4\,\mathrm{A}$$
$$\Delta V = RI \quad \longrightarrow \quad 60 = 25 \cdot I \quad \longrightarrow \quad I = 2{,}4\,\mathrm{A}$$

On va ensuite trouver le courant qui passe par la résistance de 45 Ω. On va appliquer la loi des nœuds sur le nœud de gauche du groupe de trois résistances en parallèle.



On a alors

$$2{,}4 + 4 + 2{,}4 = I \quad \Longrightarrow \quad I = 8{,}8\,\mathrm{A}$$

Il passe donc un courant de 8,8 A par la résistance de 45 Ω. La différence de potentiel aux bornes de cette résistance est

$$\Delta V = RI = 45 \times 8{,}8 = 396\,\mathrm{V}$$

C’est la valeur qu’affiche le voltmètre.

(b) Pour trouver la différence de potentiel aux bornes de la source, on va faire une loi des mailles qui passe, dans cet ordre, par la résistance de 35 Ω, la source, la résistance de 15 Ω et la résistance de 45 Ω. On a donc

$$-35\times 8{,}8+\mathscr{E}-15\times 4-45\times 8{,}8=0 \qquad\Longrightarrow\qquad \mathscr{E}=764\,\mathrm{V}$$

Exercice 21 : On peut faire deux équations, qu'on pourra résoudre par la suite. La première équation est une loi des mailles de la boucle du bas. On passe, dans cet ordre, par la résistance de 35 Ω, la source de 40 V, la source inconnue et la résistance de 15 Ω. Cette équation est

$$-35\cdot I+40-\mathscr{E}-15\cdot I=0$$

On a supposé que le courant allant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Le courant est aussi partout le même dans cette boucle, car il ne passe pas de courant par le voltmètre (du moins, on néglige ce faible courant).

Pour la deuxième équation, on utilise le fait qu'on sait qu'il y a 33 V de différence entre les deux endroits où est branché le voltmètre. En allant du branchement de droite du voltmètre au branchement de gauche du voltmètre, on devrait avoir $\Delta V=-33\,\mathrm{V}$, puisque le côté gauche est à un potentiel plus bas (c'est ce qu'indiquent les $+$ et $-$ sur les branchements du voltmètre). En appliquant les mêmes règles que pour la loi des mailles, on a

$$-\mathscr{E}-15\cdot I=-33$$

C'est notre deuxième équation. On va isoler $\mathscr{E}$ dans cette équation

$$\mathscr{E}=33-15\cdot I$$

et remplacer dans la première équation.

$$\begin{aligned}-35\cdot I+40-\mathscr{E}-15\cdot I&=0\\ -35\cdot I+40-(33-15\cdot I)-15\cdot I&=0\\ -35\cdot I+40-33+15\cdot I-15\cdot I&=0\\ -35\cdot I+40-33&=0\\ -35\cdot I+7&=0\\ I&=0{,}2\,\mathrm{A}\end{aligned}$$

On peut ensuite trouver la tension de la source avec notre deuxième équation.

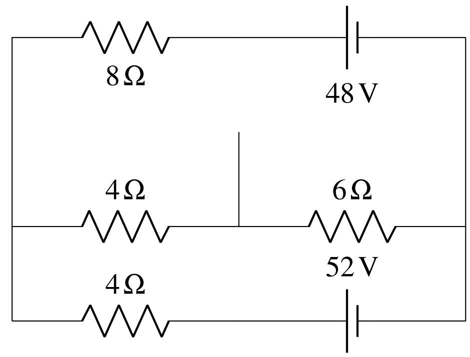
$$\mathscr{E}=33-15\cdot I=33-15\times 0{,}2=30\,\mathrm{A}$$

Exercice 22 : Ce problème semble vraiment difficile puisqu'il y a 9 branches dans ce circuit. On ne va tout de même pas résoudre 9 équations avec 9 inconnues...

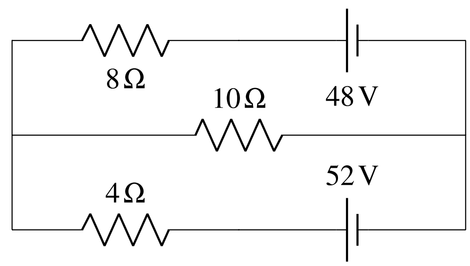
Heureusement, on peut simplifier un peu le circuit avant d'appliquer les lois de Kirchhoff. Au centre du circuit. Les résistances de 12 Ω et de 6 Ω sont en parallèle, tout comme les résistances de 18 Ω et de 9 Ω. Les résistances équivalentes sont

$$\frac{1}{R_{\mathrm{eq}\,1}}=\frac{1}{12}+\frac{1}{6} \qquad\longrightarrow\qquad R_{\mathrm{eq}\,1}=4\,\Omega$$

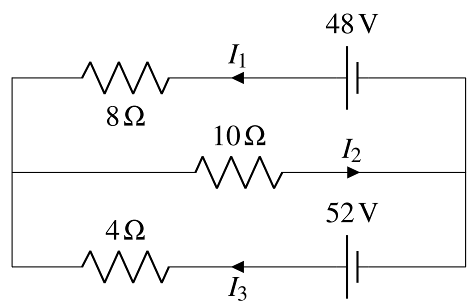
$$\frac{1}{R_{\mathrm{eq}\,2}}=\frac{1}{18}+\frac{1}{9} \qquad\longrightarrow\qquad R_{\mathrm{eq}\,2}=6\,\Omega$$



Les résistances de $4\,\Omega$ et $6\,\Omega$ sont maintenant en série. On peut encore simplifier pour arriver à



On peut alors faire les équations de Kirchhoff en utilisant les courants suivants.



Avec le nœud de gauche, la loi des nœuds est

$$I_1 + I_3 = I_2$$

L'équation de la maille du haut est (en partant de nœud de gauche dans le sens contraire des aiguilles d'une montre)

$$-10 \cdot I_2 + 48 - 8 \cdot I_1 = 0$$

L'équation de la maille du bas est (en partant de nœud de gauche dans le sens des aiguilles d'une montre)

$$-10 \cdot I_2 + 52 - 4 \cdot I_3 = 0$$

Pour résoudre, on isole I_1 dans la première loi des mailles

$$-10 \cdot I_2 + 48 - 8 \cdot I_1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 8 \cdot I_1 = -10 \cdot I_2 + 48 \qquad \Longrightarrow \qquad I_1 = -1{,}25 \cdot I_2 + 6$$

et I_3 dans la deuxième loi des mailles.

$$-10 \cdot I_2 + 52 - 4 \cdot I_3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 4I_3 = -10 \cdot I_2 + 52 \qquad \Longrightarrow \qquad I_3 = -2{,}5 \cdot I_2 + 13$$

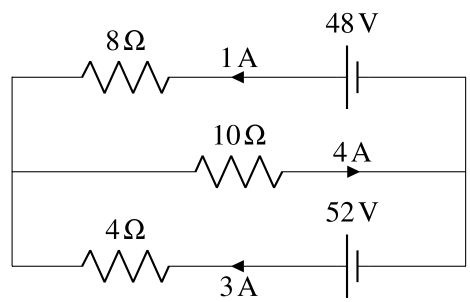
On remplace ensuite dans la loi des nœuds.

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_3 &= I_2 \\
-1{,}25 \cdot I_2 + 6 - 2{,}5 \cdot I_2 + 13 &= I_2 \\
-3{,}75 \cdot I_2 + 19 &= I_2 \\
19 &= 4{,}75 \cdot I_2 \\
I_2 &= 4\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

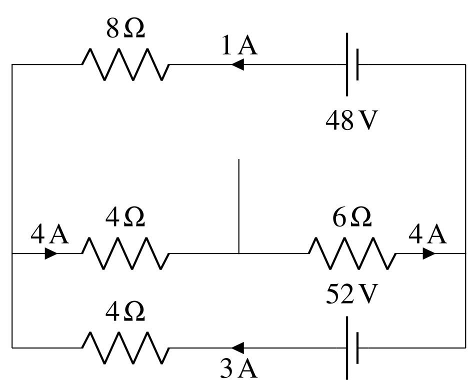
On trouve ensuite les deux autres courants.

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -1{,}25 \cdot I_2 + 6 = -1{,}25 \times 4 + 6 = 1\,\mathrm{A} \\
I_2 &= -2{,}5 \cdot I_2 + 13 = -2{,}5 \times 4 + 13 = 3\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

On a donc les courants suivants.



Il reste maintenant à désimplifier le circuit pour trouver les courants dans chaque branche. On ramène premièrement les deux résistances en série. Dans ce cas, le courant dans chaque résistance est le même que celui dans la résistance en parallèle.



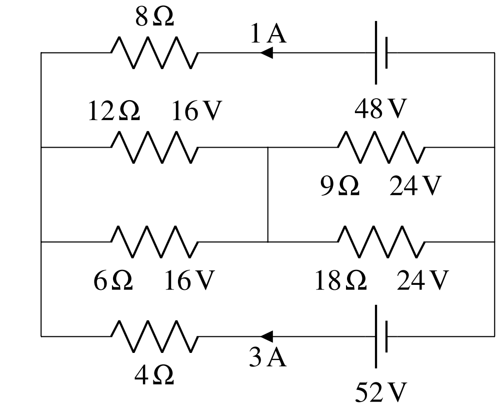
On va maintenant ramener les résistances en parallèle. Ces résistances ont la même différence de potentiel que les résistances équivalentes. Ainsi, aux bornes des résistances de 12 Ω et de 6 Ω, la différence de potentiel sera de

$$\Delta V = 4 \times 4 = 16\,\mathrm{V}$$

Aux bornes des résistances de 18 Ω et de 9 Ω, la différence de potentiel sera de

$$\Delta V = 6 \times 4 = 24\,\mathrm{V}$$

On aura alors



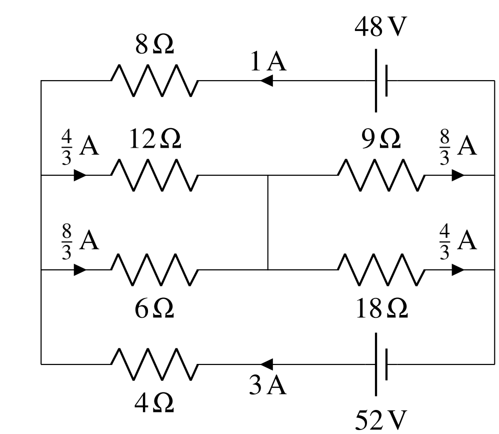
Avec ces différences de potentiel, on peut trouver les courants.

$$16 = 12 \cdot I_{12\Omega} \longrightarrow I_{12\Omega} = \frac{4}{3}\,\mathrm{A} \qquad 24 = 9 \cdot I_{9\Omega} \longrightarrow I_{9\Omega} = \frac{8}{3}\,\mathrm{A}$$

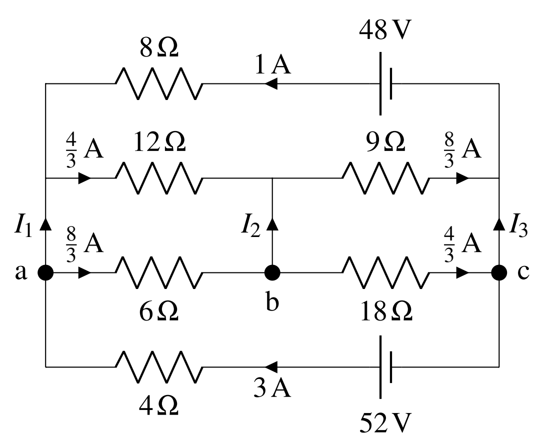
et

$$16 = 6 \cdot I_{6\Omega} \longrightarrow I_{6\Omega} = \frac{8}{3}\,\mathrm{A} \qquad 24 = 18 \cdot I_{18\Omega} \longrightarrow I_{18\Omega} = \frac{4}{3}\,\mathrm{A}$$

On a donc les courants suivants.

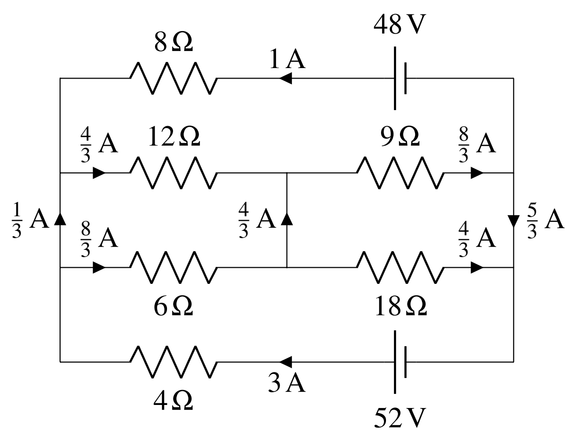


Il ne reste qu'à trouver le courant dans les trois petites branches verticales au milieu du circuit. Pour les trouver, on peut faire des lois des nœuds sur les nœuds en bas de ces branches (nœuds a, b et c sur la figure).

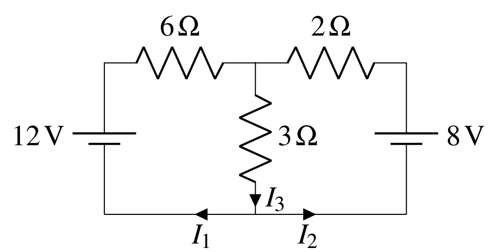


En supposant que les courants dans ces branches sont vers le haut, on a

Nœud a
$$3 = I_1 + \frac{8}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad I_1 = \frac{1}{3}\,\mathrm{A}$$
Nœud b
$$\frac{8}{3} = I_2 + \frac{4}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad I_2 = \frac{4}{3}\,\mathrm{A}$$
Nœud c
$$\frac{4}{3} = I_3 + 3 \qquad \Longrightarrow \qquad I_3 = -\frac{5}{3}\,\mathrm{A}$$
Notre réponse finale est donc



Exercice 23 : On va travailler avec ces sens de courant.



La loi des nœuds (nœud du haut) nous donne alors

$$I_1 + I_2 = I_3$$

Pour la première loi de mailles, on va prendre la maille de gauche. On va partir du nœud du haut et aller dans le sens des aiguilles d'une montre. On a alors

$$-3 \cdot I_3 + 12 - 6 \cdot I_1 = 0$$

Pour la deuxième loi de mailles, on va prendre la maille de droite On va partir du nœud du haut et aller dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. On a alors

$$-3 \cdot I_3 + 8 - 2 \cdot I_2 = 0$$

Pour résoudre, on isole I_1 dans la première loi des mailles

$$-3\cdot I_3+12-6\cdot I_1=0 \quad\Longrightarrow\quad 6\cdot I_1=-3\cdot I_3+12 \quad\Longrightarrow\quad I_1=-0{,}5\cdot I_3+2$$

et I_2 dans la deuxième loi des mailles

$$-3\cdot I_3+8-2\cdot I_2=0 \quad\Longrightarrow\quad 2\cdot I_2=-3\cdot I_3+8 \quad\Longrightarrow\quad I_2=-1{,}5\cdot I_3+4$$

et qu'on remplace ensuite dans la loi des nœuds, on obtient

$$\begin{gathered} I_1+I_2=I_3 \\ (-0{,}5\cdot I_3+2)+(-1{,}5\cdot I_3+4)=I_3 \end{gathered} \quad\Longrightarrow\quad \begin{gathered} -2\cdot I_3+6=I_3 \\ 6=3\cdot I_3 \\ I_3=2\,\mathrm{A} \end{gathered}$$

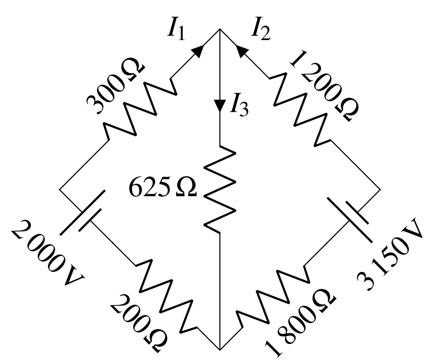
On trouve ensuite les deux autres courants.

$$\begin{aligned} I_1&=-0{,}5\cdot I_3+2=-0{,}5\times 2+2=1\,\mathrm{A} \\ I_2&=-1{,}5\cdot I_3+4=-1{,}5\times 2+4=1\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

On a donc les courants suivants :

- Résistance de $6\,\Omega$: 1 A vers la droite.
- Résistance de $3\,\Omega$: 2 A vers le bas.
- Résistance de $2\,\Omega$: 1 A vers la gauche.

Exercice 24 : On va travailler avec ces sens de courant.



La loi des nœuds (nœud du haut) nous donne alors

$$I_1+I_2=I_3$$

Pour la première loi de mailles, on va prendre la maille de gauche. On va partir du nœud du haut et aller dans le sens des aiguilles d'une montre. On a alors

$$\begin{gathered} -625\cdot I_3-200\cdot I_1-2\,000-300\cdot I_1=0 \\ -625\cdot I_3-2\,000-500\cdot I_1=0 \end{gathered}$$

Pour la deuxième loi de mailles, on va prendre la maille de droite. On va partir du nœud du haut et aller dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. On a alors

$$\begin{gathered} -625\cdot I_3-1\,800\cdot I_2+3\,150-1\,200\cdot I_2=0 \\ -625\cdot I_3+3\,150-3\,000\cdot I_2=0 \end{gathered}$$

Pour résoudre, on isole I_1 dans la première loi des mailles

$$-625\cdot I_3-2\,000-500\cdot I_1=0 \quad\Longrightarrow\quad 500\cdot I_1=-625\cdot I_3-2\,000 \quad\Longrightarrow\quad I_1=-\frac{5}{4}\cdot I_3-4$$

et I_2 dans la deuxième loi des mailles.

$$-625\cdot I_3+3\,150-3\,000\cdot I_2=0 \quad\Longrightarrow\quad 3\,000\cdot I_2=-625\cdot I_3+3\,150 \quad\Longrightarrow\quad I_2=-\frac{5}{24}\cdot I_3+1{,}05$$

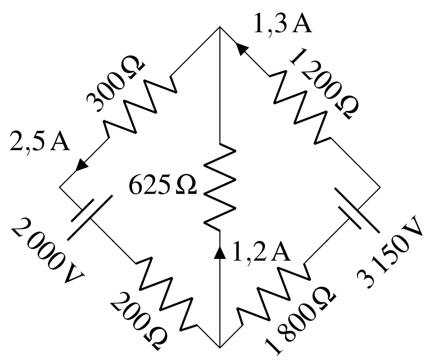
On remplace ensuite dans la loi des nœuds.

$$\begin{gathered} I_1+I_2=I_3 \\ \left(-\frac{5}{4}\cdot I_3-4\right)+\left(-\frac{5}{24}\cdot I_3+1{,}05\right)=I_3 \end{gathered} \quad\Longrightarrow\quad \begin{gathered} -\frac{35}{24}\cdot I_3-2{,}95=I_3 \\ -2{,}95=\frac{59}{24}\cdot I_3 \\ I_3=-1{,}2\,\mathrm{A} \end{gathered}$$

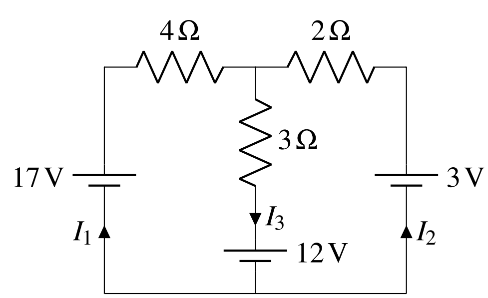
On trouve ensuite les deux autres courants.

$$\begin{aligned} I_1&=-\frac{5}{4}\cdot I_3-4=-\frac{5}{4}\times(-1{,}2)-4=-2{,}5\,\mathrm{A} \\ I_2&=-\frac{5}{24}\cdot I_3+1{,}05=-\frac{5}{24}\times(-1{,}2)+1{,}05=1{,}3\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

On a donc les courants suivants.



Exercice 25 : Pour trouver les puissances, il faut connaitre les courants. On va donc faire les lois de Kirchhoff pour déterminer les courants.
On va travailler avec ces sens de courant.



La loi des nœuds (nœud du haut) nous donne alors

$$I_1 + I_2 = I_3$$

Pour la première loi de mailles, on va prendre la maille de gauche. On va partir du nœud du haut et aller dans le sens des aiguilles d'une montre. On a alors

$$-3 \cdot I_3 - 12 + 17 - 4 \cdot I_1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -3 \cdot I_3 + 5 - 4 \cdot I_1 = 0$$

Pour la deuxième loi de mailles, on va prendre la maille de droite. On va partir du nœud du haut et aller dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. On a alors

$$-3 \cdot I_3 - 12 + 3 - 2 \cdot I_2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -3 \cdot I_3 - 9 - 2 \cdot I_2 = 0$$

Pour résoudre, on isole I_1 dans la première loi des mailles

$$-3 \cdot I_3 + 5 - 4 \cdot I_1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 4 \cdot I_1 = -3 \cdot I_3 + 5 \qquad \Longrightarrow \qquad I_2 = -0{,}75 \cdot I_3 + 1{,}25$$

et I_2 dans la deuxième loi des mailles

$$-3 \cdot I_3 - 9 - 2 \cdot I_2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 2 \cdot I_2 = -3 \cdot I_3 - 9 \qquad \Longrightarrow \qquad I_2 = -1{,}5 \cdot I_3 - 4{,}5$$

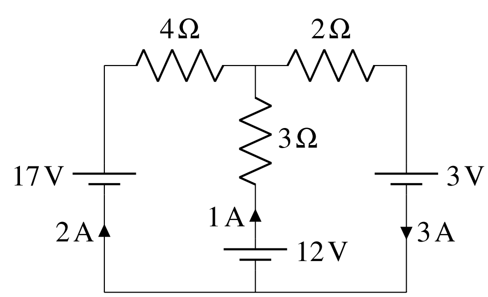
et qu'on remplace ensuite dans la loi des nœuds, on obtient

$$\begin{gathered} I_1 + I_2 = I_3 \\ (-0{,}75 \cdot I_3 + 1{,}25) + (-1{,}5 \cdot I_3 - 4{,}5) = I_3 \end{gathered} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{gathered} -2{,}25 \cdot I_3 - 3{,}25 = I_3 \\ -3{,}25 = 3{,}25 \cdot I_3 \\ I_3 = -1\,\mathrm{A} \end{gathered}$$

On trouve ensuite les deux autres courants.

$$\begin{aligned} I_1 &= -0{,}75 \cdot I_3 + 1{,}25 = -0{,}75 \times (-1) + 1{,}25 = 2\,\mathrm{A} \\ I_2 &= -1{,}5 \cdot I_3 - 4{,}5 = -1{,}5 \times (-1) - 4{,}5 = -3\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

On a donc les courants suivants.



(a) Les puissances dissipées par les résistances sont donc

$$P_{4\Omega} = 4 \times (2)^2 = 16\,\mathrm{W} \quad \text{et} \quad P_{3\Omega} = 3 \times (1)^2 = 3\,\mathrm{W} \quad \text{et} \quad P_{2\Omega} = 2 \times (3)^2 = 18\,\mathrm{W}$$

(b) Les puissances fournies par les sources sont

$$P_{17\,\mathrm{V}} = 17 \times 2 = 34\,\mathrm{W} \quad \text{et} \quad P_{12\,\mathrm{V}} = 12 \times 1 = 12\,\mathrm{W} \quad \text{et} \quad P_{3\,\mathrm{V}} = -3 \times 3 = -9\,\mathrm{W}$$

Pour le signe, il faut se rappeler qu'on met un négatif quand le courant arrive à la plaque positive de la source. On obtient alors une puissance fournie, négative, ce qui correspond à une puissance reçue. La pile de 3 V reçoit donc 9 W de puissance. C'est une pile qui se charge.

(c) La somme des puissances perdue en chaleur dans les résistances est

$$16+3+18=37\,\mathrm{W}$$

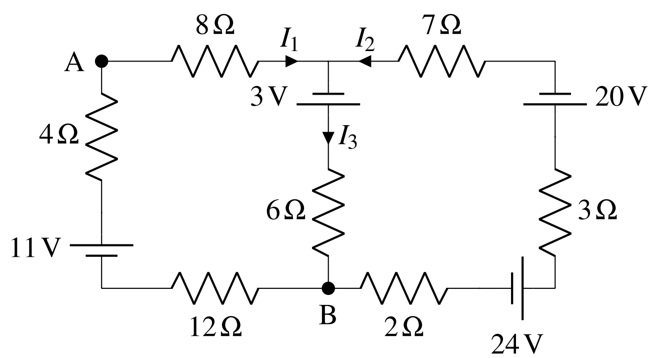
La somme des énergies fournies par les piles est

$$34+12-9=37\,\mathrm{W}$$

On voit qu'effectivement, la somme des énergies fournies par les sources est égale à la somme des énergies perdues en chaleur dans les résistances.

Exercice 26 :

(a) On va travailler avec ces sens de courant.



La loi des nœuds (nœud du haut) nous donne alors

$$I_1+I_2=I_3$$

Pour la première loi de mailles, on va prendre la maille de gauche. On va partir du nœud du haut et aller dans le sens des aiguilles d'une montre. On a alors

$$\begin{gathered}-6\cdot I_3+3-12\cdot I_1+11-4\cdot I_1-8\cdot I_1=0\\ -6\cdot I_3+14-24\cdot I_1=0\end{gathered}$$

Pour la deuxième loi de mailles, on va prendre la maille de droite. On va partir du nœud du haut et aller dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. On a alors

$$\begin{gathered}-6\cdot I_3+3+24-2\cdot I_2-3\cdot I_2-20-7\cdot I_2=0\\ -6\cdot I_3+7-12\cdot I_2=0\end{gathered}$$

Pour résoudre, on isole I_1 dans la première loi des mailles

$$/-6\cdot I_3+14-24\cdot I_1=0 \quad\Longrightarrow\quad 24\cdot I_1=-6\cdot I_3+14 \quad\Longrightarrow\quad I_1=-\frac{6}{24}\cdot I_3+\frac{14}{24}$$

et I_2 dans la deuxième loi des mailles.

$$-6\cdot I_3+7-12\cdot I_2=0 \quad\Longrightarrow\quad 12\cdot I_2=-6\cdot I_3+7 \quad\Longrightarrow\quad I_2=-\frac{6}{12}\cdot I_3+\frac{7}{12}$$

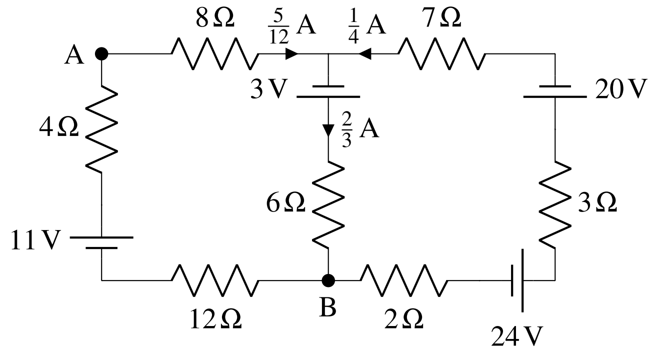
On remplace ensuite dans la loi des nœuds.

$$\begin{gathered}I_1+I_2=I_3\\ \left(-\frac{6}{24}\cdot I_3+\frac{14}{24}\right)+\left(-\frac{6}{12}\cdot I_3+\frac{7}{12}\right)=I_3\\ -\frac{18}{24}\cdot I_3+\frac{28}{24}=I_3\end{gathered} \quad\Longrightarrow\quad \begin{gathered}\frac{28}{24}=\frac{42}{24}\cdot I_3\\ 28=42\cdot I_3\\ I_3=\frac{2}{3}\,\mathrm{A}\end{gathered}$$

On trouve ensuite les deux autres courants.

$$I_1 = -\frac{6}{24}\cdot I_3 + \frac{14}{24} = -\frac{6}{24}\times\frac{2}{3}+\frac{14}{24} = \frac{5}{12}\,\text{A}$$
$$I_2 = -\frac{6}{12}\cdot I_3 + \frac{7}{12} = -\frac{6}{12}\times\frac{2}{3}+\frac{7}{12} = \frac{1}{4}\,\text{A}$$

On a donc les courants suivants.



(b) Pour calculer la différence de potentiel, on va passer de A à B en passant par la résistance de 4 Ω, la source de 11 V et la résistance de 12 Ω. La différence de potentiel est

$$\Delta V = 4\cdot I_1 - 11 + 12\cdot I_1 = 16\cdot I_1 - 11 = 16\times\frac{5}{12} - 11 = -\frac{52}{12} = -4{,}333\,\text{V}$$

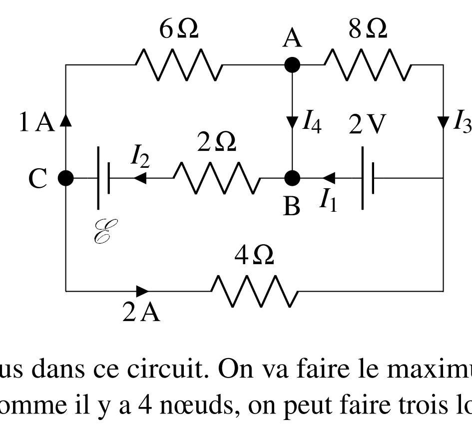
La différence de potentiel est donc de −4,333 V.

Exercice 27 :

(a) Trouvons premièrement le courant dans la résistance de 4 Ω. Premièrement, ce courant est vers la droite, car on sait que le courant dans une résistance va du côté où le potentiel est le plus élevé vers le côté où le potentiel est le plus bas, et le voltmètre nous indique que le côté gauche de la résistance a un potentiel plus élevé. La grandeur du courant est

$$\Delta V = RI \qquad \Longrightarrow \qquad 8 = 4\cdot I \qquad \Longrightarrow \qquad I = 2\,\text{A}$$

On a donc la situation suivante.



Il y a 4 courants inconnus dans ce circuit. On va faire le maximum de nombre de lois des nœuds dans ce circuit. Comme il y a 4 nœuds, on peut faire trois lois des nœuds. Au nœud A, on a

$$1 = I_3 + I_4$$

Au nœud B, on a

$$I_4 + I_1 = I_2$$

Au nœud C, on a

$$I_2 = 1 + 2$$

Il reste à faire une loi des mailles pour faire notre 4e équation. On va faire la maille en haut à droite. On va partir du point A et se déplacer dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. On a donc

$$8 \cdot I_3 - 2 = 0$$

De cette équation, on trouve $I_3 = 0{,}25\,\mathrm{A}$.

De l'équation du nœud C, on trouve $I_2 = 3\,\mathrm{A}$.

De l'équation du nœud A, on trouve

$$1 = I_3 + I_4 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 = 0{,}25 + I_4 \qquad \Longrightarrow \qquad I_4 = 0{,}75\,\mathrm{A}$$

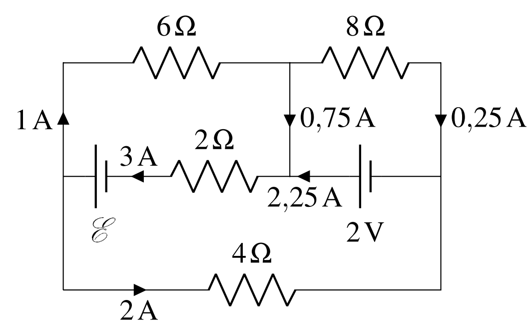
et de l'équation du nœud B, on trouve

$$I_4 + I_1 = I_2 \qquad \Longrightarrow \qquad 0{,}75 + I_1 = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad I_1 = 2{,}25\,\mathrm{A}$$

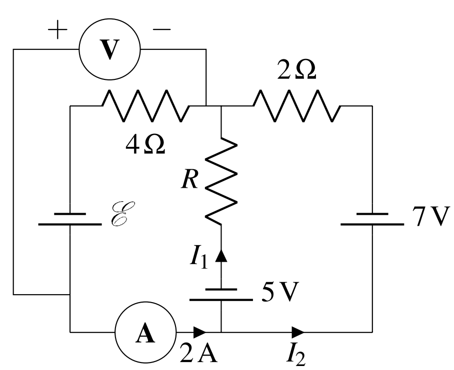
(b) On trouve la valeur de $\mathscr{E}$ avec une équation des mailles sur la boucle en haut à gauche. En allant dans le sens des aiguilles d'une montre à partir du nœud C, on a

$$-6 \times 1 - 2 \times 3 + \mathscr{E} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -6 - 6 + \mathscr{E} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathscr{E} = 12\,\mathrm{V}$$

Notre solution globale est donc



Exercice 28 : On va travailler avec les sens suivants pour les courants.



L'équation des nœuds est (nœud du bas)

$$2 = I_1 + I_2$$

L'équation de la maille de gauche est (en partant de nœud du bas dans le sens des aiguilles d'une montre)

$$-5 - RI_1 - 4 \times 2 + \mathscr{E} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -13 - RI_1 + \mathscr{E} = 0$$

L'équation de la maille de droite est (en partant de nœud du bas dans le sens contraire des aiguilles d'une montre)

$$-5 - RI_1 + 2 \cdot I_2 + 7 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 2 - RI_1 + 2 \cdot I_2 = 0$$

Nous n'avons pas encore assez d'équations, car il y a 4 inconnues (I_1, I_2, R et $\mathscr{E}$). Toutefois, il y a une autre équation, celle de la différence de potentiel indiqué par le voltmètre. Cette information nous dit que

$$-4 \times 2 + \mathscr{E} = 10$$

De cette équation, on trouve que

$$-4 \times + \mathscr{E} = 10 \qquad \Longrightarrow \qquad -8 + \mathscr{E} = 10 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathscr{E} = 18\,\mathrm{V}$$

De là, on trouve que (avec l'équation de la maille de gauche)L

$$-13 - RI_1 + \mathscr{E} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -13 - RI_1 + 18 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad RI_1 = 5\,\mathrm{V}$$

On peut alors utiliser cette information dans l'équation de la maille de droite.

$$2 - RI_1 + 2 \cdot I_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2 - 5 + 2 \cdot I_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad -3 + 2 \cdot I_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad I_2 = 1{,}5\,\mathrm{A}$$

On peut ensuite trouver le courant I_1 avec la loi des nœuds.

$$2 = I_1 + I_2 \qquad \Longrightarrow \qquad 2 = I_1 + 1{,}5 \qquad \Longrightarrow \qquad I_1 = 0{,}5\,\mathrm{A}$$

On trouve finalement la résistance avec

$$RI_1 = 5 \qquad \Longrightarrow \qquad R \cdot 0{,}5 = 5 \qquad \Longrightarrow \qquad R = 10\,\Omega$$

Notre solution est donc $\mathscr{E} = 18\,\mathrm{V}$ et $R = 10\,\Omega$.

Exercice 29 : On a

$$\Delta V = \mathscr{E} - rI \qquad \Longrightarrow \qquad 11{,}8 = 12{,}4 - 40 \cdot r \qquad \Longrightarrow \qquad r = 0{,}015\,\mathrm{A}$$

Exercice 30 : On trouve la résistance de la pile avec

$$\Delta V = \mathscr{E} - rI \qquad \Longrightarrow \qquad 22 = 24 - r \cdot 4 \qquad \Longrightarrow \qquad r = 0{,}5\,\Omega$$

S'il y a 22 V aux bornes de la pile, il y a aussi 22 V aux bornes de la résistance. On a donc

$$\Delta V = RI \qquad \Longrightarrow \qquad 22 = R \cdot 4 \qquad \Longrightarrow \qquad r = 5{,}5\,\Omega$$

Exercice 31 : Quand la pile donne du courant, la différence de potentiel est

$$\Delta V = \mathscr{E} - rI$$

On a les donc deux équations suivantes.

$$12{,}2 = \mathscr{E} - r \cdot 1{,}2$$
$$12{,}0 = \mathscr{E} - r \cdot 1{,}7$$

Pour résoudre, on a soustrait la deuxième équation de la première. On a alors

$$\begin{aligned} 12{,}2 - 12{,}0 &= (\mathscr{E} - r \cdot 1{,}2) - (\mathscr{E} - r \cdot 1{,}7) \\ 0{,}2 &= -r \cdot 1{,}2 + r \cdot 1{,}7 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 0{,}2 &= r \cdot 0{,}5 \\ r &= 0{,}4\,\Omega \end{aligned}$$

On trouve ensuite $\mathscr{E}$ avec une des deux équations.

$$12{,}2 = \mathscr{E} - r \cdot 1{,}2 \quad \Longrightarrow \quad 12{,}2 = \mathscr{E} - 0{,}4 \times 1{,}2 \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{E} = 12{,}68\,\mathrm{V}$$

Exercice 32 : Quand la pile donne du courant, la différence de potentiel est

$$\Delta V = \mathscr{E} - rI$$

Quand la pile reçoit du courant (quand on charge la pile), la différence de potentiel est

$$\Delta V = \mathscr{E} + rI$$

On a les donc deux équations suivantes.

$$12{,}23 = \mathscr{E} - r \cdot 1{,}2$$
$$12{,}89 = \mathscr{E} + r \cdot 3{,}2$$

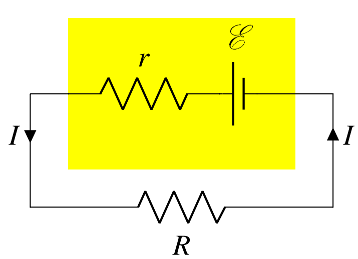
Pour résoudre, on a soustrait la première équation de la deuxième. On a alors

$$\begin{aligned} 12{,}23 - 12{,}89 &= (\mathscr{E} + r \cdot 3{,}2) - (\mathscr{E} - r \cdot 1{,}2) \\ 0{,}66 &= r \cdot 3{,}2 + r \cdot 1{,}2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 0{,}66 &= r \cdot 4{,}4 \\ r &= 0{,}15\,\Omega \end{aligned}$$

On trouve ensuite $\mathscr{E}$ avec une des deux équations.

$$12{,}23 = \mathscr{E} - r \cdot 1{,}2 \quad \Longrightarrow \quad 12{,}23 = \mathscr{E} - 0{,}15 \cdot 1{,}2 \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{E} = 12{,}41\,\mathrm{V}$$

Exercice 33 : Nous avons un circuit formé d'une pile et d'une résistance, un peu comme celui-ci.



La différence de potentiel aux bornes de la pile est la même que celle aux bornes de la résistance. On peut donc trouver le courant quand on est branché à la résistance de 20 Ω. On a alors

$$\Delta V = RI \qquad \Longrightarrow \qquad 16{,}4 = 20 \cdot I \qquad \Longrightarrow \qquad I = 0{,}82\,\mathrm{A}$$

Pour la pile, on a donc

$$\Delta V = \mathscr{E} - rI \qquad \Longrightarrow \qquad 16{,}4 = \mathscr{E} - r \cdot 0{,}82$$

On peut ensuite trouver le courant quand on est branché à la résistance de 50 Ω. On a alors

$$\Delta V = RI \qquad \Longrightarrow \qquad 17 = 50 \cdot I \qquad \Longrightarrow \qquad I = 0{,}34\,\mathrm{A}$$

Pour la pile, on a donc

$$\Delta V = \mathscr{E} - rI \qquad \Longrightarrow \qquad 17 = \mathscr{E} - r \cdot 0{,}34$$

On a les donc deux équations suivantes.

$$\begin{aligned} 16{,}4 &= \mathscr{E} - r \cdot 0{,}82 \\ 17 &= \mathscr{E} - r \cdot 0{,}34 \end{aligned}$$

Pour résoudre, on a soustrait la première équation de la deuxième. On a alors

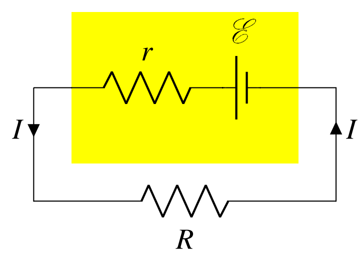
$$\begin{aligned} 17 - 16{,}4 &= (\mathscr{E} - r \cdot 0{,}34) - (\mathscr{E} - r \cdot 0.82) \\ 0{,}6 &= -r \cdot 0{,}34 + r \cdot 0{,}82 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} 0{,}6 &= r \cdot 0{,}48 \\ r &= 1{,}25\,\Omega \end{aligned}$$

On trouve ensuite $\mathscr{E}$ avec une des deux équations.

$$17 = \mathscr{E} - r \cdot 0{,}34 \qquad \Longrightarrow \qquad 17 = \mathscr{E} - 1{,}25 \times 0{,}34 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathscr{E} = 17{,}425\,\mathrm{V}$$

Exercice 34 :

(a) Nous avons un circuit formé d'une pile et d'une résistance, un peu comme celui-ci.



Si la puissance dissipée est de 50 W et que la résistance est de 2 Ω, on peut trouver le courant dans la résistance.

$$P_R = RI^2 \qquad \Longrightarrow \qquad 1\,250 = 2 \cdot I^2 \qquad \Longrightarrow \qquad I = 25\,\mathrm{A}$$

C'est aussi le courant fourni par la pile. La différence de potentiel aux bornes de la résistance est

$$\Delta V = RI = 2 \times 25 = 50\,\mathrm{V}$$

C'est aussi la différence de potentiel aux bornes de la pile. On a donc

$$\Delta V = \mathscr{E} - rI \qquad \Longrightarrow \qquad 50 = 60 - r \cdot 25 \qquad \Longrightarrow \qquad r = 0{,}4\,\Omega$$

(b) La résistance équivalente de ce circuit est $R+0{,}4\,\Omega$. Le courant dans le circuit est donc

$$I = \frac{60}{R+0{,}4}$$

La puissance dissipée par la résistance est

$$P_R = RI^2 = R\left(\frac{60}{R+0{,}4}\right)^2$$

Si on veut que cette puissance soit de 900 W, alors on a

$$\begin{aligned} 900 &= R\left(\frac{60}{R+0{,}4}\right)^2 \\ 900\cdot(R+0{,}4)^2 &= R\cdot 3\,600 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} (R+0{,}4)^2 &= R\cdot 4 \\ R^2+0{,}8\cdot R+0{,}16 &= 4\cdot R \\ R^2-3{,}2\cdot R+0{,}16 &= 0 \end{aligned}$$

Les solutions de cette équation quadratique sont $3{,}149\,\Omega$ et $0{,}050\,81\,\Omega$. Ces deux réponses sont bonnes.

Avec ce circuit dans lequel on ferme l'interrupteur à t = 0, déterminez le temps pour que le condensateur atteigne 90 % de sa charge maximale.
Découvrez comment résoudre ce problème dans ce chapitre.

7. Solutions du chapitre 7

Exercice 1 : La capacité est

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8{,}854 \times 10^{-12} \times \frac{0{,}01}{0{,}001} = 8{,}854 \times 10^{-11}\,\mathrm{F} = 88{,}54\,\mathrm{pF}$$

Exercice 2 : La charge est

$$Q = ne = 10^{13} \times 1{,}602 \times 10^{-19} = 1{,}602 \times 10^{-6}\,\mathrm{C} = 1{,}602\,\mu\mathrm{C}$$

La capacité est donc

$$Q = C\Delta V \qquad \longrightarrow \qquad 1{,}602 \times 10^{-6} = C \times 24 \qquad \longrightarrow \qquad C = 6{,}676 \times 10^{-8}\,\mathrm{F} = 66{,}76\,\mathrm{nF}$$

Exercice 3 :

(a) La capacité est

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8{,}854 \times 10^{-12} \cdot \frac{\pi \cdot (0{,}1)^2}{0{,}02} = 1{,}391 \times 10^{-11}\,\mathrm{F} = 13{,}91\,\mathrm{pF}$$

(b) La charge est

$$Q = C\Delta V = 1{,}391 \times 10^{-11} \times 100 = 1{,}391 \times 10^{-9}\,\mathrm{C} = 1{,}391\,\mathrm{nC}$$

(c) Le champ est

$$\Delta V = Ed \qquad \longrightarrow \qquad 100 = E \times 0{,}02 \qquad \longrightarrow \qquad E = 5\,000\,\mathrm{N/C}$$

Exercice 4 :

(a) La capacité est

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(b/a)} = \frac{2\pi \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times 0{,}036}{\ln(12/5)} = 2{,}288 \times 10^{-12}\,\mathrm{F} = 2{,}288\,\mathrm{pF}$$

(b) On trouve la différence de potentiel avec la formule suivante

$$Q = C\Delta V \qquad \longrightarrow \qquad 10^{-9} = 2{,}288 \times 10^{-12} \times \Delta V \qquad \longrightarrow \qquad \Delta V = 437{,}1\,\mathrm{V}$$

Exercice 5 : La capacité de ce condensateur se trouve ainsi :

$$Q = C\Delta V \qquad \longrightarrow \qquad 50 = C \cdot 200 \qquad \longrightarrow \qquad C = 2{,}5 \times 10^{-10}\,\mathrm{F} = 250\,\mathrm{pF}$$

On a donc

$$\begin{aligned} C &= 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} \\ 2{,}5 \times 10^{-10} &= 4\pi \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times \frac{a \cdot 0{,}2}{0{,}2-a} \\ 2{,}247 &= \frac{a \cdot 0{,}2}{0{,}2-a} \\ 11{,}23 &= \frac{a}{0{,}2-a} \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{gathered} 11{,}23 \times (0{,}2-a) = a \\ 2{,}247 - 11{,}23a = a \\ 2{,}247 = 12{,}23a \\ a = 0{,}1837\,\mathrm{m} = 18{,}37\,\mathrm{cm} \end{gathered}$$

Exercice 6 : On a

$$Q = C\Delta V \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \varepsilon_0 \frac{A}{d}\Delta V \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{Q}{A} = \frac{\varepsilon_0 \Delta V}{d} \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma = \frac{\varepsilon_0 \Delta V}{d}$$

On a donc

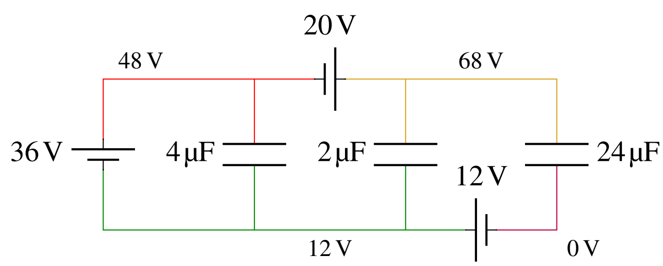
$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 \Delta V}{d} \qquad \Longrightarrow \qquad 40 \times 10^{-9} = \frac{8{,}854 \times 10^{-12} \times 20}{d} \qquad \Longrightarrow \qquad d = 4{,}427 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} = 4{,}427\,\mathrm{mm}$$

Remarquez qu'on aurait pu aussi calculer le champ électrique avec $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ et ensuite trouver la distance avec $\Delta V = Ed$.

Exercice 7 : La capacité est

$$C = \kappa \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(b/a)} = 2{,}4 \times \frac{2\pi \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times 0{,}5}{\ln(20/10)} = 9{,}631 \times 10^{-11}\,\mathrm{F} = 96{,}31\,\mathrm{pF}$$

Exercice 8 : Le potentiel des fils est



La différence de potentiel aux bornes du condensateur de 4 µF est 36 V. Sa charge est donc

$$Q = C\Delta V = 4 \times 36 = 144\,\mu\mathrm{C}$$

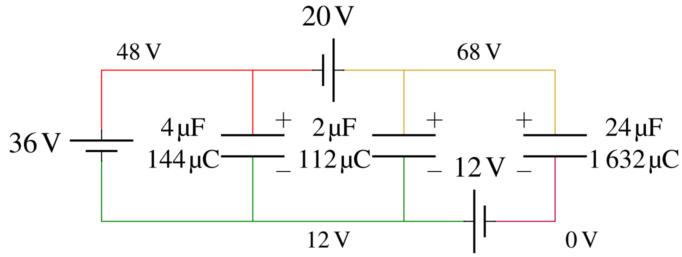
La différence de potentiel aux bornes du condensateur de 2 µF est 56 V. Sa charge est donc

$$Q = C\Delta V = 2 \times 56 = 112\,\mu\mathrm{C}$$

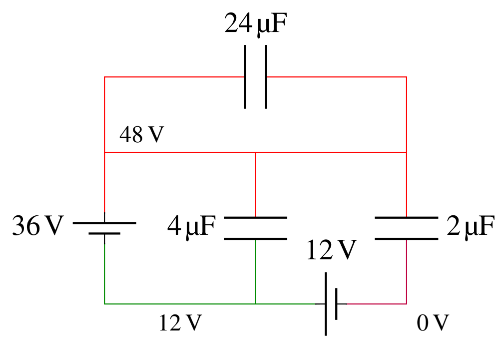
La différence de potentiel aux bornes du condensateur de 24 µF est 68 V. Sa charge est donc

$$Q = C\Delta V = 24 \times 68 = 1\,632\,\mu\mathrm{C}$$

Comme la plaque positive est toujours du côté où le potentiel est le plus élevé, la solution est



Exercice 9 : Le potentiel des fils est



La différence de potentiel aux bornes du condensateur de 4 µF est 36 V. Sa charge est donc

$$Q = C\Delta V = 4 \times 36 = 144\,\mu\mathrm{C}$$

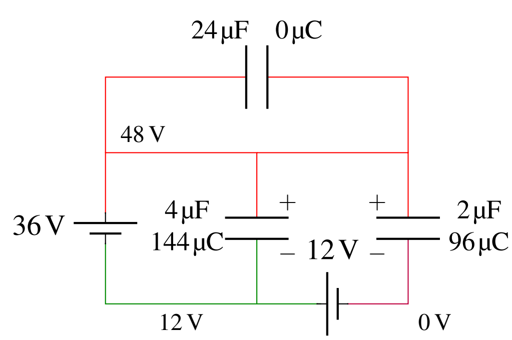
La différence de potentiel aux bornes du condensateur de 2 µF est 48 V. Sa charge est donc

$$Q = C\Delta V = 2 \times 48 = 96\,\mu\mathrm{C}$$

La différence de potentiel aux bornes du condensateur de 24 µF est 0 V. Sa charge est donc

$$Q = C\Delta V = 24 \times 0 = 0\,\mu\mathrm{C}$$

Comme la plaque positive est toujours du côté où le potentiel est le plus élevé, la solution est



Exercice 10 :

(a) La charge initiale du condensateur de 20 µF est

$$Q_1 = C\Delta V = 20 \times 12 = 240\,\mu\mathrm{C}$$

La charge initiale du condensateur de 30 µF est

$$Q_2 = C\Delta V = 30 \times 32 = 960\,\mu\text{C}$$

En branchant ensemble les armatures de mêmes signes, on a

$$Q'_1 + Q'_2 = 240 + 960 = 1\,200\,\mu\text{C}$$

Après avoir branché les condensateurs ensemble, la différence de potentiel devient la même aux bornes des deux condensateurs, on aura donc

$$\Delta V'_1 = \Delta V'_2 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{Q'_1}{20} = \frac{Q'_2}{30} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{Q'_1}{2} = \frac{Q'_2}{3}$$

En utilisant l'autre équation, on a

$$\begin{array}{c} \dfrac{Q'_1}{2} = \dfrac{Q'_2}{3} \\ \dfrac{Q'_1}{2} = \dfrac{1\,200 - Q'_1}{3} \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{c} 3Q'_1 = 2\,400 - 2Q'_1 \\ 5Q'_1 = 2\,400 \\ Q'_1 = 480\,\mu\text{C} \end{array}$$

et ainsi

$$Q'_2 = 1\,200 - Q'_1 = 1\,200 - 480 = 720\,\mu\text{C}$$

(b) La différence de potentiel aux bornes des condensateurs est

$$\Delta V'_1 = \frac{Q'_1}{20} = \frac{480}{20} = 24\,\text{V}$$

On aurait pu aussi utiliser les valeurs du deuxième condensateur.

$$\Delta V'_2 = \frac{Q'_2}{30} = \frac{720}{30} = 24\,\text{V}$$

Exercice 11 :

(a) La charge initiale du condensateur de 40 µF est

$$Q_1 = C\Delta V = 40 \times 100 = 4\,000\,\mu\text{C}$$

La charge initiale du condensateur de 20 µF est

$$Q_2 = C\Delta V = 20 \times 50 = 1\,000\,\mu\text{C}$$

En branchant ensemble les armatures de signes contraires, on a

$$Q'_1 + Q'_2 = 4\,000 - 1\,000 = 3\,000\,\mu\text{C}$$

Après avoir branché les condensateurs ensemble, la différence de potentiel devient la même aux bornes des deux condensateurs, on aura donc

$$\Delta V'_1 = \Delta V'_2 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{Q'_1}{40} = \frac{Q'_2}{20} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{Q'_1}{2} = Q'_2$$

En utilisant l'autre équation, on a

$$\begin{array}{c} \dfrac{Q'_1}{2} = Q'_2 \\ \dfrac{Q'_1}{2} = 3\,000 - Q'_1 \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{c} Q'_1 = 6\,000 - 2Q'_1 \\ 3Q'_1 = 6\,000 \\ Q'_1 = 2\,000\,\mu\text{C} \end{array}$$

et ainsi

$$Q'_2 = 3\,000 - Q'_1 = 3\,000 - 2\,000 = 1\,000\,\mu\text{C}$$

(b) La différence de potentiel aux bornes des condensateurs est

$$\Delta V_1' = \frac{Q_1'}{40} = \frac{2\,000}{40} = 50\,\mathrm{V}$$

On aurait pu aussi utiliser les valeurs du deuxième condensateur.

$$\Delta V_2' = \frac{Q_2'}{20} = \frac{1\,000}{20} = 50\,\mathrm{V}$$

Exercice 12 : La charge initiale du condensateur de $100\,\mu\mathrm{F}$ est

$$Q_1 = C\Delta V = 100 \times 30 = 3\,000\,\mu\mathrm{C}$$

La charge initiale de l'autre condensateur est évidemment nulle.

$$Q_2 = 0\,\mu\mathrm{C}$$

En branchant ensemble les armatures, on a

$$Q_1' + Q_2' = 3\,000 + 0 = 3\,000\,\mu\mathrm{C}$$

Après avoir branché les condensateurs ensemble, on sait que

$$\Delta V_1' = 24 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{Q_1'}{100} = 24 \qquad \Longrightarrow \qquad Q_1' = 2\,400\,\mu\mathrm{C}$$

La charge de l'autre condensateur est donc

$$Q_1' + Q_2' = 3\,000 \qquad \Longrightarrow \qquad 2\,400 + Q_2' = 3\,000 \qquad \Longrightarrow \qquad Q_2' = 600\,\mu\mathrm{C}$$

On peut alors trouver la capacité.

$$Q_2' = C_2 \Delta V_2' \qquad \Longrightarrow \qquad 600 = C_2 \times 24 \qquad \Longrightarrow \qquad C_2 = 25\,\mu\mathrm{F}$$

Exercice 13 : Puisque le condensateur reste branché à la source, on sait que la différence de potentiel entre les plaques restera toujours la même. On a donc

$$\Delta V = \Delta V' = 12\,\mathrm{V}$$

La différence de potentiel ne changera donc pas. La capacité va cependant changer. Initialement, on a

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \qquad \Longrightarrow \qquad 36\,\mu\mathrm{F} = \varepsilon_0 \frac{A}{0{,}000\,5}$$

Après avoir éloigné les plaques, on a

$$C' = \varepsilon_0 \frac{A}{d'} \qquad \Longrightarrow \qquad C' = \varepsilon_0 \frac{A}{0{,}002}$$

En divisant les deux capacités, on a

$$\frac{C'}{36} = \frac{\varepsilon \dfrac{A}{0{,}002}}{\varepsilon_0 \dfrac{A}{0{,}000\,5}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{C'}{36} = \frac{0{,}000\,5}{0{,}002} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} \frac{C'}{36} &= 0{,}25 \\ C' &= 9\,\mu\mathrm{F} \end{aligned}$$

La charge devient donc

$$Q' = C'\Delta V' = 9 \times 12 = 108\,\mu\text{C}$$

alors que, initialement, elle était de

$$Q = C\Delta V = 36 \times 12 = 432\,\mu\text{C}$$

La charge a donc baissé de 324 µC ($432 - 108 = 324$).

Exercice 14 : Puisque le condensateur n'est pas branché à la source, on sait que les charges des plaques resteront toujours les mêmes. La charge initiale étant de

$$Q = C\Delta V = 36 \times 12 = 432\,\mu\text{C}$$

On aura

$$Q = Q' = 432\,\mu\text{C}$$

La charge des plaques ne changera donc pas. La capacité va cependant changer. Initialement, on a

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \qquad \longrightarrow \qquad 36 = \varepsilon_0 \frac{A}{0{,}000\,5}$$

Après avoir éloigné les plaques, on a

$$C' = \varepsilon_0 \frac{A}{d'} \qquad \longrightarrow \qquad C' = \varepsilon_0 \frac{A}{0{,}002}$$

En divisant les deux capacités, on a

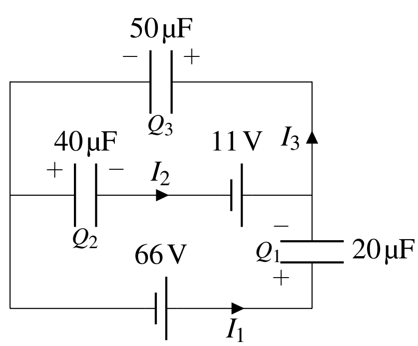
$$\frac{C'}{36} = \frac{\varepsilon_0 \frac{A}{0{,}002}}{\varepsilon_0 \frac{A}{0{,}000\,5}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{C'}{36} = \frac{0{,}000\,5}{0{,}002} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{gathered}\frac{C'}{36} = 0{,}25 \\ C' = 9\,\mu\text{F}\end{gathered}$$

La différence de potentiel devient donc

$$Q' = C' \cdot \Delta V' \qquad \Longrightarrow \qquad 432 = 9 \cdot \Delta V' \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta V' = 48\,\text{V}$$

Puisque la différence de potentiel était initialement de 12 V, le potentiel a augmenté de 36 V.

Exercice 15 : Pendant la très brève période de charge des condensateurs, on va supposer qu'on a eu les courants suivants dans le circuit.



Sur la figure, nous avons également mis les signes des armatures des condensateurs selon notre convention (qui suppose que la plaque positive est du côté où le courant arrive). Remarquez aussi comme on a spécifié que la charge du condensateur qui reçoit le courant I_1 est Q_1, que la charge du condensateur qui reçoit le courant I_2 est Q_2, et que la charge du condensateur qui reçoit le courant I_3 est Q_3.

La loi des nœuds nous donne (en utilisant le nœud de droite)

$$I_1 + I_2 = I_3$$

Ce qui signifie que

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

La loi des mailles nous donne ensuite deux équations. La première est faite avec la maille du bas. On part du nœud de droite et on va dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

$$-11 + \frac{Q_2}{40\times 10^{-6}} + 66 - \frac{Q_1}{20\times 10^{-6}} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 55 + \frac{Q_2}{40\times 10^{-6}} - \frac{Q_1}{20\times 10^{-6}} = 0$$

La seconde est faite avec la maille du haut. On part du nœud de droite et on va dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

$$-\frac{Q_3}{50\times 10^{-6}} - \frac{Q_2}{40\times 10^{-6}} + 11 = 0$$

On remarque alors que Q_2 est présent dans ces deux équations. On va donc isoler les deux autres variables dans ces équations. On isole donc Q_1 dans la première équation des mailles

$$\begin{aligned} 55 + \frac{Q_2}{40\times 10^{-6}} - \frac{Q_1}{20\times 10^{-6}} &= 0 \\ \frac{Q_1}{20\times 10^{-6}} &= 55 + \frac{Q_2}{40\times 10^{-6}} \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad Q_1 = 0{,}001\,1 + \frac{Q_2}{2}$$

et Q_3 dans la deuxième équation des mailles

$$\begin{aligned} -\frac{Q_3}{50\times 10^{-6}} - \frac{Q_2}{40\times 10^{-6}} + 11 &= 0 \\ \frac{Q_3}{50\times 10^{-6}} &= -\frac{Q_2}{40\times 10^{-6}} + 11 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad Q_3 = -\frac{5Q_2}{4} + 0{,}000\,55$$

et on remplace ensuite dans la loi des nœuds.

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 &= Q_3 \\ 0{,}001\,1 + \frac{Q_2}{2} + Q_2 &= -\frac{5Q_2}{4} + 0{,}000\,55 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} \frac{Q_2}{2} + Q_2 + \frac{5Q_2}{4} &= 0{,}000\,55 - 0{,}001\,1 \\ \frac{11Q_2}{4} &= -0{,}000\,55 \\ Q_2 &= -0{,}000\,2\,\mathrm{C} = -0{,}2\,\mathrm{mC} \end{aligned}$$

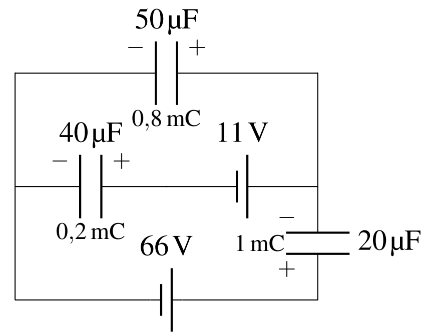
Les autres charges sont

$$Q_1 = 0{,}001\,1 + \frac{Q_2}{2} = 0{,}001\,1 + \frac{-0{,}000\,2}{2} = 0{,}001\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{mC}$$

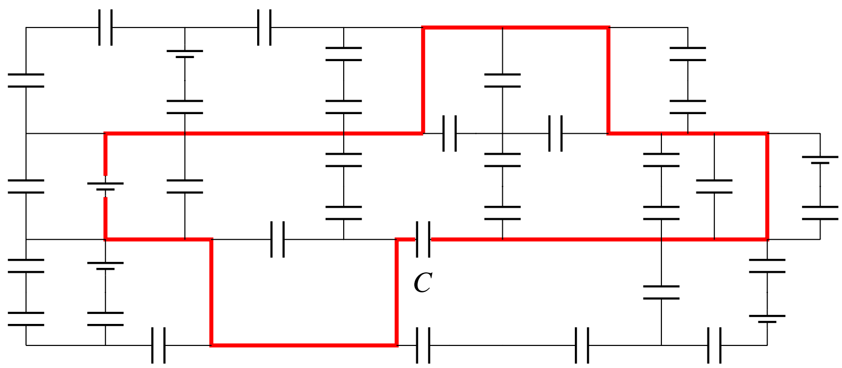
et

$$Q_3 = -\frac{5Q_2}{4} + 0{,}000\,55 = -\frac{5\times(-0{,}000\,2)}{4} + 0{,}000\,55 = 0{,}000\,8\,\mathrm{C} = 0{,}8\,\mathrm{mC}$$

Puisque Q_2 a donné un résultat négatif, les armatures de ce condensateur ont des signes contraires de ceux qu'on avait supposés dans notre schéma initial. La solution est donc



Exercice 16 : En suivant la maille montrée sur cette figure dans le sens des aiguilles d'une montre en partant du nœud le plus haut à droite



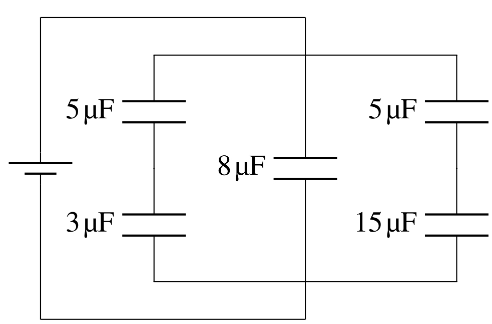
on arrive à la loi de mailles suivante.

$$-\frac{Q}{5}+10=0$$

Ce qui donne

$$\frac{Q}{5}=10 \qquad \longrightarrow \qquad Q=50\,\mu\text{C}$$

Exercice 17 : Nous avons premièrement un condensateur de 9 μF et un condensateur de 6 μF en parallèle. La capacité équivalente de ces condensateurs est 15 μF. On a alors la situation suivante.



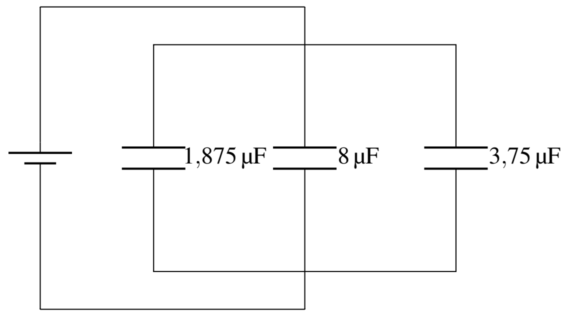
Nous avons alors les condensateurs de 5 μF et 3 μF en série. La capacité équivalente est

$$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{5}+\frac{1}{3} \qquad \longrightarrow \qquad C_{eq}=1{,}875\,\mu\text{F}$$

Nous avons alors les condensateurs de 15 μF et 5 μF en série. La capacité équivalente est

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{15} + \frac{1}{5} \qquad \longrightarrow \qquad C_{\text{eq}} = 3{,}75\,\mu\text{F}$$

Nous avons alors la situation suivante.



Il ne reste que trois condensateurs en parallèle dont la capacité équivalente est

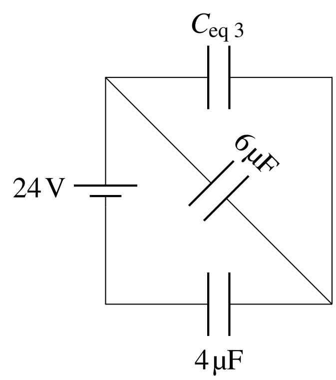
$$C_{\text{eq}} = 1{,}875 + 8 + 3{,}75 = 13{,}625\,\mu\text{F}$$

Exercice 18 :

(a) Si la source a fourni 72 μC, c'est que la capacité équivalente est

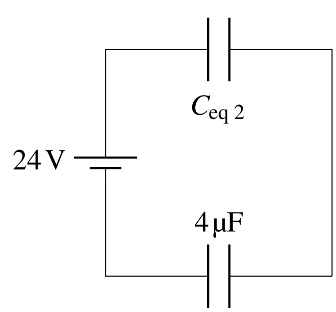
$$Q = C_{\text{eq}}\Delta V \qquad \longrightarrow \qquad 72 = C_{\text{eq}} \cdot 24 \qquad \longrightarrow \qquad C_{\text{eq}} = 3\,\mu\text{F}$$

On va lentement reconstruire le circuit ce circuit. Cette capacité équivalente vient de ce circuit.



où $C_{\text{eq 3}}$ est le condensateur équivalent des condensateurs C et 8 μF en série.

On a ensuite un condensateur de 6 μF en parallèle avec le condensateur $C_{\text{eq 3}}$. On a donc le circuit suivant.



où $C_{\text{eq }2}$ est le condensateur équivalent du condensateur $C_{\text{eq }3}$ et du condensateur de 6 µF. On a donc

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{C_{\text{eq }2}} \qquad \longrightarrow \qquad C_{\text{eq }2} = 12\,\mu\text{F}$$

Puisque ce condensateur $C_{\text{eq }2}$ est le résultat du condensateur $C_{\text{eq }3}$ et de celui de 6 µF en parallèle, on a

$$12 = 6 + C_{\text{eq }3} \qquad \longrightarrow \qquad C_{\text{eq }3} = 6\,\mu\text{F}$$

Puisque le condensateur $C_{\text{eq }3}$ est le condensateur équivalent des condensateurs C et 8 µF en série, on a

$$\frac{1}{C_{\text{eq }3}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{C} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{1}{6} = \frac{1}{8} + \frac{1}{C} \qquad \longrightarrow \qquad C = 24\,\mu\text{F}$$

(b) Le condensateur $C_{\text{eq }2}$ étant en série avec la source et le condensateur, la charge du condensateur $C_{\text{eq }2}$ est aussi de 72 µC. La différence de potentiel aux bornes de $C_{\text{eq }2}$ est donc

$$Q = C_{\text{eq }2}\Delta V \qquad \longrightarrow \qquad 72 = 12 \cdot \Delta V \qquad \longrightarrow \qquad \Delta V = 6\,\text{V}$$

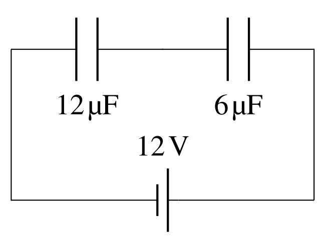
Puisque $C_{\text{eq }2}$ est la capacité équivalente du condensateur $C_{\text{eq }3}$ et du condensateur de 6 µF en parallèle, on doit aussi avoir une différence de potentiel de 6 V aux bornes du condensateur de $C_{\text{eq }3}$. La charge de $C_{\text{eq }3}$ est donc de

$$Q = C_{\text{eq }3}\Delta V = 6 \times 6 = 36\,\mu\text{C}$$

On va finalement ramener les deux condensateurs C (de 24 µF) et de 8 µF en série. Quand on fait cela, chacun des condensateurs à la même charge que le condensateur équivalent. La charge du condensateur C est donc aussi de 36 µC. La différence de potentiel aux bornes de ce condensateur est donc

$$Q = C\Delta V \qquad \longrightarrow \qquad 36 = 24 \cdot \Delta V \qquad \longrightarrow \qquad \Delta V = 1{,}5\,\text{V}$$

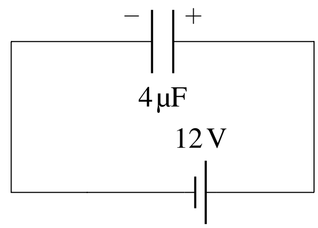
Exercice 19 : Pour commencer, il faut simplifier le circuit pour trouver la capacité équivalente. On remarque que les condensateurs de 4 µF et 8 µF sont en parallèle. La capacité équivalente de ces condensateurs est 12 µF. On a alors la situation suivante.



Nous avons alors les condensateurs de 12 µF et 6 µF en série. La capacité équivalente est

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \qquad \longrightarrow \qquad C_{\text{eq}} = 4\,\mu\text{F}$$

On a donc le circuit suivant.

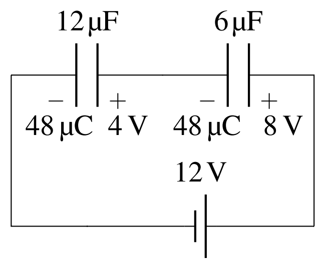


Sur la figure, on a spécifié les signes des armatures. C'est facile de déterminer ces signes puisque l'armature positive est toujours reliée à la borne positive quand on branche un condensateur à une source.

La source a donc donné une charge de

$$Q = C_{\text{eq}}\Delta V = 4 \times 12 = 48\,\mu\text{C}$$

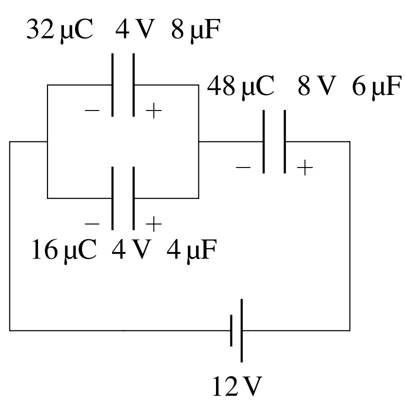
On va maintenant désimplifier le circuit pour trouver les charges des condensateurs. On va premièrement ramener les deux condensateurs en série. Quand on fait cela, chacun des condensateurs à la même charge que le condensateur équivalent. Les signes des armatures sont également identiques à ceux du condensateur équivalent. On a donc la situation suivante.



Nous avons également indiqué sur cette figure la différence de potentiel aux bornes de chaque condensateur. Voici le calcul de ces différences de potentiel.

$$\begin{aligned} Q &= C\Delta V \\ 48 &= 12 \cdot \Delta V \\ \Delta V &= 4\,\text{V} \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} Q &= C\Delta V \\ 48 &= 6 \cdot \Delta V \\ \Delta V &= 8\,\text{V} \end{aligned}$$

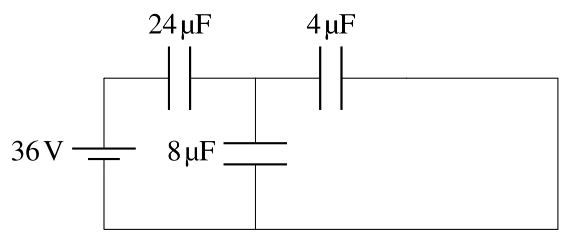
On va encore désimplifier en ramenant les deux condensateurs en parallèle. Quand on fait cela, chacun des condensateurs à la même différence de potentiel que le condensateur équivalent. Les signes des armatures sont également identiques à ceux du condensateur équivalent. On a donc la situation suivante, qui est notre réponse finale.



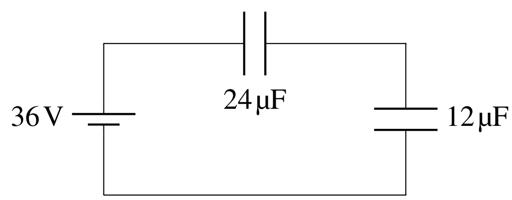
La charge des deux condensateurs en parallèle a été trouvée avec les formules suivantes.

$$Q = C\Delta V = 8 \times 4 = 32\,\mu\text{C} \qquad\qquad Q = C\Delta V = 4 \times 4 = 16\,\mu\text{C}$$

Exercice 20 : Pour commencer, il faut simplifier le circuit pour trouver la capacité équivalente. On remarque que le condensateur de 2 µF est court-circuité. Ce condensateur ne se charge donc pas et on peut donc l'enlever du circuit pour simplifier. On a alors la situation suivante.



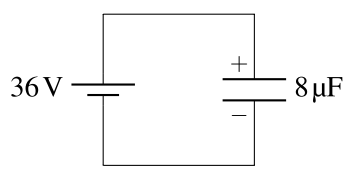
Les condensateurs de 8 µF et 4 µF sont en parallèle et leur capacité équivalente est de 12 µF. On a alors la situation suivante.



Nous avons alors les condensateurs de 12 µF et 24 µF en série. La capacité équivalente est

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{24} + \frac{1}{12} \qquad \longrightarrow \qquad C_{\text{eq}} = 8\,\mu\text{F}$$

On a donc le circuit suivant.

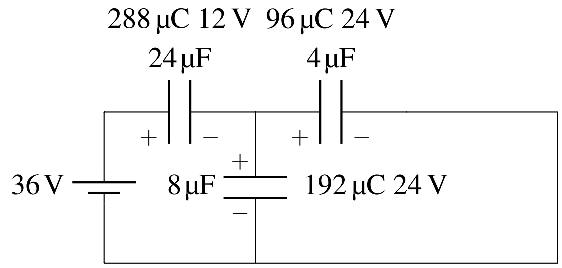


Sur la figure, on a spécifié les signes des armatures. C'est facile de déterminer ces signes puisque l'armature positive est toujours reliée à la borne positive quand on branche un condensateur à une source.

La source a donc donné une charge de

$$Q = C\Delta V = 8 \times 36 = 288\,\mu\text{C}$$

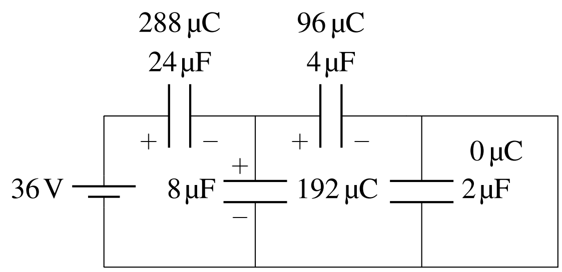
On va maintenant désimplifier le circuit pour trouver les charges des condensateurs. On va premièrement ramener les deux condensateurs en série. Quand on fait cela, chacun des condensateurs à la même charge que le condensateur équivalent. Les signes des armatures sont également identiques à ceux du condensateur équivalent. On a donc la situation suivante.



La charge des deux condensateurs en parallèle a été trouvée avec les formules suivantes.

$$Q = C\Delta V = 4 \times 24 = 96\,\mu\text{C} \qquad\qquad Q = C\Delta V = 8 \times 24 = 192\,\mu\text{C}$$

Il ne reste alors qu'à ramener le condensateur court-circuité qui n'est pas chargé. Notre réponse finale est donc



Exercice 21 : On va séparer ce condensateur en deux condensateurs en parallèle. Trouvons premièrement la largeur des plaques.

$$90\,\text{cm}^2 = 9\,\text{cm} \times \text{largeur} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{largeur} = 10\,\text{cm}$$

Cela signifie que l'aire des plaques du condensateur de gauche est de

$$A_1 = 3 \times 10 = 30\,\text{cm}^2$$

et que l'aire des plaques du condensateur de droite est de

$$A_2 = 6 \times 10 = 60\,\text{cm}^2$$

La capacité de chaque condensateur est donc

$$C_1 = \kappa_1 \varepsilon_0 \frac{A_1}{d} = 2 \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times \frac{0{,}003}{0{,}002} = 2{,}656 \times 10^{-11}\,\text{F} = 26{,}56\,\text{pF}$$
$$C_2 = \kappa_2 \varepsilon_0 \frac{A_2}{d} = 3 \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times \frac{0{,}006}{0{,}002} = 7{,}969 \times 10^{-11}\,\text{F} = 79{,}69\,\text{pF}$$

Comme cette situation est équivalente aux deux condensateurs en parallèle, la capacité totale est de $26{,}56\,\text{pF} + 79{,}69\,\text{pF} = 106{,}25\,\text{pF}$.

Exercice 22 : On va séparer ce condensateur en deux condensateurs en série. La capacité de chaque condensateur est

$$C_1 = \kappa_1 \varepsilon_0 \frac{A}{d_1} = 2 \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times \frac{0{,}009}{0{,}001\,2} = 1{,}328 \times 10^{-10}\,\text{F} = 132{,}8\,\text{pF}$$
$$C_2 = \kappa_2 \varepsilon_0 \frac{A}{d_2} = 3 \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times \frac{0{,}009}{0{,}000\,8} = 2{,}988 \times 10^{-10}\,\text{F} = 298{,}8\,\text{pF}$$

Comme cette situation est équivalente aux deux condensateurs en série, la capacité totale est de

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{132{,}8} + \frac{1}{298{,}8} \qquad \longrightarrow \qquad C_{\text{eq}} = 91{,}95\,\text{pF}$$

Exercice 23 : On va séparer ce condensateur en trois condensateurs en parallèle. La capacité de chaque condensateur est donc

$$\begin{aligned}
C_1 &= \kappa_1 \varepsilon_0 \frac{A_1}{d} = 1 \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times \frac{0{,}002}{0{,}000\,2} = 8{,}85 \times 10^{-11}\,\text{F} = 88{,}5\,\text{pF} \\
C_2 &= \kappa_2 \varepsilon_0 \frac{A_2}{d} = 2{,}4 \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times \frac{0{,}002}{0{,}000\,2} = 2{,}125 \times 10^{-10}\,\text{F} = 212{,}5\,\text{pF} \\
C_3 &= \kappa_3 \varepsilon_0 \frac{A_3}{d} = 1 \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times \frac{0{,}006}{0{,}000\,2} = 2{,}656 \times 10^{-10}\,\text{F} = 265{,}6\,\text{pF}
\end{aligned}$$

Comme cette situation est équivalente aux trois condensateurs en parallèle, la capacité totale est de $88{,}5\,\text{pF} + 212{,}5\,\text{pF} + 265{,}6\,\text{pF} = 566{,}7\,\text{pF}$.

Exercice 24 : La charge initiale du condensateur est de

$$Q = C\Delta V = 12 \times 24 = 288\,\mu\text{C}$$

Comme le condensateur est débranché, la charge des plaques restera la même. On aura donc $Q' = 288\,\mu\text{C}$.

Avec le diélectrique, la capacité deviendra

$$C' = \kappa C = 3 \times 12 = 36\,\mu\text{F}$$

Ainsi, la différence de potentiel aux bornes du condensateur sera de

$$Q' = C'\Delta V' \qquad \longrightarrow \qquad 288 = 36 \cdot \Delta V' \qquad \longrightarrow \qquad \Delta V' = 8\,\text{V}$$

Exercice 25 : La charge initiale du condensateur est de

$$Q = C\Delta V = 12 \times 24 = 288\,\mu\text{C}$$

Comme le condensateur est branché à la source, la différence de potentiel aux bornes du condensateur restera la même. On aura donc $\Delta V' = 24\,\text{V}$.
Avec le diélectrique, la capacité deviendra

$$C' = \kappa C = 3 \times 12 = 36\,\mu\text{F}$$

Ainsi, la charge sur chaque armature du condensateur sera de

$$Q' = C'\Delta V' = 36 \times 24 = 864\,\mu\text{C}$$

Exercice 26 : En série, chaque condensateur a la même charge que le condensateur équivalent. Avant l'entrée du diélectrique, la capacité équivalente est

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{60} + \frac{1}{20} \qquad \longrightarrow \qquad C_{\text{eq}} = 15\,\mu\text{F}$$

La charge de ce condensateur équivalent est

$$Q = C\Delta V = 15 \times 12 = 180\,\mu\text{C}$$

C'est la charge initiale de notre condensateur du bas.

Après l'insertion du diélectrique, la capacité du condensateur du bas devient

$$C' = \kappa C = 12 \times 20 = 240\,\mu\text{F}$$

La capacité équivalente devient alors

$$\frac{1}{C'_{\text{eq}}} = \frac{1}{C'_1} + \frac{1}{C'_2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{C'_{\text{eq}}} = \frac{1}{60} + \frac{1}{240} \qquad \Longrightarrow \qquad C'_{\text{eq}} = 48\,\mu\text{F}$$

et la charge est

$$Q' = C'\Delta V' = 48 \times 12 = 576\,\mu\text{C}$$

C'est la charge finale de notre condensateur du bas. La charge passe donc de 180 µC à 576 µC.

Exercice 27 : L'énergie est

$$U = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-6} \times (200)^2 = 0{,}4\,\text{J}$$

Exercice 28 : La capacité doit être de

$$U = \frac{1}{2}C\Delta V^2 \qquad \longrightarrow \qquad 0{,}01 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (500)^2 \qquad \longrightarrow \qquad C = 8 \times 10^{-8}\,\text{F} = 80\,\text{nF}$$

On trouve finalement la distance entre les plaques avec

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \quad \longrightarrow \quad 8 \times 10^{-8} = 8{,}854 \times 10^{-12} \cdot \frac{0{,}02}{d} \quad \longrightarrow \quad d = 2{,}214 \times 10^{-6}\,\text{m} = 2{,}214\,\mu\text{m}$$

Exercice 29 : Puisque l'énergie est de 0,12 J, on sait que

$$U = \frac{Q^2}{2C} \qquad \longrightarrow \qquad 0{,}12 = \frac{Q^2}{2C}$$

Puisque le condensateur est débranché de la source, on sait que la charge restera identique et c'est pour cela qu'on prend la formule avec Q. (Si le condensateur était resté branché, on aurait plutôt opté pour la formule avec ΔV).

Après avoir éloigné les plaques, l'énergie est

$$U' = \frac{Q'^2}{2C'}$$

Comme la charge reste identique quand le condensateur est débranché de la source, on a $Q' = Q$. L'énergie est donc

$$U' = \frac{Q^2}{2C'}$$

Pour la capacité C', comparons les valeurs initiale et finale.

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \qquad \text{et} \qquad C' = \varepsilon_0 \frac{A}{2d}$$

En divisant la capacité finale par la capacité initiale, on a

$$\frac{C'}{C} = \frac{\varepsilon 0 \frac{A}{2d}}{\varepsilon_0 \frac{A}{d}} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{C'}{C} = \frac{1}{2} \qquad \longrightarrow \qquad C' = \frac{1}{2}C$$

L'énergie finale est donc

$$U' = \frac{Q^2}{2C'} = \frac{Q^2}{2\frac{1}{2}C} = 2\frac{Q^2}{2C}$$

Mais puisque $Q^2/2C = 0{,}12\,\mathrm{J}$, on a

$$U' = 2\frac{Q^2}{2C} = 2 \times 0{,}12 = 0{,}24\,\mathrm{J}$$

Exercice 30 : Trouvons la charge de chacun de ces condensateurs. La capacité équivalente des trois condensateurs est

$$\frac{1}{C_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad C_{\mathrm{eq}} = 2\,\mu\mathrm{F}$$

La charge de ce condensateur équivalent est

$$Q = C\Delta V = 2 \times 24 = 48\,\mu\mathrm{C}$$

Comme la charge du condensateur équivalent en série est la même que celle de chacun des condensateurs en série, chacun des trois condensateurs a une charge de 48 µC. L'énergie de chaque condensateur est donc

$$U_{12\,\mu\mathrm{F}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(48 \times 10^{-6})^2}{2 \times 12 \times 10^{-6}} = 9{,}6 \times 10^{-5}\,\mathrm{J}$$
$$U_{6\,\mu\mathrm{F}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(48 \times 10^{-6})^2}{2 \times 6 \times 10^{-6}} = 1{,}92 \times 10^{-4}\,\mathrm{J}$$
$$U_{4\,\mu\mathrm{F}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(48 \times 10^{-6})^2}{2 \times 4 \times 10^{-6}} = 2{,}88 \times 10^{-4}\,\mathrm{J}$$

Exercice 31 :

(a) La capacité est

$$C = \kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d} = 2{,}5 \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times \frac{0{,}08}{0{,}002} = 8{,}854 \times 10^{-10}\,\mathrm{F} = 885{,}4\,\mathrm{pF}$$

(b) Le champ électrique maximal est de 24 MV/m. La différence de potentiel maximale aux bornes du condensateur est donc

$$\Delta V_{\max} = E_{\max} d = 24 \times 10^6 \times 0{,}002 = 48\,000\,\mathrm{V}$$

L'énergie maximale est donc de

$$U_{\max} = \frac{1}{2} C \Delta V_{\max}^2 = \frac{1}{2} \cdot 8{,}854 \times 10^{-10} \times (48\,000)^2 = 1{,}02\,\mathrm{J}$$

Exercice 32 : On a

$$Q = C\mathscr{E}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}}\right)$$

Puisque la charge maximale est de $C\mathscr{E}$, 90 % de la charge maximale est $0{,}9C\mathscr{E}$. On a donc

$$\begin{aligned} 0{,}9C\mathscr{E} &= C\mathscr{E}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}}\right) \\ 0{,}9 &= \left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}}\right) \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} \mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}} &= 0{,}1 \\ \frac{-t}{RC} &= \ln(0{,}1) \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} t &= -RC\ln(0{,}1) \\ t &= -1\,000 \times 0{,}05 \times \ln(0{,}1) \\ t &= 115{,}1\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Exercice 33 : On a

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} e^{\frac{-t}{RC}}$$

Puisque le courant initial est de $\mathscr{E}/R$, 50 % du courant initial est $0{,}5\mathscr{E}/R$. On a donc

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{\mathscr{E}}{R} e^{\frac{-t}{RC}} \\ 0{,}5 = e^{\frac{-t}{RC}} \end{gathered} \quad \Longrightarrow \quad \begin{gathered} \frac{-t}{RC} = \ln(0{,}5) \\ t = -RC\ln(0{,}5) \end{gathered} \quad \Longrightarrow \quad \begin{gathered} 0{,}005 = 2\,000 \times C \times \ln(0{,}5) \\ C = 3{,}607 \times 10^{-6}\,\text{F} = 3{,}607\,\mu\text{F} \end{gathered}$$

Exercice 34 : Tout au long de cet exercice, nous aurons besoin de la valeur de la constante de temps RC. Cette constante vaut

$$RC = 5\,000 \times 0{,}08 = 400\,\text{s}$$

(a) Le courant initial est

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{24}{5\,000} = 0{,}004\,8\,\text{A} = 4{,}8\,\text{mA}$$

(b) Le courant est

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} e^{\frac{-t}{RC}} = \frac{24}{5\,000} e^{\frac{-90}{400}} = 3{,}833\,\text{mA}$$

(c) La puissance dissipée est

$$P_R = RI^2 = 5\,000 \times (0{,}003\,833)^2 = 0{,}073\,45\,\text{W}$$

(d) Au bout de 90 secondes, la charge du condensateur est

$$Q = C\mathscr{E}\left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right) = 0{,}08 \times 24 \times \left(1 - e^{\frac{-90}{400}}\right) = 0{,}386\,8\,\text{C}$$

(e) La différence de potentiel est donc

$$Q = C\Delta V \quad \longrightarrow \quad 0{,}386\,8 = 0{,}08 \times \Delta V \quad \longrightarrow \quad \Delta V = 4{,}836\,\text{V}$$

(f) La différence de potentiel est

$$\Delta V = RI = 5\,000 \times 0{,}003\,833 = 19{,}164\,\text{W}$$

(Remarquez comme la somme des différences de potentiel aux bornes de la résistance et du condensateur donne 24 V.)

(g) L'énergie est

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(0{,}386\,8)^2}{2 \times 0{,}08} = 0{,}935\,3\,\text{J}$$

(h) L'énergie fournie par la pile est

$$U = Q\mathscr{E} = 0{,}386\,8 \times 24 = 9{,}284\,\text{J}$$

De cette énergie, 0,935 3 J se retrouve dans le condensateur. Le reste de cette énergie est dissipée par la résistance. Cette énergie est

$$U_R = 9{,}284 - 0{,}935\,3 = 8{,}349\,\text{J}$$

Exercice 35 : Tout au long de cet exercice, nous aurons besoin de la valeur de la constante de temps RC. Cette constante vaut

$$RC = 10\,000 \times 0{,}02 = 200\,\mathrm{s}$$

(a) Le courant initial est

$$I_0 = \frac{Q_0}{RC} = \frac{4}{200} = 0{,}02\,\mathrm{A} = 20\,\mathrm{mA}$$

(b) Le courant est

$$I = \frac{Q_0}{RC}\mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}} = 20 \cdot \mathrm{e}^{\frac{-90}{200}} = 12{,}75\,\mathrm{mA}$$

(c) La puissance dissipée est

$$P_R = RI^2 = 10\,000 \times (0{,}012\,75)^2 = 1{,}626\,\mathrm{W}$$

(d) Au bout de 90 secondes, la charge du condensateur est

$$Q = Q_0\mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}} = 4 \cdot \mathrm{e}^{\frac{-90}{200}} = 2{,}551\,\mathrm{C}$$

(e) L'énergie initiale est

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(4)^2}{2 \times 0{,}02} = 400\,\mathrm{J}$$

(f) L'énergie est

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(2{,}551)^2}{2 \times 0{,}02} = 162{,}6\,\mathrm{J}$$

(g) L'énergie perdue par le condensateur est

$$400 - 162{,}6 = 237{,}4\,\mathrm{J}$$

L'énergie perdue par le condensateur est l'énergie dissipée par la résistance.

Exercice 36 : La résistance équivalente est de $5\,000\,\Omega$ et la capacité équivalente est de $50\,\mathrm{mF}$. La constante de temps est donc

$$RC = 5\,000 \times 0{,}05 = 250\,\mathrm{s}$$

Le courant est donc

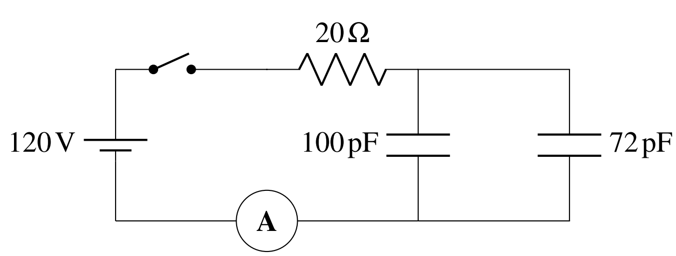
$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}\mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}} = \frac{20}{5\,000}\mathrm{e}^{\frac{-120}{250}} = 2{,}475\,\mathrm{mA}$$

Exercice 37 : Il faut premièrement trouver la capacité équivalente. Nous avons premièrement 3 condensateurs en série. La capacité équivalente est de

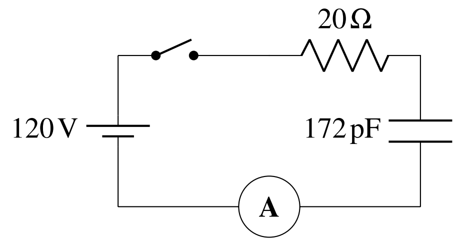
$$\frac{1}{C_{\mathrm{eq}\,1}} = \frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \frac{1}{180}$$

$$C_{\mathrm{eq}\,1} = 72\,\mathrm{pF}$$

On a maintenant le circuit suivant.



Nous avons maintenant des condensateurs en parallèle dont la capacité équivalente est de 172 pF. On a donc le circuit suivant.



Le courant est

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

(a) Comme la valeur de l'exponentiel diminue continuellement en fonction du temps, le courant maximal est à $t = 0\,\mathrm{s}$. Le courant maximal est donc

$$I_{\max} = \frac{\mathscr{E}}{R} e^{-\frac{0}{RC}} = \frac{120}{20} e^{-\frac{0}{RC}} = 6\,\mathrm{A}$$

(b) On veut

$$\begin{aligned} I &= \frac{\mathscr{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \\ 1 &= \frac{120}{20} e^{-\frac{t}{RC}} \\ 1 &= 6e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned} \implies \begin{aligned} \tfrac{1}{6} &= e^{-\frac{t}{RC}} \\ \ln\left(\tfrac{1}{6}\right) &= -\frac{t}{RC} \\ -RC\ln\left(\tfrac{1}{6}\right) &= t \end{aligned} \implies \begin{aligned} -20 \times 172 \times 10^{-12} \times \ln\left(\tfrac{1}{6}\right) &= t \\ t &= 6{,}164\,\mathrm{ns} \end{aligned}$$

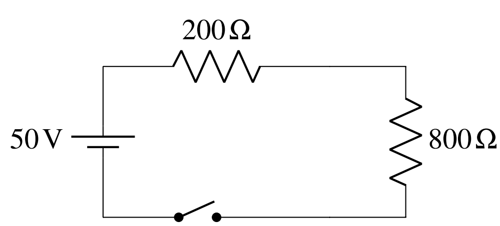
Exercice 38 : Puisqu'il faut 0,5 s pour que le courant atteigne 50 % de sa valeur initiale, on a

$$\begin{aligned} I &= \frac{Q_0}{RC} e^{\frac{-t}{RC}} \\ 0{,}5 \cdot \frac{Q_0}{RC} &= \frac{Q_0}{RC} e^{\frac{-0{,}5}{RC}} \end{aligned} \implies \begin{aligned} 0{,}5 &= e^{\frac{-0{,}5}{RC}} \\ \frac{-0{,}5}{RC} &= \ln(0{,}5) \end{aligned} \implies \begin{aligned} RC &= \frac{-0{,}5}{\ln(0{,}5)} \\ RC &= 0{,}721\,3\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Ainsi, le temps pour arriver à 1 % du courant initial est

$$\begin{aligned} I &= \frac{Q_0}{RC} e^{\frac{-t}{RC}} \\ 0{,}01 \cdot \frac{Q_0}{RC} &= \frac{Q_0}{RC} e^{\frac{-t}{0{,}721\,3}} \end{aligned} \implies \begin{aligned} 0{,}01 &= e^{\frac{-t}{0{,}721\,3}} \\ \frac{-t}{0{,}721\,3} &= \ln(0{,}01) \end{aligned} \implies \begin{aligned} t &= -0{,}721\,3 \times \ln(0{,}01) \\ t &= 3{,}322\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Exercice 39 : On doit premièrement trouver la charge du condensateur au bout d'un temps très long après la fermeture de l'interrupteur. Au bout d'un temps très long, les condensateurs bloquent le courant. On peut alors enlever la branche avec le condensateur pour trouver le courant dans le circuit. Si on fait cela, on a le circuit suivant.



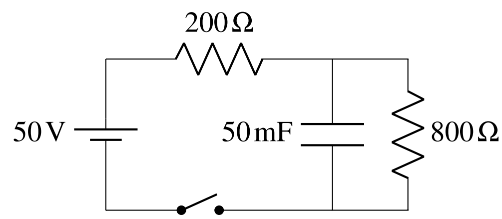
Il est alors assez facile de déterminer le courant avec la résistance équivalente de 1 000 Ω. Le courant est

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{50}{1\,000} = 0{,}050\,\mathrm{A} = 50\,\mathrm{mA}$$

Ainsi, la différence de potentiel aux bornes de la résistance de 800 Ω est

$$\Delta V = RI = 800 \times 0{,}05 = 40\,\mathrm{V}$$

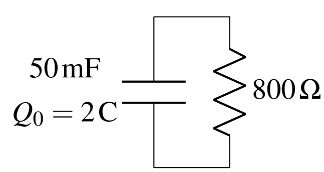
Donc, dans ce circuit,



la différence de potentiel aux bornes du condensateur est aussi de 40 V puisque le condensateur est en parallèle avec la résistance de 800 Ω. La charge du condensateur est donc de

$$Q = C\Delta V = 0{,}05 \times 40 = 2\,\mathrm{C}$$

Une fois que le condensateur a cette charge, on ouvre l'interrupteur. On peut alors enlever la branche avec l'interrupteur ouvert pour avoir le circuit suivant.

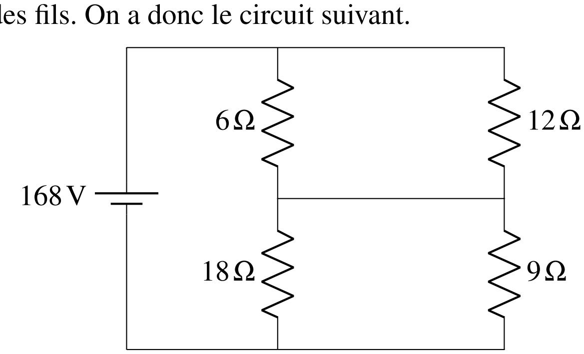


Il s'agit maintenant d'un circuit dans lequel un condensateur se décharge à travers une résistance. La charge initiale de cette phase de décharge est la charge finale de la phase de charge, soit 2 C. On peut maintenant calculer la charge 20 secondes après le début de la décharge. Cette charge est

$$Q = Q_0 e^{\frac{-t}{RC}} = 2 \cdot e^{\frac{-20}{0{,}05 \times 800}} = 1{,}213\,\mathrm{C}$$

Exercice 40 :

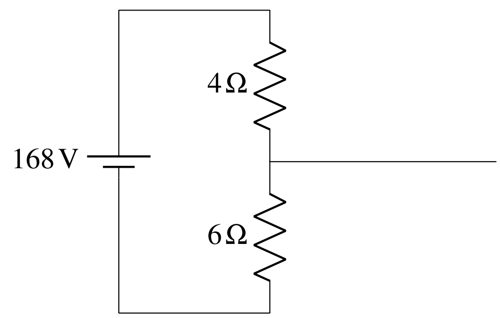
(a) Immédiatement après la fermeture de l'interrupteur, on trouve les courants en remplaçant les condensateurs par des fils. On a donc le circuit suivant.



Nous avons alors une résistance de $6\,\Omega$ en parallèle avec une résistance de $12\,\Omega$ et une résistance de $9\,\Omega$ et parallèle avec une résistance de $18\,\Omega$. Les résistances équivalentes sont

$$\frac{1}{R_{\text{eq 1}}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \qquad \longrightarrow \qquad R_{\text{eq 1}} = 4\,\Omega$$
$$\frac{1}{R_{\text{eq 2}}} = \frac{1}{18} + \frac{1}{9} \qquad \longrightarrow \qquad R_{\text{eq 2}} = 6\,\Omega$$

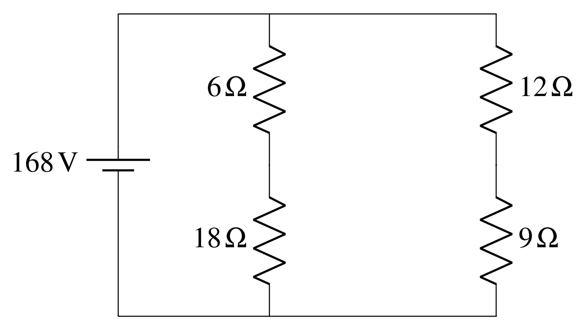
On a alors le circuit suivant.



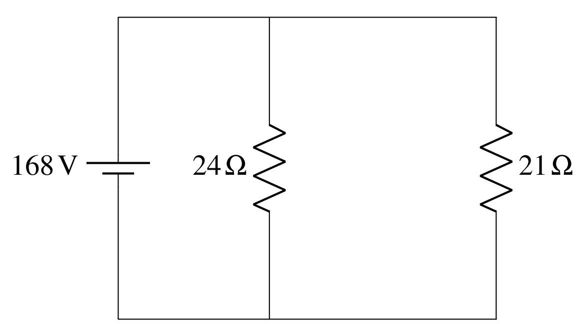
La résistance équivalente de ce circuit étant de $10\,\Omega$, le courant fourni par la source est

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_{\text{eq}}} = \frac{168}{10} = 16{,}8\,\text{A}$$

(b) Au bout d'un temps très long, on élimine les branches avec des condensateurs pour connaitre le courant. On a donc le circuit suivant.



On trouve alors les valeurs des résistances équivalentes en série pour arriver au circuit suivant.



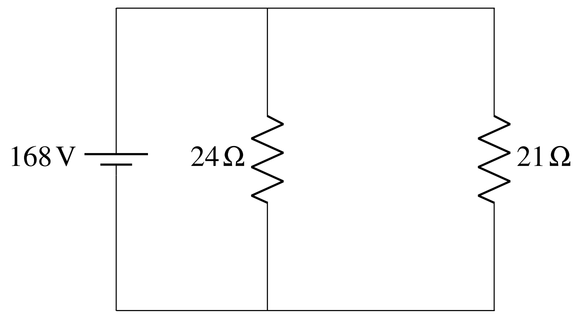
La résistance équivalente est donc

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{24} + \frac{1}{21} \qquad \longrightarrow \qquad R_{\text{eq}} = 11{,}2\,\Omega$$

Le courant fourni par la source est donc

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_{\text{eq}}} = \frac{168}{11{,}2} = 15\,\text{A}$$

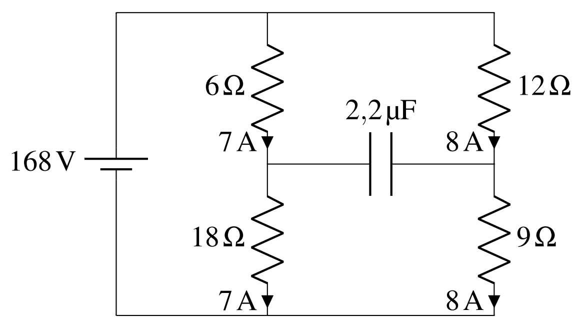
(c) Pour trouver la charge du condensateur, il faut connaitre les courants partout dans le circuit. Pour déterminer ces courants, il faut désimplifier le circuit. Commençons avec le circuit suivant.



La différence de potentiel aux bornes de chacune de ces résistances est de 12 V puisqu'elles sont en parallèle avec la source. Le courant dans chacune est

$$I_{24\,\Omega} = \frac{168}{24} = 7\,\text{A}$$
$$I_{21\,\Omega} = \frac{168}{21} = 8\,\text{A}$$

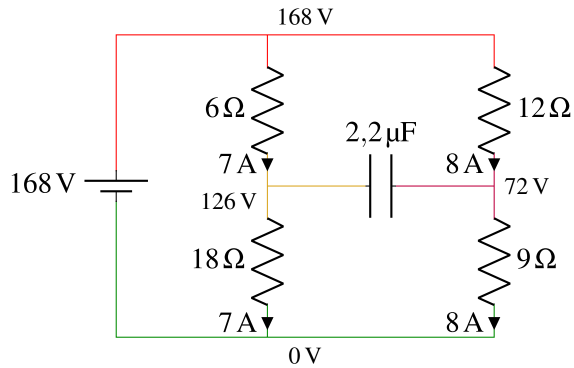
En ramenant les résistances en série, les courants seront les mêmes que pour les résistances équivalentes et on aura donc la situation suivante.



On peut trouver la charge du condensateur avec une loi des mailles de Kirchhoff dans la maille en haut à droite. On va partir du coin supérieur droit et aller dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. On a donc

$$-6 \times 7 - \frac{Q}{2{,}2 \times 10^{-6}} + 12 \times 8 = 0$$
$$-42 - \frac{Q}{2{,}2 \times 10^{-6}} + 96 = 0$$
$$-\frac{Q}{2{,}2 \times 10^{-6}} + 54 = 0$$
$$Q = 1{,}188 \times 10^{-4}\,\text{C} = 118{,}4\,\mu\text{C}$$

(On aurait pu aussi trouver le potentiel des fils pour arriver à la situation suivante.



On peut alors voir que la différence de potentiel aux bornes du condensateur est de

$$\Delta V = 126 - 72 = 54\,\mathrm{V}$$

et que la charge du condensateur est

$$Q = C\Delta V = 2{,}2 \times 54 = 118{,}8\,\mu\mathrm{C})$$

Exercice 41 : Ce condensateur est équivalent à la décharge d'un circuit RC puisque le condensateur se vide à travers une résistance. On trouvera le temps avec la formule

$$Q = Q_0 \mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}}$$

Toutefois, pour trouver le temps, il faut connaitre la valeur de RC. La capacité est la capacité d'un condensateur à plaque parallèle est

$$C = \kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

Pour la résistance, le courant passe à travers un diélectrique de longueur d et d'aire A. La résistance est donc

$$R = \rho\frac{d}{A}$$

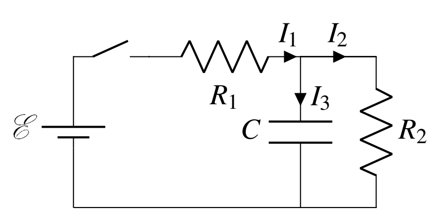
La valeur de RC est donc

$$RC = \rho\frac{d}{A} \cdot \kappa\varepsilon_0\frac{A}{d} = \rho\kappa\varepsilon_0 = 3 \times 10^{13} \times 5 \times 8{,}854 \times 10^{-12} = 1\,328\,\mathrm{s}$$

Si on veut qu'il ne reste que la moitié de la charge initiale, on a donc

$$\begin{array}{c} Q = Q_0 \mathrm{e}^{\frac{-t}{RC}} \\ 0{,}5 \cdot Q_0 = Q_0 \mathrm{e}^{\frac{-t}{1\,328}} \end{array} \implies \begin{array}{c} 0{,}5 = \mathrm{e}^{\frac{-t}{1\,328}} \\ \frac{-t}{1\,328} = \ln(0{,}5) \end{array} \implies \begin{array}{c} t = -1\,328 \times \ln(0{,}5) \\ t = 920{,}6\,\mathrm{s} \end{array}$$

Exercice 42 : On va travailler avec les courants suivants.



Selon la loi des nœuds, on a

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Selon la loi des mailles, on a

$$\mathscr{E} - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathscr{E} - R_1 I_1 - \frac{Q}{C} = 0$$

On doit maintenant trouver la solution de ce système d'équations. Comme

$$\mathscr{E} - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad I_2 = \frac{\mathscr{E} - R_1 I_1}{R_2}$$

La loi des nœuds devient

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3 \\ I_1 &= \frac{\mathscr{E} - R_1 I_1}{R_2} + I_3 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} R_2 I_1 &= \mathscr{E} - R_1 I_1 + R_2 I_3 \\ R_2 I_1 + R_1 I_1 &= \mathscr{E} + R_2 I_3 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad I_1 = \frac{\mathscr{E} + R_2 I_3}{R_1 + R_2}$$

En utilisant ce résultat dans la 2ieme loi des mailles, on a

$$\begin{aligned} \mathscr{E} - R_1 I_1 - \frac{Q}{C} &= 0 \\ \mathscr{E} - R_1 \frac{\mathscr{E} + R_2 I_3}{R_1 + R_2} - \frac{Q}{C} &= 0 \\ \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)\mathscr{E} - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_3 - \frac{Q}{C} &= 0 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)\mathscr{E} - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_3 - \frac{Q}{C} &= 0 \\ \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)\mathscr{E} - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_3 - \frac{Q}{C} &= 0 \end{aligned}$$

Mais comme

$$I_3 = \frac{dQ}{dt}$$

On a

$$\mathscr{E} - R_1 I_1 - \frac{Q}{C} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)\mathscr{E} - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

Nous avons alors une équation différentielle. Pour alléger un peu la solution, on va définir les quantités suivantes

$$A = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)\mathscr{E} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

L'équation est alors

$$A - B\frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

La solution de cette équation est

$$\begin{aligned} B\frac{dQ}{dt} &= A - \frac{Q}{C} \\ CB\frac{dQ}{dt} &= CA - Q \\ \frac{dQ}{CA - Q} &= \frac{1}{CB} dt \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} \int \frac{dQ}{CA - Q} &= \int \frac{1}{CB} dt \\ -\ln(CA - Q) &= \frac{1}{CB} t + \text{cst} \end{aligned}$$

Pour trouver la constante, on se rappelle que $C = 0$ à $t = 0$. On a donc

$$-\ln(CA - 0) = \frac{1}{CB} \cdot 0 + \text{cst} \qquad \Longrightarrow \qquad -\ln(CA) = \text{cst}$$

On a donc

$$\begin{aligned} -\ln(CA - Q) &= \frac{1}{CB}t - \ln(CA) \\ \ln(CA - Q) - \ln(CA) &= -\frac{1}{CB}t \\ \ln\left(\frac{CA - Q}{CA}\right) &= -\frac{1}{CB}t \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} \frac{CA - Q}{CA} &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{CB}t} \\ CA - Q &= CA\mathrm{e}^{-\frac{1}{CB}t} \\ Q &= CA - CA\mathrm{e}^{-\frac{1}{CB}t} \\ Q &= CA\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{CB}t}\right) \end{aligned}$$

En utilisant les valeurs de A et B, on arrive à

$$Q = C\mathscr{E}\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t}\right)$$

C’est la formule donnée dans les notes pour la charge du condensateur en fonction du temps. Continuons nos calculs pour trouver le courant fourni par la source. Le courant 3 est

$$I_3 = \frac{dQ}{dt} = \frac{dCA\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{CB}t}\right)}{dt} = CA\frac{d\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{CB}t}\right)}{dt} = CA\left(-\mathrm{e}^{-\frac{1}{CB}t}\right)\left(-\frac{1}{CB}\right) = \frac{A}{B}\mathrm{e}^{-\frac{1}{CB}t}$$

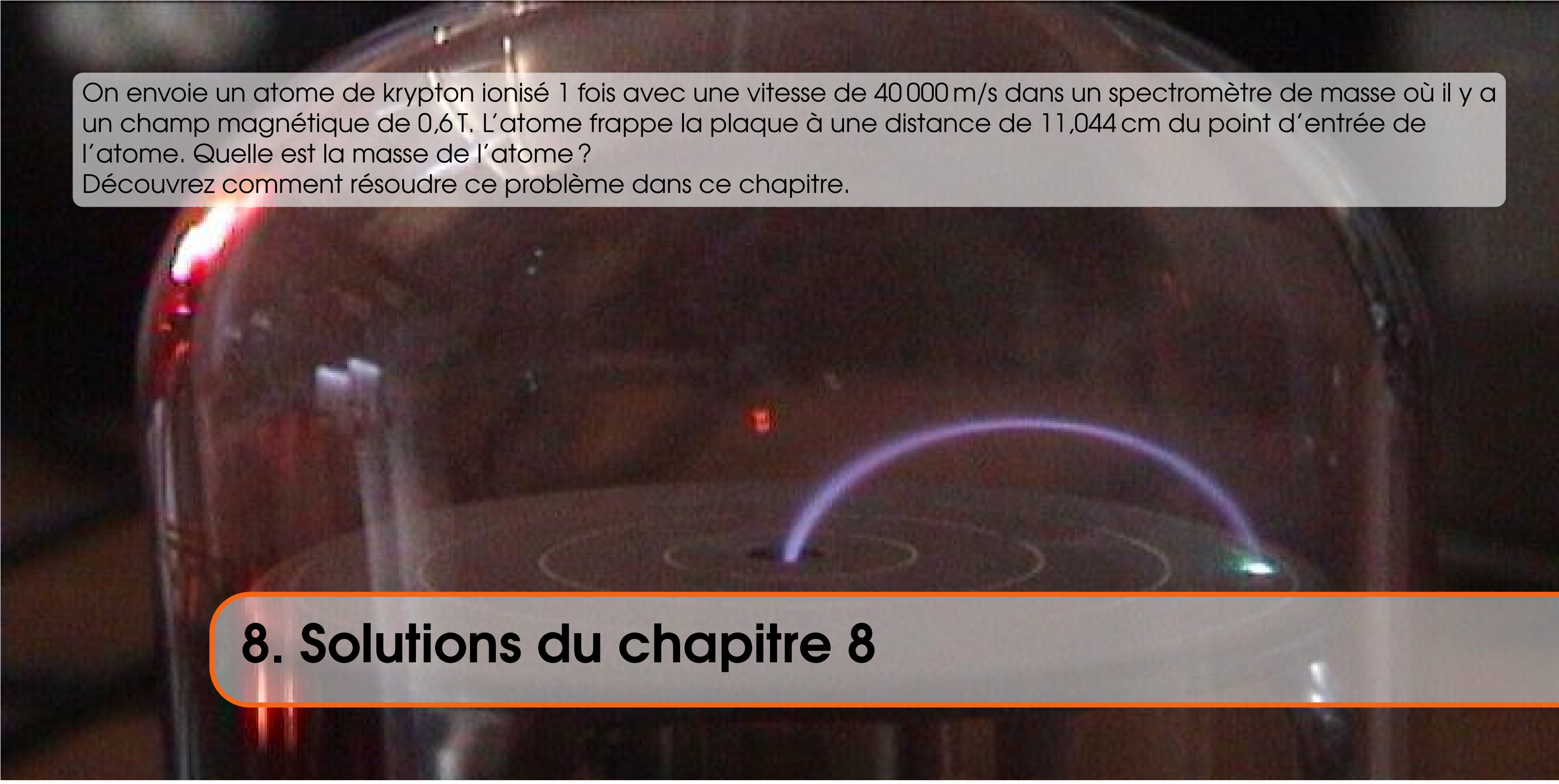
Avec les valeurs de A et B, on a

$$I_3 = \frac{\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)\mathscr{E}}{\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}\mathrm{e}^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t} = \frac{R_2\mathscr{E}}{R_1R_2}\mathrm{e}^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t} = \frac{\mathscr{E}}{R_1}\mathrm{e}^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t}$$

De là, on trouve le courant I_1.

$$I_1 = \frac{\mathscr{E} + R_2I_3}{R_1 + R_2} = \frac{\mathscr{E} + R_2\frac{\mathscr{E}}{R_1}\mathrm{e}^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t}}{R_1 + R_2} = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + R_2}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\mathrm{e}^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1+R_2}t}\right)$$

Cette page est intentionnellement laissée en blanc.



On envoie un atome de krypton ionisé 1 fois avec une vitesse de 40 000 m/s dans un spectromètre de masse où il y a un champ magnétique de 0,6 T. L'atome frappe la plaque à une distance de 11,044 cm du point d'entrée de l'atome. Quelle est la masse de l'atome ?
Découvrez comment résoudre ce problème dans ce chapitre.

8. Solutions du chapitre 8

Exercice 1 : La force est

$$F = |q|\, vB\sin\theta = 5\times10^{-6}\times 10\,000\times 0{,}04\times\sin(90^\circ) = 0{,}002\,\mathrm{N}$$

Selon la règle de la main droite, la force entre dans la page.

Exercice 2 : La force est

$$F = |q|\, vB\sin\theta = 5\times10^{-6}\times 10\,000\times 0{,}04\times\sin(180^\circ) = 0\,\mathrm{N}$$

Exercice 3 : La force est

$$F = |q|\, vB\sin\theta = 10\times10^{-6}\times 30\,000\times 0{,}04\times\sin(120^\circ) = 0{,}010\,4\,\mathrm{N}$$

Selon la règle de la main droite, la force sort de la page.

Exercice 4 : On a

$$F = |q|\, vB\sin\theta$$
$$4\times10^{-14} = 1{,}602\times10^{-19}\times10^{6}\times B\times\sin(90^\circ)$$
$$B = 0{,}249\,7\,\mathrm{T}$$

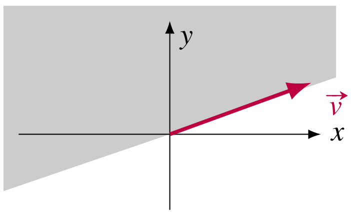
Selon la règle de la main droite, ce champ sort de la page.

Exercice 5 : On a

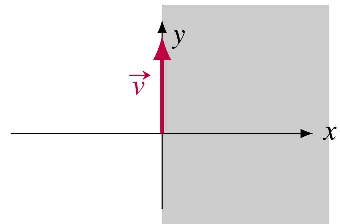
$$F = |q|\, vB\sin\theta$$
$$0{,}06 = 0{,}008\times10^{6}\times 0{,}000\,01\times\sin\theta$$
$$\sin\theta = 0{,}75$$
$$\theta = 48{,}6^\circ$$

Exercice 6 :

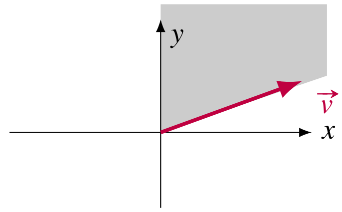
Puisque la force est vers les z positifs et que le champ magnétique doit être perpendiculaire à la force, le champ doit être dans le plan xy. Le graphique suivant montre les directions possibles selon la règle de la main droite (zone en gris).



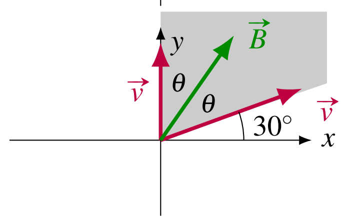
Comme la force est vers les z négatifs quand la particule va vers les y positifs, on trouve, selon la règle de la main droite que les directions possibles pour le champ magnétique sont les suivantes (zone en gris).



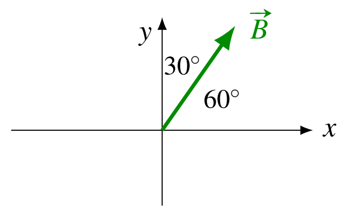
En combinant ces deux résultats, les directions possibles pour le champ sont



Dans les deux cas, la force est la même. Cela veut dire que l'angle que fait le champ avec les vitesses doit être la même dans les deux cas. Le champ doit donc séparer l'angle entre les vitesses en deux angles égaux.



L'angle θ est donc de 30°. Ainsi, le champ magnétique est dans le plan xy, à 60° de l'axe des x positifs et à 30° de l'axe des y positifs.



Exercice 7 : La force est

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = -2\times10^{-6}\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2\times10^{-6} & -3\times10^{-6} & -1\times10^{-6}\\ 0{,}02 & -0{,}04 & 0{,}05\end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & -1\\ 0{,}02 & -0{,}04 & 0{,}05\end{vmatrix}$$

$$= -2\cdot\left[(-3\cdot0{,}005-(-1)\cdot(-0{,}04))\,\vec{i}-(2\cdot0{,}05-(-1\cdot0{,}02))\,\vec{j}+(2\cdot(-0{,}04)-(-3\cdot0{,}02))\,\vec{k}\right]$$

$$= -2\cdot\left[-0{,}19\,\vec{i}-0{,}12\,\vec{j}-0{,}02\,\vec{k}\right] = (0{,}38\,\vec{i}+0{,}24\,\vec{j}+0{,}04\,\vec{k})\,\mathrm{N}$$

Exercice 8 : On a

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

$$(6\,\vec{i}-3\,\vec{j}+3\,\vec{k}) = 10\times10^{-6}\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1\times10^{6} & 3\times10^{6} & 1\times10^{6}\\ B_x & 0 & B_z\end{vmatrix}$$

$$(6\,\vec{i}-3\,\vec{j}+3\,\vec{k}) = 10\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & 1\\ B_x & 0 & B_z\end{vmatrix}$$

L'équation de la composante en x nous permet de trouver B_z.

$$6 = 10(3B_z-3\times0) \qquad\longrightarrow\qquad 6 = 30B_z \qquad\longrightarrow\qquad B_z = 0{,}2\,\mathrm{T}$$

L'équation de la composante en z nous permet de trouver B_x.

$$3 = 10(1\times 0 - 3B_x) \qquad \longrightarrow \qquad 3 = -30B_x \qquad \longrightarrow \qquad B_x = -0{,}1\,\mathrm{T}$$

Nous avons maintenant nos deux composantes. Remarquez que l'équation des composantes en y est automatiquement satisfaite.

$$\begin{aligned} -3 &= -10(1\times B_z - 1\times B_x) \\ -3 &= -10(1\times 0{,}2 - 1\times(-0{,}1)) \end{aligned} \quad \text{soit} \quad \begin{aligned} -3 &= -10(0{,}3) \\ -3 &= -3 \end{aligned}$$

La réponse est donc

$$\vec{B} = (-0{,}1\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0{,}2\,\vec{k})\,\mathrm{T}$$

Exercice 9 :

(a) La vitesse de l'électron est

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \longrightarrow 2\,000\times 1{,}602\times 10^{-19} = \frac{1}{2}\times 9{,}11\times 10^{-31}\cdot v^2 \longrightarrow v = 2{,}652\times 10^{7}\,\mathrm{m/s}$$

Le rayon de la trajectoire est donc

$$r = \frac{mv}{|q|B} = \frac{9{,}11\times 10^{-31}\times 2{,}652\times 10^{7}}{1{,}602\times 10^{-19}\times 0{,}05} = 3{,}016\,\mathrm{mm}$$

(b) L'accélération est

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(2{,}652\times 10^{7})^2}{3{,}016\times 10^{-3}} = 2{,}332\times 10^{17}\,\mathrm{m/s^2}$$

(c) La période est

$$T = \frac{2\pi m}{|q|B} = \frac{2\pi\times 9{,}11\times 10^{-31}}{1{,}602\times 10^{-19}\times 0{,}05} = 7{,}146\times 10^{-10}\,\mathrm{s}$$

Exercice 10 :

(a) La vitesse du proton est

$$r = \frac{mv}{|q|B} \qquad \longrightarrow \qquad 0{,}2 = \frac{1{,}673\times 10^{-27}\cdot v}{1{,}602\times 10^{-31}\times 0{,}06} \qquad \longrightarrow \qquad v = 1{,}146\times 10^{6}\,\mathrm{m/s}$$

(b) La période est

$$T = \frac{2\pi m}{|q|B} = \frac{2\pi\times 1{,}673\times 10^{-27}}{1{,}602\times 10^{-19}\times 0{,}06} = 1{,}093\times 10^{-6}\,\mathrm{s}$$

Exercice 11 : On va trouver la vitesse du noyau d'hélium avec la conservation de l'énergie en passant d'une plaque à l'autre. On a

$$\begin{aligned} E &= E' \\ qV &= \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned} \quad \text{soit} \quad \begin{aligned} 2\times 1{,}602\times 10^{-19}\times 15\,000 &= \frac{1}{2}\times 6{,}646\times 10^{-27}\cdot v^2 \\ v &= 1{,}203\times 10^{6}\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Le rayon de la trajectoire est donc

$$r = \frac{mv}{|q|B} = \frac{6{,}646\times 10^{-27}\times 1{,}203\times 10^{6}}{2\times 1{,}602\times 10^{-19}\times 0{,}4} = 6{,}24\,\mathrm{cm}$$

Exercice 12 :

(a) Commençons par trouver le rayon de la trajectoire. Ce rayon est

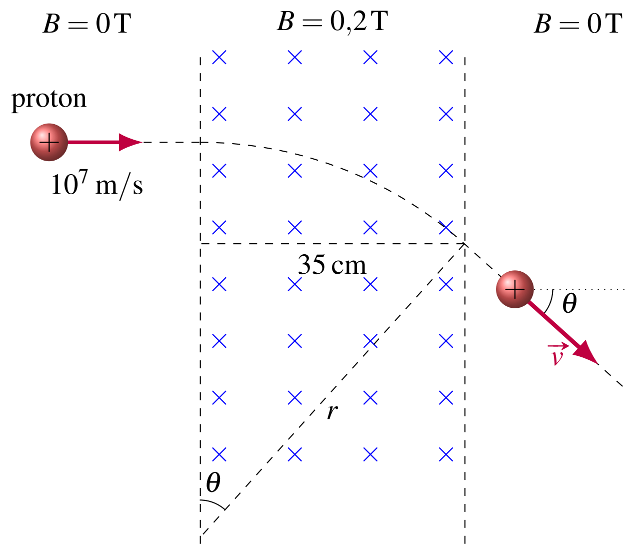
$$r = \frac{mv}{|q|B} = \frac{1{,}673 \times 10^{-27} \times 10^{7}}{1{,}602 \times 10^{-19} \times 0{,}2} = 52{,}22\,\text{cm}$$

Selon la figure suivante, on a donc

$$\sin\theta = \frac{35}{52{,}22}$$

$$\theta = 42{,}1^\circ$$

Comme le champ magnétique ne change pas la vitesse, la vitesse reste à 10^7 m/s.



(b) La période est

$$T = \frac{2\pi m}{|q|B} = \frac{2\pi \times 1{,}673 \times 10^{-27}}{1{,}602 \times 10^{-19} \times 0{,}2} = 3{,}281 \times 10^{-7}\,\text{s}$$

Le proton ne fait pas un tour au complet, il ne fait qu'une partie du cercle. La proportion est $42{,}1^\circ/360^\circ$. Le temps est

$$t = 3{,}281 \times 10^{-7} \times \frac{42{,}1^\circ}{360^\circ} = 3{,}84 \times 10^{-8}\,\text{s}$$

Exercice 13 :

(a) Les composantes de la vitesse sont

$$v_\perp = 10^4 \sin(60^\circ) = 8\,660\,\text{m/s} \qquad \text{et} \qquad v_\parallel = 10^4 \cos(60^\circ) = 5\,000\,\text{m/s}$$

Le pas de la trajectoire est donc

$$d = v_\parallel \frac{2\pi m}{|q|B} = 5\,000 \times \frac{2\pi \times 1{,}673 \times 10^{-27}}{1{,}602 \times 10^{-19} \times 0{,}04} = 8{,}202\,\text{mm}$$

(b) Le rayon de la trajectoire est de

$$r = \frac{mv_\perp}{|q|B} = \frac{1{,}673 \times 10^{-27} \times 8\,660}{1{,}602 \times 10^{-19} \times 0{,}04} = 2{,}26\,\text{mm}$$

Exercice 14 : La vitesse doit être de

$$v = \frac{E}{B} = \frac{30\,000}{0{,}1} = 3 \times 10^6\,\text{m/s}$$

Exercice 15 : La grandeur du champ est donnée par l'équation suivante.

$$v = \frac{E}{B} \qquad \longrightarrow \qquad 10^6 = \frac{20\,000}{B} \qquad \longrightarrow \qquad B = 0{,}02\,\mathrm{T}$$

Le champ électrique fait une force vers le bas sur l'électron. La force magnétique sur l'électron doit donc être vers le haut. Selon la règle de la main droite, cela veut dire que le champ sort de la page.

Exercice 16 : La vitesse des ions à la sortie du sélecteur de vitesse est

$$v = \frac{E}{B} = \frac{200\,000}{0{,}5} = 4 \times 10^5\,\mathrm{m/s}$$

Le rayon de l'ion 1 (carbone 12) est

$$r_1 = \frac{m_1 v}{|q|B} = \frac{m_1 v}{eB}$$

Le rayon de l'ion 2 (carbone 14) est

$$r_2 = \frac{m_2 v}{|q|B} = \frac{m_2 v}{eB}$$

La distance d est donc

$$\begin{aligned} d &= 2r_2 - 2r_1 = \frac{2m_2 v}{eB} - \frac{2m_1 v}{eB} = \frac{2v}{eB}(m_2 - m_1) \\ &= \frac{2 \times 4 \times 10^5}{1{,}602 \times 10^{-19} \times 0{,}5}(2{,}325 \times 10^{-26} - 1{,}993 \times 10^{-26}) = 3{,}316\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Exercice 17 :

- Fil de droite (la longueur du fil est $2 \times \tan(30°)$)

$$F = I\ell B \sin\theta = 5 \times (2 \times \tan(30°)) \times 0{,}1 \sin(90°) = 0{,}577\,\mathrm{N}$$

Selon la règle de la main droite, cette force sort de la feuille.

- Fil du bas

$$F = I\ell B \sin\theta = 5 \times (2) \times 0{,}1 \sin(180°) = 0\,\mathrm{N}$$

- Fil qui forme l'hypoténuse (la longueur du fil est $2/\cos(30°)$)

$$F = I\ell B \sin\theta = 5 \times \left(\frac{2}{\cos(30°)}\right) \times 0{,}1 \sin(30°) = 0{,}577\,\mathrm{N}$$

Selon la règle de la main droite, cette force entre dans la feuille.

Exercice 18 : On a

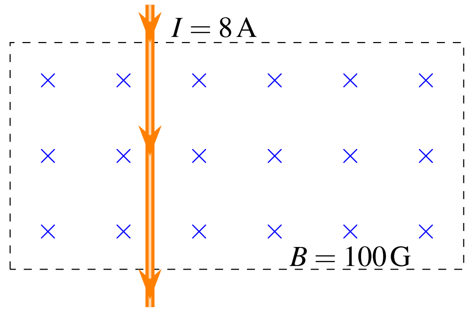
$$F = I\ell B \sin\theta \quad \longrightarrow \quad 0{,}02 = 6{,}2 \times 5 \times B \times \sin(7{,}5°) \quad \longrightarrow \quad B = 4{,}94 \times 10^{-3}\,\mathrm{T} = 49{,}4\,\mathrm{G}$$

Exercice 19 : On a vu qu'on peut remplacer la partie circulaire par un bout de fil droit. On a alors la situation suivante.

La force est donc

$$F = I\ell B\sin\theta = 8\times 3\times 0{,}01\sin(90^\circ) = 0{,}24\,\text{N}$$

Selon la règle de la main droite, cette force est vers la droite.



Exercice 20 :

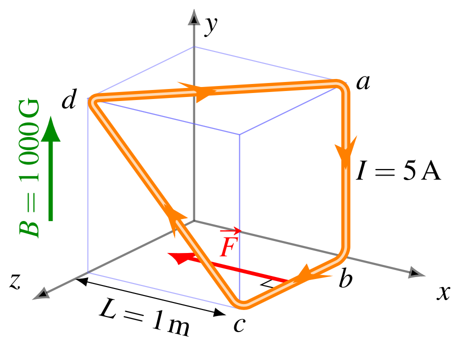
- Fil qui va de a à b

$$F = I\ell B\sin\theta = 5\times 1\times 0{,}1\sin(180^\circ) = 0\,\text{N}$$

- Fil qui va de b à c

$$F = I\ell B\sin\theta = 5\times 1\times 0{,}1\sin(90^\circ) = 0{,}5\,\text{N}$$

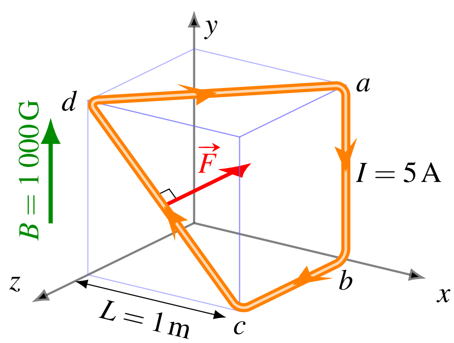
Selon la règle de la main droite, cette force est vers les x négatifs.



- Fil qui va de c à d

$$F = I\ell B\sin\theta = 5\times(\sqrt{2}\cdot 1)\times 0{,}1\sin(45^\circ) = 0{,}5\,\text{N}$$

Selon la règle de la main droite, cette force est vers les z négatifs.

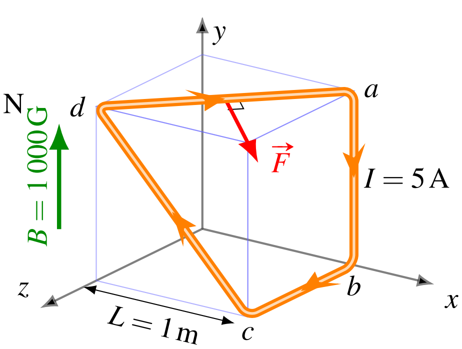


- Fil qui va de d à a

$$F = I\ell B\sin\theta = 5\times(\sqrt{2}\cdot 1)\times 0{,}1\sin(90^\circ) = 0{,}707\,\text{N}$$

Selon la règle de la main droite, cette force est dans la direction suivante.

Le vecteur est dans le même plan que le dessus du cube.



Exercice 21 : La force faite par le ressort est vers la gauche et elle vaut

$$F = kx = 200 \times 0{,}002 = 0{,}4\,\mathrm{N}$$

C'est cette force qui annule la force magnétique. La force magnétique sur le fil est donc de 0,4 N vers la droite. On a donc

$$F = I\ell B\sin\theta \qquad \longrightarrow \qquad 0{,}4 = I \times 0{,}4 \times 0{,}5\sin(90^\circ) \qquad \longrightarrow \qquad I = 4\,\mathrm{A}$$

Exercice 22 : Le courant dans la tige est

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{5\,000}{0{,}5} = 10\,000\,\mathrm{A}$$

La force sur la tige est donc

$$F = I\ell B\sin\theta = 10\,000 \times 1{,}4 \times 0{,}2\sin(90^\circ) = 2\,800\,\mathrm{N}$$

Ainsi, l'accélération est

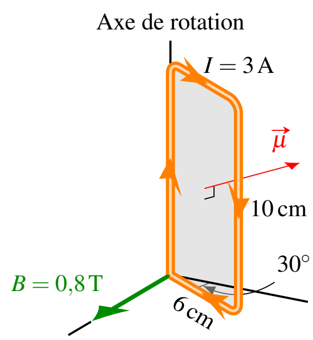
$$F = ma \qquad \longrightarrow \qquad 2\,800 = 0{,}8 \times a \qquad \longrightarrow \qquad a = 3\,500\,\mathrm{m/s^2}$$

Exercice 23 :

(a) Le moment magnétique est

$$\mu = NIA = 1 \times 3 \times (0{,}1 \times 0{,}06) = 0{,}018\,\mathrm{A\,m^2}$$

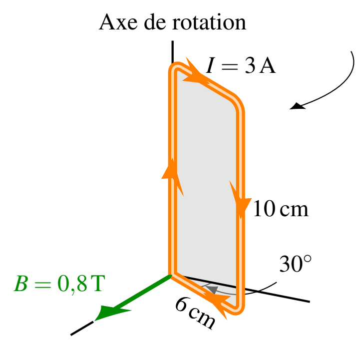
La direction est



(b) Le moment de force est

$$\tau = \mu B\sin\theta = 0{,}018 \times 0{,}8\sin(150^\circ) = 0{,}007\,2\,\mathrm{N\,m}$$

(c) Dans ce sens



(d) L'énergie potentielle à 30° est

$$U = -\mu B\cos\theta = -0{,}018 \times 0{,}8\cos(150^\circ) = 0{,}012\,47\,\mathrm{J}$$

L'énergie quand l'angle est de 90° est

$$U = -\mu B\cos\theta = -0{,}018 \times 0{,}8\cos(180^\circ) = 0{,}014\,4\,\mathrm{J}$$

On doit donc fournir l'énergie suivante

$$W_{\mathrm{ext}} = \Delta E_k + \Delta U = 0 + (0{,}014\,4 - 0{,}012\,47) = 0{,}001\,93\,\mathrm{J}$$

Exercice 24 :

(a) Le moment magnétique est

$$\mu = NIA = 2\times 20\left(\frac{1}{2}\times 3\times 2\right) = 120\,\mathrm{A\,m^2}$$

Le moment de force est donc

$$\tau = \mu B\sin\theta = 120\times 0{,}1\times\sin(30^\circ) = 6\,\mathrm{N\,m}$$

(b) Au départ, l'énergie est

$$E = E_k + U = 0 + (-\mu B\cos\theta) = 0 + (-120\times 0{,}1\cos(30^\circ)) = -10{,}392\,\mathrm{J}$$

Quand le moment magnétique est aligné avec le champ, l'énergie est

$$E' = E_k + U = E_k + (-\mu B\cos\theta') = E_k + (-120\times 0{,}1\cos(0^\circ)) = E_k - 12$$

Avec la conservation de l'énergie, on a

$$E = E' \qquad\longrightarrow\qquad -10{,}392 = E_k - 12 \qquad\longrightarrow\qquad E_k = 1{,}608\,5\,\mathrm{J}$$

Exercice 25 : À l'équilibre, la somme des moments de force doit être nulle. On a donc.

$$\tau_{\text{net}} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \tau_{\text{mag}} + \tau_{\text{poids}} = 0$$

Le moment de force fait par la masse de 5 g est

$$\tau_{\text{poids}} = Fr\sin(90^\circ) = (0{,}05\times 9{,}8)\times 0{,}1\sin(90^\circ) = 0{,}004\,9\,\mathrm{N\,m}$$

(On a choisi un sens positif dans le sens de ce moment de force.)
Le moment de force sur le cadre fait par le champ magnétique est

$$\tau_{\text{magn}} = -\mu B\sin\theta$$

Pour le trouver, il nous faut le moment magnétique. Ce moment est

$$\mu = NIA = N\times 10\times(0{,}2\times 0{,}2) = N\cdot 0{,}4$$

Le moment de force fait par le champ magnétique est donc

$$\tau_{\text{magn}} = -(N\times 0{,}4)\times 0{,}000\,25\times\sin(90^\circ) = -N\times 0{,}000\,1$$

Le moment de force est négatif, car le champ magnétique cherche à faire tourner le cadre dans la direction opposée à ce que le poids tente de faire.

Le moment de force net étant nul à l'équilibre, on a

$$0 = \tau_{\text{mag}} + \tau_{\text{poids}} \quad\Longrightarrow\quad 0 = -N\times 0{,}000\,1 + 0{,}004\,9 \quad\Longrightarrow\quad N = \frac{0{,}004\,9}{0{,}000\,1} = 49$$

Exercice 26 :

(a) Pour trouver la différence de potentiel, nous aurons besoin de la vitesse de dérive et pour trouver cette vitesse de dérive, nous avons besoin de la densité d'électrons libres.

$$n = \text{valence} \times \text{densité} \times \frac{N_A}{M} = 1 \times 19\,300 \times \frac{6{,}02 \times 10^{23}}{0{,}196\,97 \times 10^{-3}} = 5{,}899 \times 10^{28}\,\frac{1}{\mathrm{m}^3}$$

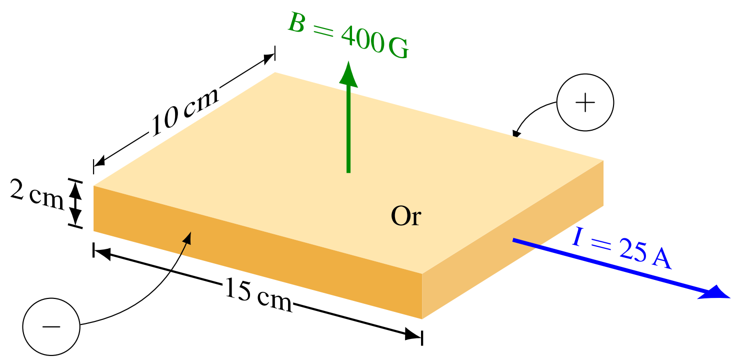
La vitesse de dérive est donc

$$\begin{gathered} I = nev_\mathrm{d}A \\ 25 = 5{,}899 \times 10^{28} \times 1{,}602 \times 10^{-19} \times v_\mathrm{d} \times (0{,}02 \times 0{,}1) \\ v_\mathrm{d} = 1{,}323 \times 10^{-6}\,\mathrm{m/s} \end{gathered}$$

La différence de potentiel est donc

$$\Delta V_\mathrm{H} = v_\mathrm{d}BL = 1{,}323 \times 10^{-6} \times 0{,}02 \times 0{,}1 = 2{,}645 \times 10^{-9}\,\mathrm{V}$$

(b) Sur la figure suivante, vous pouvez voir le côté positif (donc celui avec le potentiel le plus élevé).



Exercice 27 : Pour trouver la différence de potentiel, nous aurons besoin de la vitesse de dérive et pour trouver cette vitesse de dérive, nous avons besoin de la densité d'électrons libres.

$$n = \text{valence} \times \frac{\rho N_A}{M} = 1 \times 19\,300 \times \frac{6{,}02 \times 10^{23}}{0{,}196\,97 \times 10^{-3}} = 5{,}899 \times 10^{28}\,\frac{1}{\mathrm{m}^3}$$

La vitesse de dérive est donc

$$\begin{gathered} I = nev_\mathrm{d}A \\ 10 = 5{,}899 \times 10^{28} \times 1{,}602 \times 10^{-19} \times v_\mathrm{d} \times (0{,}008 \times 0{,}05) \\ v_\mathrm{d} = 2{,}645 \times 10^{-6}\,\mathrm{m/s} \end{gathered}$$

On a donc

$$\begin{gathered} \Delta V_\mathrm{H} = v_\mathrm{d}BL \\ 0{,}2 \times 10^{-6} = 2{,}645 \times 10^{-6} \times B \times 0{,}08 \\ B = 0{,}945\,\mathrm{T} \end{gathered}$$

Cette page est intentionnellement laissée en blanc.

Comment peut-on fabriquer un aimant qui fonctionne uniquement quand on le désire ?
Découvrez la réponse à cette question dans ce chapitre.

9. Solutions du chapitre 9

Exercice 1 : Point P_1

Le champ fait par le fil de gauche est

$$B_{\mathrm{g}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 8}{2\pi \times 1} = 1{,}6 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

Selon la règle de la main droite, ce champ entre dans la page.

Le champ fait par le fil de droite est

$$B_{\mathrm{d}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 6}{2\pi \times 0{,}5} = 2{,}4 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

Selon la règle de la main droite, ce champ sort de la page.

Si on dit que le sens positif est en sortant de la page, le champ net est

$$B_{\mathrm{net}} = B_{\mathrm{d}} + B_{\mathrm{g}} = -1{,}6 \times 10^{-6} + 2{,}4 \times 10^{-6} = 0{,}8 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

Le champ est donc de 0,8 µT en sortant de la page.

Point P_2

Le champ fait par le fil de gauche est

$$B_{\mathrm{g}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 8}{2\pi \times 1} = 1{,}6 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

Selon la règle de la main droite, ce champ sort de la page.

Le champ fait par le fil de droite est

$$B_{\text{d}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 6}{2\pi \times 1{,}5} = 0{,}8 \times 10^{-6}\,\text{T}$$

Selon la règle de la main droite, ce champ entre dans la page.

Si on dit que le sens positif est en sortant de la page, le champ net est

$$B_{\text{net}} = B_{\text{d}} + B_{\text{g}} = 1{,}6 \times 10^{-6} - 0{,}8 \times 10^{-6} = 0{,}8 \times 10^{-6}\,\text{T}$$

Le champ est donc de 0,8 µT en sortant de la page.

Exercice 2 : Le champ fait par le fil de gauche est

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10}{2\pi \times 0{,}2} = 10\,\mu\text{T}$$

Selon la règle de la main droite, ce champ entre dans la page.

Le champ fait par le fil de droite est

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times I}{2\pi \times 0{,}2} = 1 \times 10^{-6} \times I$$

On va supposer que ce courant est vers le haut (Si la réponse de I est négative, cela voudra dire que le courant est vers le bas). Dans ce cas, le champ sort de la feuille.

Le champ fait par le fil du haut est

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 8}{2\pi \times 0{,}25} = 6{,}4\,\mu\text{T}$$

Selon la règle de la main droite, ce champ entre dans la page.

Le champ fait par le fil du bas est

$$B_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20}{2\pi \times 0{,}25} = 16\,\mu\text{T}$$

Selon la règle de la main droite, ce champ sort de la page.

Si on dit que le sens positif est en sortant de la page, le champ net est

$$B_{\text{net}} = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = -10 + 1 \times I - 6{,}4 + 16 = -0{,}4 + I$$

Puisqu'on veut que le champ soit nul, on a

$$\begin{gathered} 0 = -0{,}4 + 1 \times I \\ I = 0{,}4\,\text{A} \end{gathered}$$

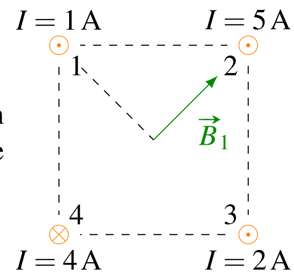
Comme la réponse est positive, le courant est de 0,4 A vers le haut.

Exercice 3 : Comme on aura besoin de cette distance durant tout l'exercice, calculons la distance entre le centre du carré et chacun des fils

$$r = \sqrt{(0{,}1)^2 + (0{,}1)^2} = \sqrt{2} \cdot 0{,}1$$

- Le champ fait par le **fil 1** (en haut à gauche) est

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1}{2\pi \times \sqrt{2} \cdot 0{,}1} = 1{,}414 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$



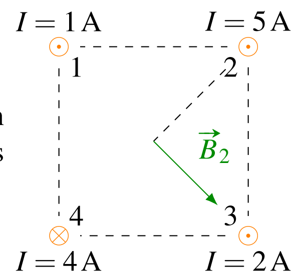
Selon la règle de la main droite, ce champ est dans la direction suivante. La direction du vecteur est donc de 45°. Les composantes de champ sont donc

$$B_{1x} = B_1 \cos(45°) = 1{,}414 \times 10^{-6} \cos(45°) = 1 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

$$B_{1y} = B_1 \sin(45°) = 1{,}414 \times 10^{-6} \sin(45°) = 1 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

- Le champ fait par le **fil 2** (en haut à droite) est

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 5}{2\pi \times \sqrt{2} \cdot 0{,}1} = 7{,}071 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$



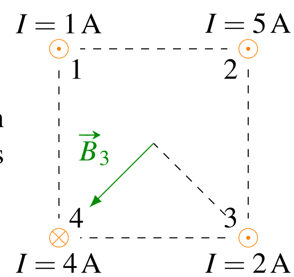
Selon la règle de la main droite, ce champ est dans la direction suivante. La direction du vecteur est donc de −45°. Les composantes de champ sont donc

$$B_{2x} = B_2 \cos(-45°) = 7{,}071 \times 10^{-6} \cos(-45°) = 5 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

$$B_{2y} = B_2 \sin(-45°) = 7{,}071 \times 10^{-6} \sin(-45°) = -5 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

- Le champ fait par le **fil 3** (en bas à droite) est

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 2}{2\pi \times \sqrt{2} \cdot 0{,}1} = 2{,}828 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$



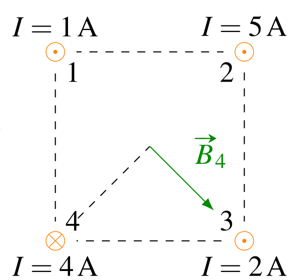
Selon la règle de la main droite, ce champ est dans la direction suivante. La direction du vecteur est donc de −135°. Les composantes de champ sont donc

$$B_{3x} = B_3 \cos(-135°) = 2{,}828 \times 10^{-6} \cos(-135°) = -2 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

$$B_{3y} = B_3 \sin(-135°) = 2{,}828 \times 10^{-6} \sin(-135°) = -2 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

- Le champ fait par le **fil 4** (en bas à gauche) est

$$B_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 4}{2\pi \times \sqrt{2} \cdot 0{,}1} = 5{,}657 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$



Selon la règle de la main droite, ce champ est dans la direction suivante. La direction du vecteur est donc de −45°. Les composantes de champ sont donc

$$B_{4x} = B_4 \cos(-45°) = 5{,}657 \times 10^{-6} \cos(-45°) = 4 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

$$B_{4y} = B_4 \sin(-45°) = 5{,}657 \times 10^{-6} \sin(-45°) = -4 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

Les composantes du champ total sont

$$B_x = B_{1x} + B_{2x} + B_{3x} + B_{4x} = 1 \times 10^{-6} + 5 \times 10^{-6} - 2 \times 10^{-6} + 4 \times 10^{-6} = 8 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

$$B_y = B_{1y} + B_{2y} + B_{3y} + B_{4y} = 1 \times 10^{-6} - 5 \times 10^{-6} - 2 \times 10^{-6} - 4 \times 10^{-6} = -10 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

La grandeur et la direction du champ sont

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(8 \times 10^{-6})^2 + (-10 \times 10^{-6})^2} = 12{,}8 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

$$\theta = \arctan \frac{B_y}{B_x} = \arctan \frac{-10 \times 10^{-6}}{8 \times 10^{-6}} = -51{,}3^\circ$$

On a donc un champ de 12,8 µT dans la direction $-51{,}3^\circ$.

Exercice 4 : Le champ fait par la Terre est de 0,5 G. En utilisant un axe des x vers l'est et un axe des y vers le nord, ce champ est

$$B_{1x} = 0\,\mathrm{G} \qquad \text{et} \qquad B_{1y} = 0{,}5\,\mathrm{G}$$

À 20 m du fil, le champ magnétique est

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 500}{2\pi \times 20} = 5 \times 10^{-6}\,\mathrm{T} = 0{,}05\,\mathrm{G}$$

Comme ce champ est vers l'est selon la règle de la main droite, on a

$$B_{2x} = 0{,}05\,\mathrm{G} \qquad \text{et} \qquad B_{2y} = 0\,\mathrm{G}$$

Les composantes de champ total sont donc

$$B_x = B_{1x} + B_{2x} = 0 + 0{,}05 = 0{,}05\,\mathrm{G} \qquad \text{et} \qquad B_y = B_{1y} + B_{2y} = 0{,}5 + 0 = 0{,}5\,\mathrm{G}$$

La direction du champ est donc

$$\theta = \arctan \frac{B_y}{B_x} = \arctan \frac{0{,}5}{0{,}05} = 84{,}29^\circ$$

Sans le fil, la boussole pointe vers le nord, donc vers l'axe des y. L'orientation sans fil est donc de 90°. Avec le fil, la direction est de 84,29°. La déviation est donc de

$$90^\circ - 84{,}29^\circ = 5{,}71^\circ$$

La boussole dévie donc de 5,71° vers l'est.

Exercice 5 :

(a) Le champ est

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20}{2\pi \times 0{,}4} = 1 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$$

Ce champ de 10 µT entre dans la feuille.

(b) La force sur la charge est

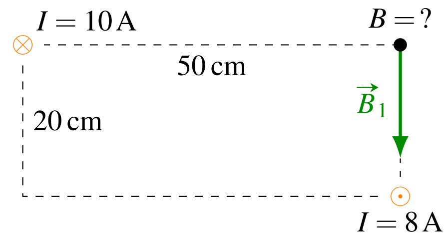
$$F = qvB\sin\theta = 4 \times 10^{-6} \times 1\,000 \times 1 \times 10^{-5} \sin(90^\circ) = 4 \times 10^{-8}\,\mathrm{N}$$

Cette force est vers le haut. (La charge est repoussée par le fil.)

Exercice 6 :

(a) Le champ magnétique fait par le fil parcouru par un courant de 10 A est

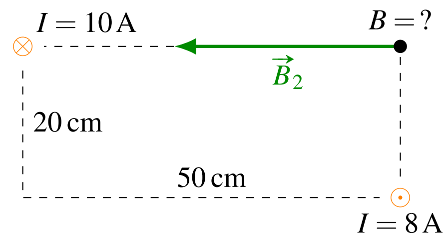
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi\times 10^{-7}\times 10}{2\pi\times 0{,}5} = 4\times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$



Selon la règle de la main droite, ce champ est dans la direction suivante. Les composantes du champ sont donc $B_{1x} = 0\,\mathrm{T}$ et $B_{1y} = -4\times 10^{-6}\,\mathrm{T}$

Le champ magnétique fait par le fil parcouru par un courant de 8 A est

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi\times 10^{-7}\times 8}{2\pi\times 0{,}2} = 8\times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$



Selon la règle de la main droite, ce champ est dans la direction suivante. Les composantes du champ sont donc $B_{2x} = -8\times 10^{-6}\,\mathrm{T}$ et $B_{2y} = 0\,\mathrm{T}$

Les composantes de champ total sont donc

$$B_x = B_{1x} + B_{2x} = 0 - 8\times 10^{-6} = -8\times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

$$B_y = B_{1y} + B_{2y} = -4\times 10^{-6} + 0 = -4\times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

La grandeur et la direction du champ sont

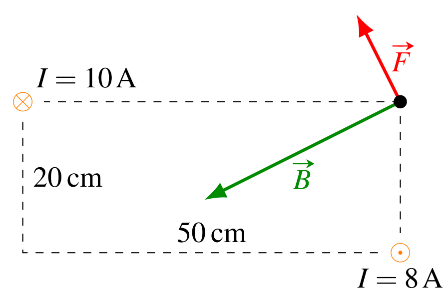
$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-8\times 10^{-6})^2 + (-4\times 10^{-6})^2} = 8{,}944\times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

$$\theta = \arctan\frac{B_y}{B_x} = \arctan\frac{-4\times 10^{-6}}{-8\times 10^{-6}} = 206{,}6^\circ$$

(b) La force est

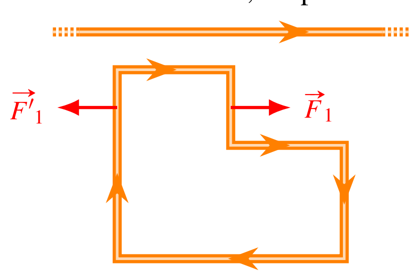
$$F = I\ell B\sin\theta = 3\times 5\times 8{,}944\times 10^{-6}\sin(90^\circ) = 1{,}342\times 10^{-4}\,\mathrm{N}$$

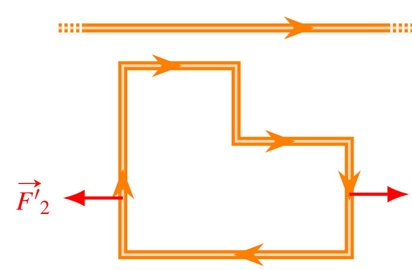
Selon la règle de la main droite, la force est dans la direction suivante. La direction de ce vecteur est 90° inférieurs à celle du champ magnétique, c'est-à-dire que la direction de ce vecteur est de 116,6°.



La force est donc de $1{,}342\times 10^{-4}\,\mathrm{N}$ à 116,6°.

Exercice 7 : Dans les deux cas, les paires de forces s'annulent.





Il ne reste donc qu'à trouver les forces sur les fils verticaux. Commençons par le fil qui est à 10 cm du fil infini. À cette distance, le champ du fil infini a la grandeur suivante.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 70}{2\pi \times 0{,}1} = 1{,}4 \times 10^{-4}\,\mathrm{T}$$

Le champ entre dans la feuille. La force sur le fil est

$$F = I\ell B \sin\theta = 6 \times 0{,}5 \times 1{,}4 \times 10^{-4} \sin(90^\circ) = 1{,}26 \times 10^{-4}\,\mathrm{N}$$

Cette force est vers la gauche.

Continuons par le fil qui est à une distance de 20 cm du fil infini. À cette distance, le champ du fil infini a la grandeur suivante.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 70}{2\pi \times 0{,}2} = 7 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$$

Le champ entre dans la feuille. La force sur le fil est

$$F = I\ell B \sin\theta = 6 \times 0{,}15 \times 7 \times 10^{-5} \sin(90^\circ) = 6{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{N}$$

Cette force est vers la gauche.

Finissons par le fil qui est à une distance de 35 cm du fil infini. À cette distance, le champ du fil infini a la grandeur suivante.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 70}{2\pi \times 0{,}35} = 4 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$$

Le champ entre dans la feuille. La force sur le fil est

$$F = I\ell B \sin\theta = 6 \times 0{,}3 \times 4 \times 10^{-5} \sin(90^\circ) = 7{,}2 \times 10^{-5}\,\mathrm{N}$$

Cette force est vers la droite.

La force nette en x est donc (avec un axe positif vers la droite)

$$F_x = -1{,}26 \times 10^{-4} + \left(-6{,}3 \times 10^{-5}\right) + 7{,}2 \times 10^{-5} = -1{,}17 \times 10^{-4}\,\mathrm{N}$$

La force nette est donc de $1{,}17 \times 10^{-4}$ N vers la gauche.

Exercice 8 : Le champ fait par le fil infini est

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20 \times 20}{2\pi \times 0{,}8} = 5 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

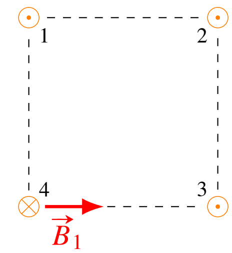
La force sur le fil de 5 m de long est donc

$$F = I\ell B \sin\theta = 40 \times 5 \times 10^{-6} \times \sin(90^\circ) = 0{,}001\,\mathrm{N}$$

Puisque les courants sont dans le même sens, la force est attractive.

Exercice 9 :

- Le champ fait par le fil 1 est

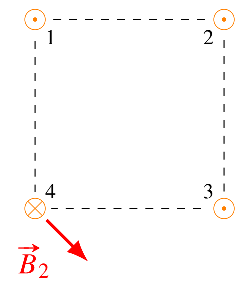


$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1}{2\pi \times 0{,}2} = 1 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

La figure montre la direction de ce champ à l'endroit où est situé le fil 4. Les composantes de ce champ sont donc

$$B_{1x} = 1 \times 10^{-6}\,\mathrm{T} \qquad \text{et} \qquad B_{1y} = 0\,\mathrm{T}$$

- Le champ fait par le fil 2 est

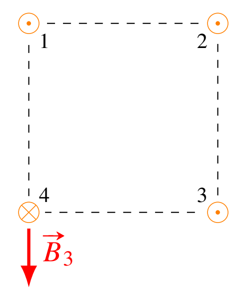


$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 5}{2\pi \times \sqrt{2} \times 0{,}2} = 3{,}535\,5 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

La figure montre la direction de ce champ à l'endroit où est situé le fil 4. Les composantes de ce champ sont donc

$$B_{2x} = 3{,}535\,5 \times 10^{-6} \times \cos(-45^\circ) = 2{,}5 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$
$$B_{2y} = 3{,}535\,5 \times 10^{-6} \times \sin(-45^\circ) = -2{,}5 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

- Le champ fait par le fil 3 est



$$B_3 = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi r_3} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 2}{2\pi \times 0{,}2} = 2 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

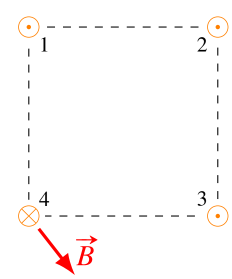
La figure montre la direction de ce champ à l'endroit où est situé le fil 4. Les composantes de ce champ sont donc

$$B_{3x} = 0\,\mathrm{T} \qquad \text{et} \qquad B_{3y} = -2 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

Les composantes du champ total sont donc

$$B_x = B_{1x} + B_{2x} + B_{3x} = 1 \times 10^{-6} + 2{,}5 \times 10^{-6} + 0 = 3{,}5 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$
$$B_y = B_{1y} + B_{2y} + B_{3y} = 0 + (-2{,}5 \times 10^{-6}) + (-2 \times 10^{-6}) = -4{,}5 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

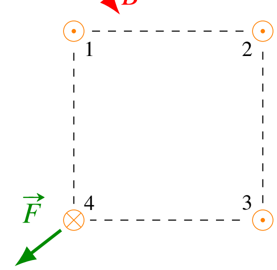
La grandeur et la direction du champ sont



$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(3{,}5 \times 10^{-6})^2 + (-4{,}5 \times 10^{-6})^2} = 5{,}701 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

$$\theta = \arctan \frac{B_y}{B_x} = \arctan \frac{-4{,}5 \times 10^{-6}}{3{,}5 \times 10^{-6}} = -52{,}12^\circ$$

La force sur le fil 4 est donc

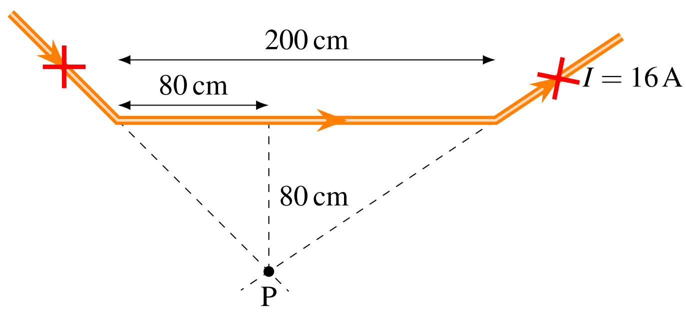


$$F = I\ell B \sin\theta = 4 \times 10 \times 5{,}701 \times 10^{-6} \times \sin(90^\circ) = 2{,}28 \times 10^{-4}\,\mathrm{N}$$

La direction est, selon la règle de la main droite

$$-52{,}1^\circ - 90^\circ = -142{,}1^\circ \text{ (ou } 217{,}9^\circ)$$

Exercice 10 : Les deux bouts de fils sur la figure avec un X rouge ne contribuent pas au champ puisque le point P est aligné avec le fil.



Il ne reste que le bout de fils de 200 cm de long. Le champ de ce fil est

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left|\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+R^2}}+\frac{y_2}{\sqrt{y_2^2+R^2}}\right| = \frac{4\pi\times10^{-7}\times16}{4\pi\times0{,}8}\left|\frac{0{,}8}{\sqrt{(0{,}8)^2+(0{,}8)^2}}+\frac{1{,}2}{\sqrt{(1{,}2)^2+(0{,}8)^2}}\right|$$
$$= 3{,}078\times10^{-6}\,\text{T}$$

Le champ est de 3,078 µT, en entrant dans la feuille.

Exercice 11 : Avant de trouver le champ, on va trouver la distance entre le fil et le point P. Cette distance est

$$\frac{R}{5} = \cos(60^\circ) \qquad \text{soit} \qquad R = 2{,}5\,\text{m}$$

Le champ est

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}|\cos\theta_1 - \cos\theta_2| = \frac{4\pi\times10^{-7}\times8}{4\pi\times2{,}5}|\cos(30^\circ)-\cos(90^\circ)| = 2{,}771\times10^{-7}\,\text{T}$$

Le champ est de 0,277 1 µT, en entrant dans la feuille.

Exercice 12 : Les deux fils rectilignes ne font pas de champ au point P. Il ne resta alors que l'arc de cercle. Le champ est donc

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\beta = \frac{4\pi\times10^{-7}}{4\pi\times0{,}2}\pi = 1{,}571\times10^{-5}\,\text{T}$$

Le champ est de 15,71 µT, en entrant dans la feuille.

Exercice 13 : Les deux petits bouts de fils rectilignes ne font pas de champ au point P. Il ne reste donc que les deux arcs de cercle. L'arc avec le plus grand rayon fait le champ suivant.

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\beta = \frac{4\pi\times10^{-7}\times12}{4\pi\times0{,}24}\times\pi = 1{,}571\times10^{-5}\,\text{T}$$

Ce champ entre dans la page. L'arc avec le plus petit rayon fait le champ suivant.

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\beta = \frac{4\pi\times10^{-7}\times12}{4\pi\times0{,}16}\times\pi = 2{,}356\times10^{-5}\,\text{T}$$

Ce champ entre dans la page. Additionnons maintenant les deux champs. En prenant un axe positif qui sort de la page, on a

$$B = B_1 + B_2 = -1{,}571\times10^{-5} + 2{,}356\times10^{-5} = 7{,}85\times10^{-6}\,\text{T}$$

On a donc un champ de 7,85 µT qui sort de la page.

Exercice 14 : On a deux fils infinis et un arc de cercle.

- Le champ du fil infini horizontal entre dans la page et vaut

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}|\cos\theta_1 - \cos\theta_2| = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10}{4\pi \times 0{,}4}|\cos(0°) - \cos(90°)| = 2{,}5 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

- Le champ de l'arc de cercle entre dans la page et vaut

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\beta = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10}{4\pi \times 0{,}4} \times \frac{\pi}{2} = 3{,}927 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

- Le champ du fil infini vertical entre dans la page et vaut

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}|\cos\theta_1 - \cos\theta_2| = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10}{4\pi \times 0{,}4}|\cos(90°) - \cos(180°)| = 2{,}5 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

Additionnons maintenant les trois champs. En prenant un axe positif qui entre dans la page, on a

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = 2{,}5 \times 10^{-6} + 3{,}927 \times 10^{-6} + 2{,}5 \times 10^{-6} = 8{,}927 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

On a donc un champ de 8,927 µT qui entre dans la page.

Exercice 15 : On a 4 fils rectilignes.

- Le fil du haut fait un champ qui entre dans la feuille et qui vaut

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}|\cos\theta_1 - \cos\theta_2| = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 2}{4\pi \times 0{,}25}|\cos(45°) - \cos(135°)| = 1{,}131 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

- Le fil de droite fait un champ qui entre dans la feuille et qui vaut

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}|\cos\theta_1 - \cos\theta_2| = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 2}{4\pi \times 0{,}25}|\cos(45°) - \cos(135°)| = 1{,}131 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

- Le fil du bas fait un champ qui entre dans la feuille et qui vaut

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}|\cos\theta_1 - \cos\theta_2| = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 2}{4\pi \times 0{,}25}|\cos(45°) - \cos(135°)| = 1{,}131 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

- Le fil de gauche fait un champ qui entre dans la feuille et qui vaut

$$B_4 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}|\cos\theta_1 - \cos\theta_2| = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 2}{4\pi \times 0{,}25}|\cos(45°) - \cos(135°)| = 1{,}131 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

Additionnons maintenant les quatre champs. En prenant un axe positif qui entre dans la page, on a

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = (1{,}131 + 1{,}131 + 1{,}131 + 1{,}131) \times 10^{-6} = 4{,}525 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

On a donc un champ de 4,525 µT qui entre dans la page.

Exercice 16 : On a

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2a} \qquad \longrightarrow \qquad 0{,}002 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times N \times 2}{2 \times 0{,}12} \qquad \longrightarrow \qquad N = 191$$

Exercice 17 : On a 3 fils rectilignes et un arc de cercle.

- Le fil de gauche fait un champ qui sort de la feuille et qui vaut

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left|\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+R^2}}+\frac{y_2}{\sqrt{y_2^2+R^2}}\right| = \frac{4\pi\times10^{-7}\times10}{4\pi\times2}\left|\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}+\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}\right| = 4{,}472\times10^{-7}\,\mathrm{T}$$

- Le fil du haut fait un champ qui sort de la feuille et qui vaut

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left|\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+R^2}}+\frac{y_2}{\sqrt{y_2^2+R^2}}\right| = \frac{4\pi\times10^{-7}\times10}{4\pi\times1}\left|\frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}}+\frac{0}{\sqrt{2^2+1^2}}\right| = 8{,}944\times10^{-7}\,\mathrm{T}$$

- L'arc de cercle fait un champ qui sort de la feuille et qui vaut

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\beta = \frac{4\pi\times10^{-7}\times10}{4\pi\times1}\times\pi = 3{,}141\,6\times10^{-6}\,\mathrm{T}$$

- Le fil du bas fait un champ qui sort de la feuille et qui vaut

$$B_4 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left|\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+R^2}}+\frac{y_2}{\sqrt{y_2^2+R^2}}\right| = \frac{4\pi\times10^{-7}\times10}{4\pi\times1}\left|\frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}}+\frac{0}{\sqrt{2^2+1^2}}\right| = 8{,}944\times10^{-7}\,\mathrm{T}$$

Additionnons maintenant les quatre champs. En prenant un axe positif qui sort dans la page, on a

$$B = B_1+B_2+B_3+B_4 = (4{,}472+8{,}944+3{,}141\,6+8{,}944)\times10^{-7} = 5{,}378\times10^{-7}\,\mathrm{T}$$

On a donc un champ de 5,378 µT qui sort de la page.

Exercice 18 : Le champ est

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times684\times0{,}049\,1}{0{,}172} = 2{,}454\times10^{-4}\,\mathrm{T}$$

Exercice 19 : On a

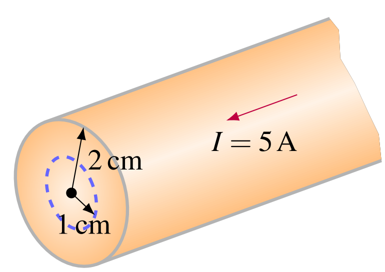
$$B = \frac{\mu_0 NI}{L} \longrightarrow 0{,}08 = \frac{4\pi\times10^{-7}\times20\times I}{0{,}2} \longrightarrow I = 636{,}6\,\mathrm{A}$$

Exercice 20 :

(a) La densité de courant dans le fil est

$$J = \frac{I}{\text{aire du fil}} = \frac{I}{\pi R^2} = \frac{5}{\pi\times(0{,}02)^2} = 3\,979\,\mathrm{A/m^2}$$

On va maintenant faire une trajectoire centrée sur le centre du fil et qui a un rayon de 1 cm.



Le courant qui traverse cette trajectoire est

$$I_{\text{int}} = JA_{\text{int}} = J(\pi r^2) = 3\,979\cdot\pi\cdot(0{,}001)^2 = 1{,}25\,\mathrm{A}$$

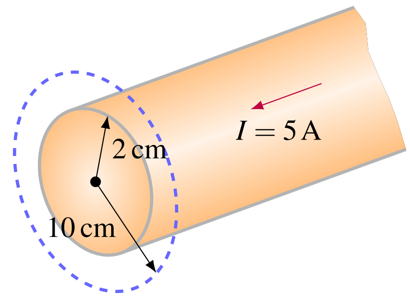
On a donc

$$B2\pi r = \mu_0 I_{\text{int}} \longrightarrow B\times2\pi\times0{,}001 = 4\pi\times10^{-7}\times1{,}25 \longrightarrow B = 2{,}5\times10^{-5}\,\mathrm{T}$$

(b) On va faire une trajectoire centrée sur le centre du fil et qui a un rayon de 10 cm.

On a donc

$$B2\pi r = \mu_0 I_{\text{int}}$$
$$B \times 2\pi \times 0{,}1 = 4\pi \times 10^{-7} \times 5$$
$$B = 1 \times 10^{-5}\,\text{T}$$

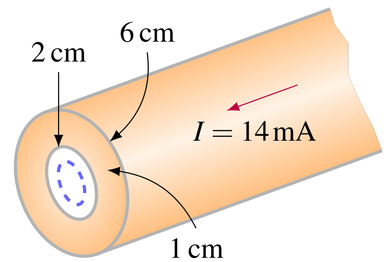


Exercice 21 :

(a) On va faire une trajectoire circulaire de 1 cm de rayon. Cette trajectoire est

Comme il n'y a pas de courant qui traverse cette trajectoire, on a

$$B2\pi r = \mu_0 I_{\text{int}}$$
$$B \times 2\pi \times 0{,}1 = 4\pi \times 10^{-7} \times 0$$
$$B = 0\,\text{T}$$



(b) On va maintenant faire une trajectoire ayant un rayon de 4 cm.

Il n'y a qu'une partie du courant qui passe dans la trajectoire. La densité de courant dans le fil est

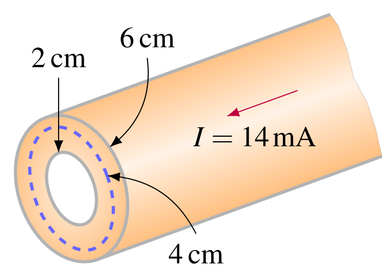
$$J = \frac{I}{\text{aire du fil}} = \frac{I}{\pi R^2} = \frac{14 \times 10^{-3}}{\pi \times (0{,}06)^2 - \pi \times 0{,}02)^2} = 1{,}392\,6\,\text{A/m}^2$$

Le courant dans la trajectoire est donc

$$I_{\text{int}} = JA_{\text{int}} = 1{,}392\,6 \times \left(\pi \times (0{,}04)^2 - \pi \times (0{,}02)^2\right) = 5{,}25\,\text{mA}$$

Le théorème d'Ampère nous donne donc

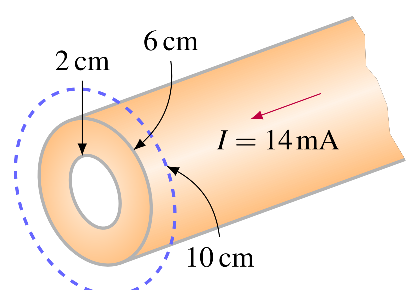
$$B2\pi r = \mu_0 I_{\text{int}}$$
$$B \times 2\pi \times 0{,}04 = 4\pi \times 10^{-7} \times 0{,}005\,25$$
$$B = 2{,}625 \times 10^{-8}\,\text{T}$$



(c) On va finalement faire une trajectoire ayant un rayon de 10 cm.

Dans ce cas, le courant passe au complet dans la trajectoire. On a donc

$$B2\pi r = \mu_0 I_{\text{int}}$$
$$B \times 2\pi \times 0{,}1 = 4\pi \times 10^{-7} \times 0{,}014$$
$$B = 2{,}8 \times 10^{-8}\,\text{T}$$



Exercice 22 :

(a) On va faire une trajectoire circulaire de 1 cm de rayon.
Il n'y a qu'une partie du courant du fil central qui passe dans la trajectoire. La densité de courant dans le fil central est

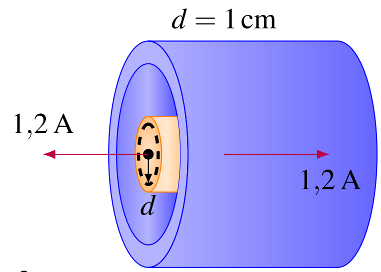
$$J = \frac{I}{\text{aire du fil}} = \frac{I}{\pi R^2} = \frac{1{,}2}{\pi \times (0{,}02)^2} = 954{,}9\,\mathrm{A/m^2}$$

Le courant dans la trajectoire est donc

$$I_{\text{int}} = JA_{\text{int}} = 954{,}9 \times \pi \times (0{,}01)^2 = 0{,}3\,\mathrm{A}$$

Le théorème d'Ampère nous donne donc

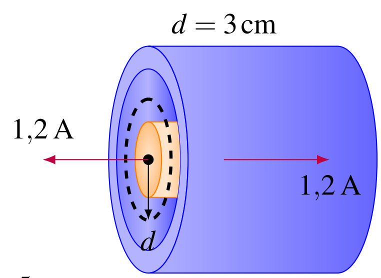
$$B2\pi r = \mu_0 I_{\text{int}}$$
$$B \times 2\pi \times 0{,}01 = 4\pi \times 10^{-7} \times 0{,}3$$
$$B = 6 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$



(b) On va maintenant faire une trajectoire ayant un rayon de 3 cm.

Dans ce cas, le courant du fil passe au complet dans la trajectoire. On a donc

$$B2\pi r = \mu_0 I_{\text{int}}$$
$$B \times 2\pi \times 0{,}03 = 4\pi \times 10^{-7} \times 1{,}2$$
$$B = 8 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$



(c) On va maintenant faire une trajectoire ayant un rayon de 5 cm.

Tout le courant de la partie centrale passe dans la trajectoire, plus une partie du courant dans le cylindre externe. La densité de courant dans le cylindre externe est

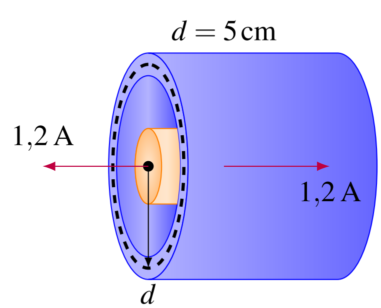
$$J = \frac{I}{\text{aire du fil}} = \frac{I}{\pi R^2} = \frac{1{,}2}{\pi \times (0{,}06)^2 - \pi \times (0{,}04)^2} = 191\,\mathrm{A/m^2}$$

Le courant dans la trajectoire est donc

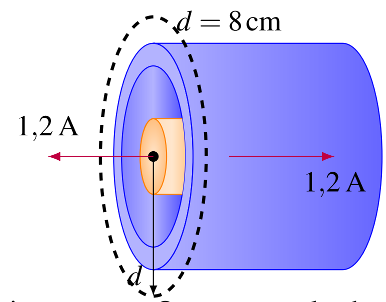
$$I_{\text{int}} = JA_{\text{int}} = 191 \times \left(\pi \times (0{,}05)^2 - \pi \times (0{,}04)^2\right) = 0{,}54\,\mathrm{A}$$

Le théorème d'Ampère nous donne donc

$$B2\pi r = \mu_0 I_{\text{int}}$$
$$B \times 2\pi \times 0{,}05 = 4\pi \times 10^{-7} \times (1{,}2 - 0{,}54)$$
$$B = 2{,}64 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$



(d) On va finalement faire une trajectoire ayant un rayon de 8 cm.



Maintenant, les deux courants passent au complet dans la trajectoire. On a donc

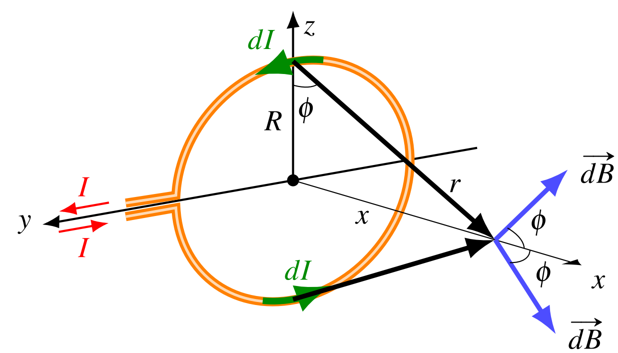
$$B2\pi r = \mu_0 I_{\text{int}}$$
$$B \times 2\pi \times 0{,}08 = 4\pi \times 10^{-7} \times (1{,}2 - 1{,}2)$$
$$B = 0\,\mathrm{T}$$

Exercice 23 : Pour trouver le champ, on va séparer le disque en petits anneaux. On sommera le champ fait par chacun de ces anneaux pour trouver le champ magnétique total.

On doit donc trouver le champ fait par un anneau, on va prendre la loi de Biot-Savart.

Chaque petit morceau génère un champ dont la grandeur est

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I ds \sin\phi$$



Dans cette formule, ϕ est toujours 90°.

On voit que ce champ n'est pas toujours dans la même direction. On va séparer en composante et garder seulement la composante x (les autres composantes vont s'annuler 2 à 2 comme pour les deux champs montrés sur la figure). Cette composante est

$$dB_x = dB\cos\phi = dB\frac{R}{r} = dB\frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

Le champ total est donc

$$B_x = \int dB\frac{R}{r} = \int \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I ds \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 RI}{4\pi r^3}\int ds$$

Comme la somme des distances sur l'anneau est $2\pi R$, on a

$$B_x = \frac{\mu_0 RI}{4\pi r^3} 2\pi R = \frac{\mu_0 R^2 I}{2r^3}$$

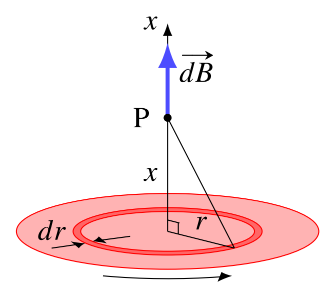
Comme $r = \sqrt{R^2+x^2}$, on a

$$B_x = \frac{\mu_0 R^2 I}{2\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

On peut maintenant retourner au disque, formé de plusieurs anneaux.

Ici, chaque anneau de rayon r fait le champ

$$dB_x = \frac{\mu_0 r^2 I}{2\left(r^2+x^2\right)^{3/2}}$$



Il faut trouver le courant dans chaque anneau généré par la rotation du disque. En un tour, la charge de l'anneau passe au complet en un point. Le courant est donc

$$I = \frac{dq}{T}$$

La charge de l'anneau est égale à l'aire de l'anneau, multipliée par la charge surfacique

$$dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr$$

Comme la charge surfacique est

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

On a

$$dq = \sigma 2\pi r dr = \frac{Q}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{Q}{R^2} 2 r dr$$

Le courant est donc

$$I = \frac{dq}{T} = \frac{Q}{TR^2} 2 r dr$$

Comme $T = 2\pi/\omega$, le courant est

$$I = \frac{Q\omega}{2\pi R^2} 2 r dr = \frac{Q\omega}{\pi R^2} r dr$$

Le champ de l'anneau est donc

$$dB_x = \frac{\mu_0 r^2 I}{2\left(r^2+x^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 r^2}{2\left(r^2+x^2\right)^{3/2}} \frac{Q\omega}{\pi R^2} r dr$$

Si on somme les champs de tous les anneaux, on a

$$B_x = \int_0^R \frac{\mu_0 r^2}{2\left(r^2+x^2\right)^{3/2}} \frac{Q\omega}{\pi R^2} r dr = \frac{\mu_0}{2} \frac{Q\omega}{\pi R^2} \int_0^R \frac{r^3}{\left(r^2+x^2\right)^{3/2}} dr$$

Si on fait l'intégrale, on obtient

$$B_x = \frac{\mu_0}{2} \frac{Q\omega}{\pi R^2} \left[\frac{r^2+2x^2}{\sqrt{r^2+x^2}} \right]_0^R = \frac{\mu_0}{2} \frac{Q\omega}{\pi R^2} \left[\frac{R^2+2x^2}{\sqrt{R^2+x^2}} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^2}} \right] = \frac{\mu_0}{2} \frac{Q\omega}{\pi R^2} \left[\frac{R^2+2x^2}{\sqrt{R^2+xp2}} - 2x \right]$$

Une bobine circulaire ayant un diamètre de 20 cm tourne sur elle-même avec une fréquence constante de 60 Hz dans un champ magnétique de 500 G. Combien doit-il y avoir de tours de fil sur la bobine pour que l'amplitude de la différence de potentiel soit de 170 V ?
Découvrez comment résoudre ce problème dans ce chapitre.

10. Solutions du chapitre 10

Exercice 1 : La différence de potentiel est

$$\mathscr{E} = vB\ell = 120 \times 0{,}025 \times 0{,}3 = 0{,}9\,\mathrm{V}$$

Quand la tige descend, les charges positives subissent une force vers la droite selon la règle de la main droite. C'est donc le côté droit de la tige qui est au potentiel le plus élevé.

Exercice 2 : Il n'y a pas de différence de potentiel dans la tige horizontale parce qu'elle n'est pas perpendiculaire à la vitesse ni au champ magnétique.

Il y a cependant une différence de potentiel dans la tige verticale puisqu'elle est perpendiculaire à la vitesse et au champ magnétique. Cette différence de potentiel est

$$\mathscr{E} = vB\ell = 50 \times 0{,}02 \times 0{,}6 = 0{,}6\,\mathrm{V}$$

Exercice 3 : La différence de potentiel est

$$\mathscr{E} = vB\ell = 250 \times 0{,}000\,05 \times 45 = 0{,}562\,5\,\mathrm{V}$$

Exercice 4 :

(a) En descendant vers le sol, la force sur la charge positive dans le bloc est en sortant de la page. Les charges positives vont donc s'accumuler sur le devant du cube et les charges négatives vont s'accumuler sur le derrière du cube. C'est donc le devant du cube qui a le potentiel le plus élevé et le derrière du cube qui a le potentiel le plus bas.

(b) Pour trouver la différence de potentiel, il faut connaître la vitesse du cube. Cette vitesse est

$$v = gt = 9{,}8 \times 5 = 49\,\mathrm{m/s}$$

La différence de potentiel est alors

$$\mathscr{E} = vB\ell = 49 \times 0{,}000\,05 \times 0{,}2 = 4{,}9 \times 10^{-4}\,\mathrm{V} = 0{,}49\,\mathrm{mV}$$

Exercice 5 : Comme le champ change, il faut séparer l'aire en région où le champ est constant. On aura ainsi la moitié gauche du rectangle et la moitié droite du rectangle. En utilisant un vecteur $\vec{A}$ qui entre dans la feuille, le flux à travers la partie gauche est

$$\phi_1 = BA\cos\theta_1 = 0{,}05 \times (0{,}2 \times 0{,}2)\cos(0°) = 2 \times 10^{-3}\,\text{Wb}$$

Pour la partie de droite, le flux est

$$\phi_2 = BA\cos\theta_2 = 0{,}012\,5 \times (0{,}2 \times 0{,}2)\cos(180°) = -0{,}5 \times 10^{3}\,\text{Wb}$$

Le flux total est donc de

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 2 \times 10^{-3} - 0{,}5 \times 10^{-3} = 1{,}5 \times 10^{-3}\,\text{Wb} = 1{,}5\,\text{mWb}$$

Exercice 6 : Le flux est

$$\phi_B = BA\cos\theta$$

Il nous faut l'aire. Cette aire est

$$A = \frac{1}{2}\cdot\text{base}\cdot\text{hauteur} = \frac{1}{2} \times 0{,}3 \times (0{,}3 \times \cos(30°)) = 0{,}038\,97\,\text{m}^2$$

En utilisant un vecteur $\vec{A}$ qui entre dans la feuille, le flux est donc

$$\phi_B = BA\cos\theta = 0{,}2 \times 0{,}038\,97 \times \cos(0°) = 7{,}794 \times 10^{-3}\,\text{Wb}$$

Exercice 7 : Comme l'angle change, il faut séparer l'aire en région où l'angle est constant. On aura ainsi la partie verticale du cadre et la partie horizontale du cadre.

Pour la partie verticale, on utilise un vecteur $\vec{A}$ qui va vers les y positifs, le flux à travers cette partie est

$$\phi_1 = BA\cos\theta = 0{,}08 \times (0{,}24 \times 0{,}36)\cos(25°) = 6{,}264 \times 10^{-3}\,\text{Wb}$$

Pour la partie horizontale, on utilise un vecteur $\vec{A}$ qui va vers les z négatifs, le flux à travers cette partie est

$$\phi_2 = BA\cos\theta = 0{,}08 \times (0{,}24 \times 0{,}36)\cos(65°) = 2{,}921 \times 10^{-3}\,\text{Wb}$$

Le flux total est donc de

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 6{,}264 \times 10^{-3} + 2{,}921 \times 10^{-3} = 9{,}186 \times 10^{-3}\,\text{Wb} = 9{,}183\,\text{mWb}$$

Exercice 8 : La dérivée du flux à $t = 0{,}4\,\text{s}$ est égale à la pente sur le graphique à $t = 0{,}4\,\text{s}$. Cette pente est

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{-5 - 10}{0{,}6 - 0{,}2} = -37{,}5\,\text{Wb/s}$$

La différence de potentiel induite est donc

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\phi}{dt} = -30 \times (-37{,}5) = 1\,125\,\text{V}$$

Le courant est donc

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{1\,125}{50} = 22{,}5\,\text{A}$$

Exercice 9 : En prenant un vecteur $\vec{A}$ qui entre dans la page, le flux initial est

$$\phi = BA\cos\theta = 0{,}02 \times \pi \times (0{,}12)^2 \cos(0°) = 9{,}048 \times 10^{-4}\,\mathrm{Wb}$$

Le flux final est

$$\phi = B'A'\cos\theta' = 0{,}024 \times \pi \times (0{,}12)^2 \cos(0°) = 10{,}857 \times 10^{-4}\,\mathrm{Wb}$$

La différence de potentiel induite est donc

$$\mathscr{E} = -N\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -N\frac{\phi' - \phi}{\Delta t} = -1 \times \frac{10{,}857 \times 10^{-4} - 9{,}048 \times 10^{-4}}{0{,}04} = -4{,}524\,\mathrm{mV}$$

Le courant est donc

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{-4{,}524 \times 10^{-3}}{2} = -2{,}262 \times 10^{-3}\,\mathrm{A} = -2{,}262\,\mathrm{mA}$$

Puisque la réponse est négative, le courant est dans le sens contraire des aiguilles d'une montre selon la règle de la main droite.

Exercice 10 : En prenant un vecteur $\vec{A}$ qui entre dans la page, la différence de potentiel induite est

$$\mathscr{E} = RI = 12 \times (-0{,}15) = -1{,}8\,\mathrm{V}$$

La valeur est négative, car le courant est dans le sens contraire du sens positif donné par la règle de la main droite. On a donc

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\phi}{dt} \qquad \longrightarrow \qquad -1{,}8 = -1 \times \frac{d\phi}{dt} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{d\phi}{dt} = 1{,}8\,\mathrm{V}$$

On trouve finalement le taux de variation du champ.

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{d(BA\cos\theta)}{dt} \\ \frac{d\phi}{dt} &= A\cos\theta\frac{dB}{dt} \end{aligned} \qquad \text{et donc} \qquad \begin{aligned} 1{,}8 &= (0{,}08)^2\cos(0°)\frac{dB}{dt} \\ \frac{dB}{dt} &= 281{,}25\,\mathrm{T/s} \end{aligned}$$

Le champ augmente donc au rythme de 218,25 T/s.

Exercice 11 : En utilisant un vecteur $\vec{A}$ qui entre dans la feuille, la différence de potentiel est

$$\begin{aligned} \mathscr{E} &= -N\frac{d\phi}{dt} = -N\frac{d(BA\cos\theta)}{dt} = -NA\cos\theta\frac{dB}{dt} = -NA\cos\theta\frac{d(1{,}2\,\mathrm{G} + 0{,}5\,\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{s}}t + 0{,}02\,\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{s}^2}t^2)}{dt} \\ &= -NA\cos\theta(0{,}5\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{s}} + 0{,}04\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{s}^2}t) = -NA\cos\theta(0{,}000\,05\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{s}} + 0{,}000\,004\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{s}^2}t) \end{aligned}$$

Avec les valeurs, on a

$$\mathscr{E} = -1 \cdot \pi(0{,}12)^2\cos(0°)(0{,}000\,05 + 0{,}000\,004 \times 5) = -3{,}167 \times 10^{-6}\,\mathrm{V}$$

Le courant est donc

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{-3{,}167 \times 10^{-6}}{2} = -1{,}583 \times 10^{-6}\,\mathrm{A}$$

Le courant est dans le sens contraire des aiguilles d'une horloge selon la règle de la main droite.

Exercice 12 : En utilisant un vecteur $\vec{A}$ vers le haut, la différence de potentiel est

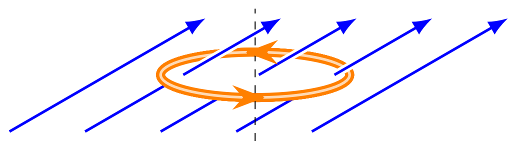
$$\mathscr{E} = -N\frac{d\phi}{dt} = -N\frac{d(BA\cos\theta)}{dt} = -NA\cos\theta\frac{dB}{dt} = -NA\cos\theta\frac{d(500\,\text{G} - 50\,\frac{\text{G}}{\text{s}}t)}{dt}$$
$$= -NA\cos\theta(-50\,\frac{\text{G}}{\text{s}}) = -NA\cos\theta(0{,}005\,\frac{\text{T}}{\text{s}})$$

Avec les valeurs, on a

$$\mathscr{E} = 1\cdot\pi(0{,}1)^2\cos(70°)(0{,}005) = 5{,}372\times10^{-5}\,\text{V}$$

Le courant est donc

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{5{,}372\times10^{-5}}{0.1} = 5{,}372\times10^{-4}\,\text{A}$$



Le courant est dans le sens montré sur la figure suivante selon la règle de la main droite.

Exercice 13 : Le rayon de l'anneau est

$$r = \frac{40}{2\pi} = 6{,}366\,\text{cm}$$

En prenant un vecteur $\vec{A}$ vers le haut, le flux initial est

$$\phi = BA\cos\theta = 0{,}06\cdot\pi\cdot(0{,}063\,66)^2\cos(0°) = 7{,}639\times10^{-4}\,\text{Wb}$$

Le flux final est

$$\phi' = B'A'\cos\theta' = 0{,}02\cdot\pi\cdot(0{,}063\,66)^2\cos(180°) = -2{,}546\times10^{-4}\,\text{Wb}$$

La différence de potentiel induite est donc

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\phi}{dt} = -500\times\frac{-2{,}546\times10^{-4} - 7{,}639\times10^{-4}}{0{,}12} = 4{,}244\,\text{V}$$

On trouve la résistance avec

$$R = \frac{\mathscr{E}}{I} = \frac{4{,}244}{0{,}25} = 16{,}98\,\Omega$$

Exercice 14 : En utilisant un vecteur $\vec{A}$ vers la droite, la différence de potentiel est

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\phi}{dt} = -N\frac{d(BA\cos\theta)}{dt} = -NA\cos\theta\frac{dB}{dt} = -1\,000\pi\cdot(0{,}12)^2\cos(0°)\times(-0{,}1) = 4{,}524\,\text{V}$$

La puissance dissipée est donc

$$P = \frac{\mathscr{E}^2}{R} = \frac{(4{,}524)^2}{25} = 0{,}818\,6\,\text{W}$$

Exercice 15 : Si on prend un vecteur $\vec{A}$ qui entre dans la page, le courant est négatif dans le circuit selon la règle de la main droite.

La différence de potentiel induite est donc

$$\mathscr{E} = RI = 0{,}2\times(-12) = -2{,}4\,\text{V}$$

Une réponse négative signifie que le flux augmente. Il faut donc que la tige se déplace vers la droite.

On trouve la grandeur de la vitesse avec

$$\mathscr{E} = vB\ell \qquad \longrightarrow \qquad 2{,}4 = v \cdot 0{,}02 \times 0{,}6 \qquad \longrightarrow \qquad v = 200\,\mathrm{m/s}$$

Exercice 16 : Ici, c'est l'aire qui change, on aura donc

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\phi}{dt} = -N\frac{d(BA\cos\theta)}{dt} = -NB\cos\theta\frac{dA}{dt}$$

L'aire délimitée par la boucle est une portion de cercle. S'il y a l'angle θ (en radian) entre la tige mobile et le fil sur lequel il y a la résistance, cette aire est

$$A = \pi r^2\frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta r^2}{2}$$

Le rythme de changement d'aire est (le rythme est négatif puisque l'aire diminue)

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{r^2}{2}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{r^2}{2}\omega$$

La différence de potentiel est donc

$$\mathscr{E} = -NB\cos\theta\frac{dA}{dt} = -NB\cos\theta\left(-\frac{r^2}{2}\omega\right) = NB\cos\theta\frac{r^2}{2}\omega$$

Avec un vecteur $\vec{A}$ qui entre dans la feuille, on a

$$\mathscr{E} = 1 \times 0{,}6 \cdot \cos(0°) \cdot \frac{(0{,}2)^2}{2} \times 0{,}1 = 0{,}001\,2\,\mathrm{V}$$

Le courant est alors

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{0{,}001\,2}{20} = 6 \times 10^{-5}\,\mathrm{A}$$

Puisque la réponse est positive, le courant dans le circuit est dans le sens des aiguilles d'une montre. Le courant dans la résistance est donc vers la gauche.

Exercice 17 : Quand la boucle est entrée de la distance x dans le champ, le flux dans la boucle est

$$\phi = BA\cos\theta = B \cdot (x \cdot 0{,}2) \cdot \cos\theta$$

où x est la largeur de la région où il y a un champ à l'intérieur de la boucle. À mesure que la boucle avance, cette valeur de x augmente. La variation du flux est donc

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d(B(x \cdot 0{,}2)\cos\theta)}{dt} = B \cdot 0{,}2 \cdot \cos\theta \cdot \frac{dx}{dt} = B \cdot 0{,}2 \cdot v \cdot \cos\theta$$

La différence de potentiel induite est alors

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\phi}{dt} = -1 \cdot (B \cdot 0{,}2 \cdot v \cdot \cos\theta) = -B \cdot 0{,}2 \cdot v \cdot \cos\theta$$

En prenant un vecteur $\vec{A}$ qui entre dans la page, on a

$$\mathscr{E} = -B \cdot 0{,}2 \cdot v \cdot \cos(0°) = -B \cdot 0{,}2 \cdot v$$

Le courant est donc

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{B \cdot 0{,}2 \cdot v}{50}$$

(On ne s'occupe pas du signe qui indique simplement la direction du courant.)

Il y aura ce courant seulement pendant l'entrée du cadre dans le champ. Si le temps d'entrée est Δt, alors la charge qui traverse est

$$Q = I\Delta t$$

Mais ce temps d'entrée est facile à trouver. C'est le temps qu'il faut au derrière du cadre pour arriver dans le champ à partir du moment où le devant du cadre arrive dans le champ. Le derrière du cadre doit alors parcourir 30 cm à la vitesse v. Le temps est donc

$$\Delta t = \frac{0{,}3}{v}$$

La charge est donc

$$Q = I\Delta t = \frac{B \cdot 0{,}2 \cdot v}{50} \cdot \frac{0{,}3}{v} = \frac{B \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3}{50} = 120\,\mu\mathrm{C}$$

Exercice 18 : La différence de potentiel induite est

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\phi}{dt} = -N\frac{d(BA\cos\theta)}{dt}$$

Comme A est une constante, on a

$$\begin{aligned}
\mathscr{E} &= -NA\frac{d(B\cos\theta)}{dt} = -NA\left(B\frac{d\cos\theta}{dt} + \cos\theta\frac{dB}{dt}\right)\\
&= -NA\left((2\times 10^{-3}t + 10^{-4})\frac{d\cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{4}\right)}{dt} + \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\frac{d(2\times 10^{-3}t + 10^{-4})}{dt}\right)\\
&= -NA\left((2\times 10^{-3}t + 10^{-4})\cdot 6\pi\cdot\left(-\sin\left(6\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\right) + \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\times 10^{-3}\right)
\end{aligned}$$

À $t = 2\,\mathrm{s}$, la différence de potentiel est

$$\begin{aligned}
\mathscr{E} &= -3\,000 \times 0{,}1 \times 0{,}2 \times \left((2\times 10^{-3}\times 2 + 10^{-4}) \times 6\pi \times \left(-\sin\left(\tfrac{49\pi}{4}\right)\right) + \cos\left(\tfrac{49\pi}{4}\right) \times 2\times 10^{-3}\right)\\
&= -60\left((4{,}1\times 10^{-3}) \times 6\pi \times \left(-\sin\left(\tfrac{49\pi}{4}\right)\right) + \cos\left(\tfrac{49\pi}{4}\right) \times 2\times 10^{-3}\right)\\
&= -60 \times (-0{,}053\,23) = 3{,}194\,\mathrm{V}
\end{aligned}$$

Le courant est donc

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{3{,}194}{10} = 0{,}319\,4\,\mathrm{A}$$

Exercice 19 :

(a) Le flux dans la boucle est

$$\phi = BA\cos\theta = B(x \cdot 0{,}2)\cos\theta$$

où x est la largeur de la région où il y a un champ à l'intérieur de la boucle. À mesure que la boucle avance, cette valeur de x diminue. La variation du flux est donc

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d(B(x\cdot 0{,}2)\cos\theta)}{dt} = -B\cdot 0{,}2\cdot\cos\theta\cdot\frac{dx}{dt} = -B\cdot 0{,}2\cdot v\cdot\cos\theta$$

La valeur est négative parce que l'aire diminue à mesure que le cadre avance. La différence de potentiel induite est alors

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\phi}{dt} = -N(-B\cdot 0{,}2\cdot v\cdot\cos\theta) = NB\cdot 0{,}2\cdot v\cdot\cos\theta$$

En prenant un vecteur $\vec{A}$ qui entre dans la page, on a

$$\mathscr{E} = 1\times 0{,}1\times 0{,}2\times 20\times\cos(0^\circ) = 0{,}4\,\mathrm{V}$$

Pour trouver le courant, il nous faut la résistance du fil. Cette résistance est

$$R = \rho\frac{l}{A} = 1{,}678\times 10^{-8}\frac{0{,}6}{\pi(0{,}001)^2} = 0{,}008\,546\,\Omega$$

Le courant est donc

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{0{,}4}{0{,}008\,546} = 46{,}81\,\mathrm{A}$$

Selon la règle de la main droite, ce courant est dans le sens des aiguilles d'une montre.

(b) Seuls les fils qui sont dans le champ magnétique subissent une force. Le fil du haut subit une force vers le haut et le fil du bas subit une force vers le bas de même grandeur. Ces deux forces s'annulent et il ne reste donc que la force sur le fil de gauche. La force sur ce fil est

$$F = I\ell B\sin\theta = 46{,}81\times 0{,}2\times 0{,}1\times\sin(90^\circ) = 0{,}936\,1\,\mathrm{N}$$

Selon la règle de la main droite, cette force est vers la gauche.

Exercice 20 : Avec la force sur la tige, on peut trouver le courant dans le circuit.

$$F = I\ell B\sin\theta \qquad\longrightarrow\qquad 0{,}288 = I\cdot 0{,}6\cdot 0{,}02\cdot\sin(90^\circ) \qquad\longrightarrow\qquad I = 24\,\mathrm{A}$$

La différence de potentiel induite est donc de

$$\mathscr{E} = RI = 0{,}2\times 24 = 4{,}8\,\mathrm{V}$$

Selon la formule de l'induction, on a

$$\mathscr{E} = vB\ell \qquad\longrightarrow\qquad 4{,}8 = v\cdot 0{,}02\cdot 0{,}6 \qquad\longrightarrow\qquad v = 400\,\mathrm{m/s}$$

Exercice 21 : Il y a deux forces sur la tige qui tombe. Il y a la force gravitationnelle vers le bas et la force magnétique vers le haut. Cette force est due au courant induit. Trouvons premièrement ce courant.

Le flux dans la boucle (celle délimitée par la tige tombante, les rails et le fil avec la résistance) est

$$\phi = BA\cos\theta = B(x\cdot 0{,}6)\cos\theta$$

où x est la distance entre la tige tombante et le fil avec la résistance. À mesure que la tige tombe avance, cette valeur de x augmente. La variation du flux est donc

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d(B(x\cdot 0{,}6)\cos\theta)}{dt} = B\cdot 0{,}6\cdot\cos\theta\cdot\frac{dx}{dt} = B\cdot 0{,}6\cdot v\cdot\cos\theta$$

La différence de potentiel induite est alors

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\phi}{dt} = -N(B\cdot 0{,}6\cdot v\cdot\cos\theta) = -NB\cdot 0{,}6\cdot v\cdot\cos\theta$$

En prenant un vecteur $\vec{A}$ dans le même sens que le champ magnétique, on a

$$\mathscr{E} = -1 \times 0{,}2 \times 0{,}6 \times v \times \cos(0^\circ) = -0{,}12 \cdot v$$

La grandeur du courant (donc la valeur absolue du courant) est donc

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{0{,}12 \cdot v}{1} = 0{,}12 \cdot v$$

La force magnétique sur la tige tombante est donc

$$F = I\ell B \sin\theta = 0{,}12 \cdot v \cdot 0{,}6 \times 0{,}2 \cdot \sin(90^\circ) = 0{,}0144 \cdot v$$

Quand la tige atteint sa vitesse limite, cette force est égale à la force de gravitation. On a donc

$$\begin{gathered} F_g = F_{mag} \\ 0{,}1 \times 9{,}8 = 0{,}0144 \cdot v \\ v = 68{,}05\,\text{m/s} \end{gathered}$$

Exercice 22 :

(a) La puissance de la force est

$$P = Fv\cos\theta$$

Pour la trouver, on doit connaitre la force qui s'exerce sur la cadre. Cette force est donnée par

$$F = I\ell B \sin\theta$$

Pour trouver cette force, on doit connaitre le courant. Ce courant est

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}$$

Pour connaitre ce courant, on doit connaitre la différence de potentiel induite. Dans ce cas, cette différence de potentiel est

$$\mathscr{E} = vB\ell = 10 \times 0{,}1 \times 0{,}4 = 0{,}4\,\text{V}$$

Le courant est donc

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}$$

Selon la loi de Lenz, ce courant est dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. La force est donc

$$F = I\ell B \sin\theta = 0{,}5 \times 0{,}4 \times 0{,}1 \sin(90^\circ) = 0{,}02\,\text{N}$$

Selon la règle de la main droite, cette force est vers la gauche. La puissance de cette force est donc

$$P = Fv\cos\theta = 0{,}02 \times 10 \times \cos(180^\circ) = -0{,}2\,\text{W}$$

L'énergie cinétique diminue donc au rythme de 0,2 J/s.

(b) La puissance dissipée en chaleur est

$$P = RI^2 = 0{,}8 \times (0{,}5)^2 = 0{,}2\,\text{W}$$

(c) Oui, les deux puissance sont égales. Cela signifie que l'énergie cinétique se transforme en chaleur.

Exercice 23 : En prenant un vecteur $\vec{A}$ vers le haut, le flux initial est

$$\phi = BA\cos\theta = 0{,}4 \times (0{,}8 \times 0{,}6)\cos(0^\circ) = 0{,}192\,\text{Wb}$$

Le flux final est

$$\phi' = B'A'\cos\theta' = 0{,}2 \times (0{,}8 \times 0{,}6)\cos(0^\circ) = 0{,}096\,\text{Wb}$$

La différence de potentiel induite est donc

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\phi}{dt} = -5 \times \frac{0{,}096 - 0{,}192}{60} = 0{,}008\,\text{V}$$

Exercice 24 : En utilisant un vecteur $\vec{A}$ qui sort de la page, la différence de potentiel est

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= -N\frac{d\phi}{dt} = -N\frac{d(BA\cos\theta)}{dt} = -NA\cos\theta\frac{dB}{dt} = -NA\cos\theta\frac{d(0{,}02\,\text{T}\sin(50t))}{dt} \\ &= -NA\cos\theta \cdot (0{,}02\,\text{T} \cdot 50\cos(50t)) = -NA\cos\theta(1\,\frac{\text{T}}{\text{s}}\cos(50t))\end{aligned}$$

Avec les valeurs, on a

$$\mathscr{E} = -1 \cdot (0{,}5 \times 0{,}2) \cdot \cos(0^\circ) \times 1 \cdot \cos(50 \times 0{,}54) = 0{,}029\,21\,\text{V}$$

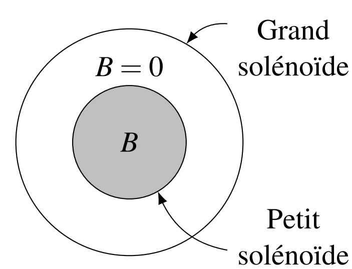
La charge du condensateur est donc

$$Q = C\Delta V = 20 \times 10^{-3} \times 0{,}029\,21 = 5{,}843 \times 10^{-4}\,\text{C} = 584{,}3\,\mu\text{C}$$

Exercice 25 : Trouvons premièrement le champ fait par le solénoïde

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L} = \frac{\mu_0 N}{L} \cdot 15\sin(377t) = 3{,}767 \times 10^{-3}\sin(377t)$$

On doit maintenant calculer le flux à travers dans le solénoïde ayant le rayon de 4 cm. Toutefois, il n'y a pas de champ partout dans ce solénoïde, il n'y a que du champ à l'intérieur du solénoïde ayant le rayon de 2 cm.



On doit donc séparer l'aire en deux parties. Une des parties est l'aire à l'intérieur du solénoïde ayant un rayon de 2 cm et l'autre partie est l'aire entre les deux solénoïdes. Comme il n'y a pas de flux dans la deuxième partie, on ne calcule que le flux dans le solénoïde ayant un rayon de 2 cm. On a donc

$$\phi = BA\cos(0^\circ) = 3{,}767 \times 10^{-3}\sin(377t) \times \pi(0{,}02)^2 = 4{,}737 \times 10^{-6}\sin(377t)$$

La dérivée est alors

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d(4{,}737 \times 10^{-6}\sin(377t))}{dt} = 4{,}737 \times 10^{-6} \times 377 \times \cos(377t) = 1{,}786 \times 10^{-3}\cos(377t)$$

La différence de potentiel est donc

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\phi}{dt} = -2{,}5 \times 1{,}786 \times 10^{-3}\cos(377t) = -4{,}465 \times 10^{-3}\cos(377t)$$

À $t = 0{,}71\,\mathrm{s}$, on a

$$\mathscr{E} = -4{,}465 \times 10^{-3}\cos(377 \times 0{,}71) = 3{,}596 \times 10^{-3}\,\mathrm{V}$$

Exercice 26 : La différence de potentiel maximale est

$$\Delta v_0 = NBA\omega = 800 \times 0{,}2 \times (0{,}4 \times 0{,}2) \times 100\pi = 4\,021\,\mathrm{V}$$

Exercice 27 : La différence de potentiel maximale se trouve avec

$$\begin{aligned}
P_{\max} &= \frac{\Delta V_{\max}^2}{R} \\
P_{\max} &= \frac{\Delta v_0^2}{R} \\
12{,}5 &= \frac{\Delta v_0^2}{200} \\
\Delta v_0 &= 50\,\mathrm{V}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\Delta v_0 &= NBA\omega \\
50 &= 1 \times 0{,}1 \times 0{,}8 \times \omega \\
\omega &= 625\,\mathrm{rad/s}
\end{aligned}$$

Exercice 28 :

(a) La valeur maximale de la différence de potentiel est

$$\Delta v_0 = NBA\omega = 1 \times 0{,}1 \times 0{,}2 \times 500 = 10\,\mathrm{V}$$

(b) L'angle initial entre le vecteur $\vec{A}$ et le champ magnétique est de 0°. On a donc

$$\Delta v = \Delta v_0 \sin(\omega t + \theta_0) = \Delta v_0 \sin(\omega t) = 10\sin(500t)$$

À $t = 0{,}01\,\mathrm{s}$, on a

$$\Delta v = 10\sin(500 \times 0{,}01) = -9{,}589\,\mathrm{V}$$

Le courant est donc de

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{9{,}589}{200} = 0{,}047\,95\,\mathrm{A} = 47{,}95\,\mathrm{mA}$$

(c) Le moment de force sur la boucle à ce moment est

$$\tau = NIAB\sin\theta$$

L'angle à ce moment est

$$\theta = \omega t + \theta_0 = 500 \times 0{,}01 + 0 = 5\,\mathrm{rad}$$

Le moment de force est donc

$$\tau = NIAB\sin\theta = 1 \times 0{,}047\,95 \times 0{,}2 \times 0{,}1\sin(5) = -9{,}195 \times 10^{-4}\,\mathrm{N\,m}$$

(d) La puissance dissipée par la résistance à ce moment est

$$P = RI^2 = 0{,}459\,8\,\mathrm{W}$$

(e) Le moment de force externe qui fait tourner la boucle doit faire un moment de force de $9{,}195 \times 10^{-4}$ N m dans le sens de la rotation pour annuler le moment de force qui s'oppose à la rotation. La puissance de ce moment de force externe est (selon ce qu'on a vu en mécanique)

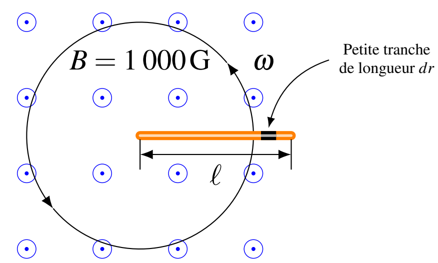
$$P = \tau\omega = 9{,}195 \times 10^{-4} \times 500 = 0{,}459\,8\,\mathrm{W}$$

Cela semble correct que la puissance fournie par le moment de force externe soit égale à la puissance dissipée par la résistance.

Exercice 29 : La différence de potentiel est donnée par

$$\mathscr{E} = vB\ell$$

Toutefois, la vitesse de la tige n'est pas la même partout. Plus on est loin de l'axe de rotation, plus la vitesse est grande. Pour contourner ce problème, on va séparer la tige en petits morceaux.



La différence de potentiel aux bornes de cette petite tranche est

$$d\mathscr{E} = vBdr$$

La vitesse à cet endroit est

$$v = \omega r$$

La différence de potentiel est donc

$$d\mathscr{E} = \omega rBdr$$

Si on additionne maintenant toutes les différences de potentiel avec une intégrale, on arrive à

$$\mathscr{E} = \int_0^L \omega rBdr = \omega B \int_0^L rdr = \omega B \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^L = \frac{\omega BL^2}{2} = \frac{20 \times 0{,}1 \times (2)^2}{2} = 4\,\mathrm{V}$$

Exercice 30 : Quand le cadre entre, la différence de potentiel induite est (comme on l'a fait dans les notes de cours)

$$\mathscr{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d(BA\cos(0°))}{dt} = -B\frac{dA}{dt} = -BL\frac{dx}{dt} = -BLv$$

(On a utilisé un vecteur $\vec{A}$ qui entre dans la page, même direction que le champ, puisque l'angle est 0°.)

Le courant dans le cadre est donc

$$I = -\frac{BLv}{R}$$

Comme le courant est négatif, le courant est dans le sens antihoraire (vu que $\vec{A}$ entre dans la page).

La force sur la partie verticale du cadre dans le champ (le devant du cadre) est

$$F = ILB\sin(90°) = \frac{BLv}{R}LB = \frac{B^2L^2v}{R}$$

Cette force est vers la gauche. Elle ralentit donc le cadre. On a donc

$$F_x = -\frac{B^2L^2v}{R}$$

L'accélération du cadre est

$$a_x = \frac{F_x}{m} = -\frac{B^2L^2v}{mR}$$

On a donc

$$a_x = -\frac{B^2L^2v}{mR} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2L^2v}{mR}$$

Cette équation nous donne

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2L^2v}{mR} \Longrightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{B^2L^2}{mR}dt \Longrightarrow \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{B^2L^2}{mR}dt \Longrightarrow \ln(v) = -\frac{B^2L^2}{mR}t + \text{Cste}$$

Avec la vitesse initiale, on peut trouver la constante

$$\ln(v) = -\frac{B^2L^2}{mR}t + \text{Cste} \qquad \Longrightarrow \qquad \ln(v_0) = -\frac{B^2L^2}{mR}\cdot 0 + \text{Cste} \qquad \Longrightarrow \qquad \ln(v_0) = \text{Cste}$$

On a donc

$$\begin{array}{ccccc} \ln(v) = -\frac{B^2L^2}{mR}t + \ln(v_0) & & \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{B^2L^2}{mR}t & & \\ & \Longrightarrow & & \Longrightarrow & v = v_0 e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t} \\ \ln(v) - \ln(v_0) = -\frac{B^2L^2}{mR}t & & \frac{v}{v_0} = e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t} & & \end{array}$$

On pourrait calculer la vitesse, mais on ne sait combien de temps cela prendra. On va donc intégrer une autre fois pour trouver la position du cadre en fonction du temps.

$$\begin{array}{ccccc} v = v_0 e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t} & & dx = v_0 e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}dt & & x = v_0 e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}\left(-\frac{mR}{B^2L^2}\right) + \text{Cste} \\ & \Longrightarrow & & \Longrightarrow & \\ \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t} & & \int dx = \int v_0 e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}dt & & x = -\frac{v_0 mR}{B^2L^2}e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t} + \text{Cste} \end{array}$$

À $t = 0$, la position est 0. On a donc

$$\begin{array}{ccc} x = -\frac{v_0 mR}{B^2L^2}e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t} + \text{Cste} & & 0 = -\frac{v_0 mR}{B^2L^2} + \text{Cste} \\ & \Longrightarrow & \\ 0 = -\frac{v_0 mR}{B^2L^2}e^{-\frac{B^2L^2}{mR}\cdot 0} + \text{Cste} & & \text{Cste} = -\frac{v_0 mR}{B^2L^2} \end{array}$$

La position en fonction du temps est donc

$$x = -\frac{v_0 mR}{B^2L^2}e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t} - \frac{v_0 mR}{B^2L^2} = \frac{v_0 mR}{B^2L^2}\left(1 - e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}\right)$$

Comme le cadre parcourt 10 cm en entrant dans le champ, on a

$$\begin{array}{c} x = \dfrac{v_0 mR}{B^2L^2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}\right) \\ 0{,}1 = \dfrac{10\times 0{,}1\times 0{,}02}{(2)^2\times(0{,}1)^2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}\right) \end{array} \implies \begin{array}{c} 0{,}1 = 0{,}5\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}\right) \\ \dfrac{1}{5} = 1-\mathrm{e}^{-\frac{B^2L^2}{mR}t} \end{array} \implies \mathrm{e}^{-\frac{B^2L^2}{mR}t} = \frac{4}{5}$$

On pourrait trouver le temps, mais ce n'est pas nécessaire puisque la vitesse est

$$v = v_0\mathrm{e}^{-\frac{B^2L^2}{mR}t} = 10\times\frac{4}{5} = 8\,\mathrm{m/s}$$

Reste à faire la sortie du champ. En sortant, la différence de potentiel induite est

$$\mathscr{E} = BLv$$

(même chose qu'en entrant, sauf que le flux diminue au lieu d'augmenter, ce qui change le signe)

Le courant induit est

$$I = \frac{BLv}{R}$$

Ce courant positif est maintenant dans le sens horaire. Il y a alors une force qui s'oppose à la vitesse sur la partie verticale à l'arrière du cadre. Cette force est encore

$$F_x = -\frac{B^2L^2v}{R}$$

Ce qui veut dire que l'accélération est encore

$$a_x = \frac{F_x}{m} = -\frac{B^2L^2v}{mR}$$

Avec la même accélération qu'à l'entrée, la solution est identique à ce qu'elle était en entrant dans le cadre

$$v = v_0\mathrm{e}^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}$$

Le déplacement est aussi donné par la même formule qu'en entrant

$$x = \frac{v_0 mR}{B^2L^2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}\right)$$

Comme ce déplacement est encore de 10 cm, on a

$$\begin{array}{c} x = \dfrac{v_0 mR}{B^2L^2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}\right) \\ 0{,}1 = \dfrac{8\times 0{,}1\times 0{,}02}{(2)^2\times(0{,}1)^2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}\right) \end{array} \implies \begin{array}{c} 0{,}1 = 0{,}4\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}\right) \\ \dfrac{1}{4} = 1-\mathrm{e}^{-\frac{B^2L^2}{mR}t} \end{array} \implies \mathrm{e}^{-\frac{B^2L^2}{mR}t} = \frac{3}{4}$$

La vitesse à la fin de la sortie est donc

$$v = v_0\mathrm{e}^{-\frac{B^2L^2}{mR}t} = 8\times\frac{3}{4} = 6\,\mathrm{m/s}$$

Cette page est intentionnellement laissée en blanc.

Le solénoïde montré sur la figure a une inductance de 200 mH et est traversé par un courant de 100 A. Le fil qui forme le solénoïde a une résistance de $0{,}05\,\Omega$. Quelle est la différence de potentiel entre les deux extrémités du solénoïde si le courant augmente au rythme de 50 A/s ?
Découvrez comment résoudre ce problème dans ce chapitre.

11. Solutions du chapitre 11

Exercice 1 :

(a) L'inductance mutuelle est

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{\ell}\pi r^2 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 300 \times 0{,}25}{25} \times \pi (0{,}02)^2 = 4{,}737 \times 10^{-5}\,\text{H}$$

(b) La différence de potentiel est

$$\mathscr{E}_2 = \left| -M\frac{dI_1}{dt} \right| = 4{,}737 \times 10^{-5} \times 250 = 0{,}011\,48\,\text{V}$$

(c) La différence de potentiel est

$$\mathscr{E}_1 = \left| -M\frac{dI_2}{dt} \right| = 4{,}737 \times 10^{-5} \times 150 = 0{,}007\,106\,\text{V}$$

Exercice 2 :

(a) L'inductance mutuelle est

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{\ell}\pi r^2 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 310 \times 4\,850}{4} \times \pi (0{,}06)^2 = 5{,}342 \times 10^{-3}\,\text{H}$$

(b) Le taux de variation du courant dans le solénoïde 2 est

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{d(80 \cdot \cos(500t))}{dt} = -80 \times 500 \times \sin(500t) = -40\,000 \sin(500t)$$

À $t = 0{,}12\,\text{s}$, ce taux est

$$\frac{dI_2}{dt} = -40\,000 \times 500 \sin(500 \times 0{,}12) = 12\,192\,\text{A/s}$$

On a donc

$$\mathscr{E}_2 = \left| -M\frac{dI_2}{dt} \right| = 5{,}342 \times 10^{-3} \times 12\,192 = 65{,}13\,\text{V}$$

Exercice 3 : Le taux de variation du courant est

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{d(50 \cdot \sin(400t))}{dt} = 50 \times 400 \cdot \cos(400t) = 20\,000 \cdot \cos(400t)$$

À $t = 0{,}1\,\mathrm{s}$, ce taux est

$$\frac{dI_1}{dt} = 20\,000 \cdot \cos(400 \times 0{,}1) = -13\,339\,\mathrm{A/s}$$

On a donc

$$\mathscr{E}_1 = \left| -M\frac{dI_2}{dt} \right| \qquad \longrightarrow \qquad 0{,}06 = M \times 13\,339 \qquad \longrightarrow \qquad M = 4{,}498 \times 10^{-6}\,\mathrm{H}$$

Exercice 4 :

(a) La valeur de l'inductance est

$$\mathscr{E} = \left| -L\frac{dI}{dt} \right| \qquad \longrightarrow \qquad 0{,}000\,86 = L \times 10 \qquad \longrightarrow \qquad L = 86\,\mu\mathrm{H}$$

On a donc

$$L = \mu_r \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{\ell} \longrightarrow 8{,}6 \times 10^{-5} = 200 \times \frac{4\pi \times 10^{-7} N^2 \pi (0{,}003)^2}{0{,}04} \longrightarrow N = 22$$

(b) Le champ magnétique est

$$B = \mu_r \frac{\mu_0 N I}{\ell} = 200 \times \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 22 \times 0{,}05}{0{,}04} = 0{,}006\,912\,\mathrm{T}$$

Exercice 5 :

(a) L'auto-inductance est

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{\ell} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times (13)^2 \times \pi \times (0{,}01)^2}{0{,}03} = 2{,}224 \times 10^{-6}\,\mathrm{H} = 2{,}224\,\mu\mathrm{H}$$

(b) La différence de potentiel est

$$\mathscr{E} = \left| -L\frac{dI}{dt} \right| = \left| 2{,}224 \times 10^{-6} \times 50 \right| = 1{,}112 \times 10^{-4}\,\mathrm{V} = 0{,}111\,2\,\mathrm{mV}$$

Exercice 6 :

(a) En allant dans le sens du courant, la différence de potentiel est

$$\Delta V = -L\frac{dI}{dt} \qquad \text{soit} \qquad -5\,\mathrm{V} = -L\frac{dI}{dt}$$

Si on veut obtenir une valeur de $-5\,\mathrm{V}$, il faudra que dI/dt soit positive. Le courant est donc en train de monter.

(b) La valeur de l'inductance est

$$-5 = -L\frac{dI}{dt} \qquad \longrightarrow \qquad -5 = -L \times 10 \qquad \longrightarrow \qquad L = 0{,}5\,\mathrm{H}$$

Exercice 7 : L'inductance est

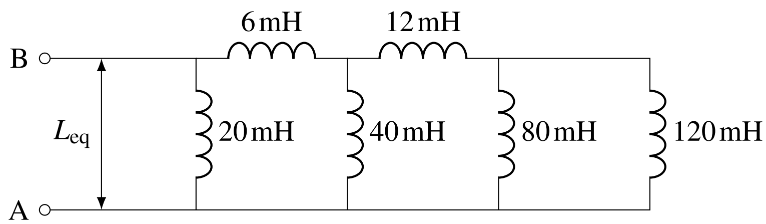
$$L = \mu_r \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{\ell} = 200 \frac{4\pi \times 10^{-7} \times (300)^2 \times \pi \times (0{,}06)^2}{0{,}3} = 0{,}852\,7\,\mathrm{H}$$

En allant dans le sens du courant, la différence de potentiel est, selon les lois de Kirchhoff.

$$\Delta V = -RI - L\frac{dI}{dt} = -0{,}12 \times 100 - 0{,}852\,7 \times (-50) = -12 + 42{,}64 = 30{,}64\,\mathrm{V}$$

Une valeur positive signifie que le potentiel augmente quand on traverse le solénoïde dans le sens de la trajectoire qu'on avait faite, qui était ici dans le sens du courant. Le potentiel est donc plus élevé du côté gauche du solénoïde.

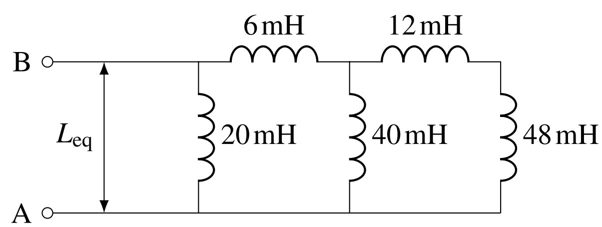
Exercice 8 : Les deux inducteurs de droite sont en série. Leur inductance équivalente est de $L_{eq1} = 120\,\mathrm{mH}$. On a alors le circuit suivant.



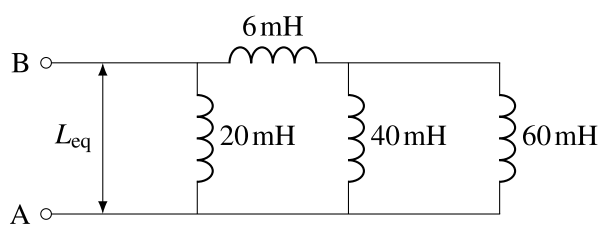
Cet inducteur de 120 mH est en parallèle avec l'inducteur de 80 mH. L'inductance équivalente est

$$\frac{1}{L_{eq2}} = \frac{1}{120} + \frac{1}{80}$$
$$L_{eq2} = 48\,\mathrm{mH}$$

On a maintenant le circuit suivant.



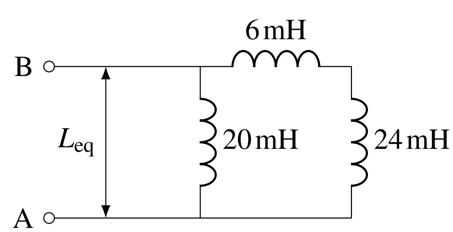
Les deux inducteurs de droite sont en série. Leur inductance équivalente est de $L_{eq3} = 60\,\mathrm{mH}$. On a alors le circuit suivant.



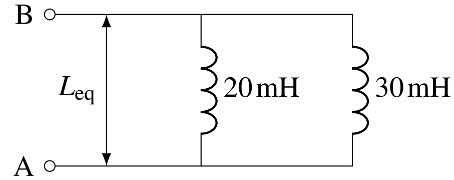
L'inducteur de 60 mH est en parallèle avec l'inducteur de 40 mH. L'inductance équivalente est

$$\frac{1}{L_{eq4}} = \frac{1}{60} + \frac{1}{40}$$
$$L_{eq4} = 24\,\mathrm{mH}$$

On a maintenant le circuit suivant.

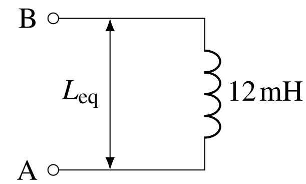


Les deux inducteurs de droite sont en série. Leur inductance équivalente est de $L_{eq5} = 30\,\mathrm{mH}$. On a alors le circuit suivant.



L'inducteur de 30 mH est maintenant en parallèle avec l'inducteur de 20 mH. L'inductance équivalente est

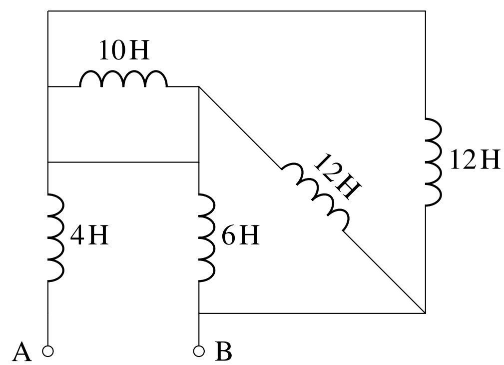
$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{30} + \frac{1}{20}$$
$$L_{eq} = 12\,\text{mH}$$



C'est notre réponse finale.

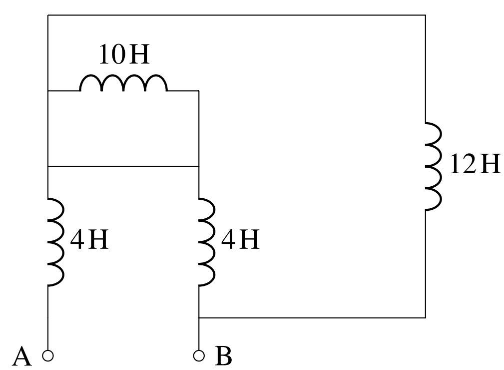
Exercice 9 :

Premièrement, les inducteurs de 3 H et 9 H sont en série. Avec une inductance équivalente de 12 H, on arrive au circuit suivant.

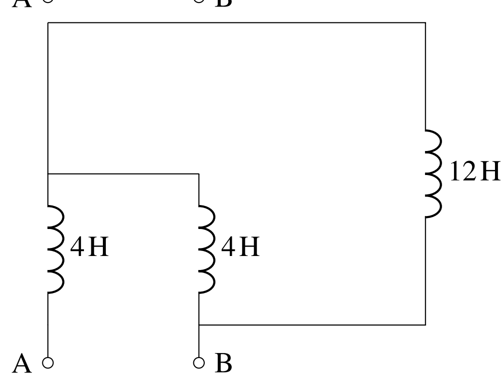


L'inducteur de 12 H sur le fil en diagonale est en parallèle avec l'inducteur de 6 H. L'inductance équivalente est

$$\frac{1}{L_{eq2}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6}$$
$$L_{eq2} = 4\,\text{mH}$$



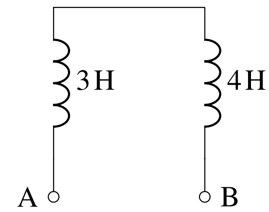
L'inducteur de 10 H étant court-circuité, on peut enlever la branche où se trouve cet inducteur pour arriver au circuit suivant.



L'inducteur de 12 H est en parallèle avec l'inducteur de 4 H à droite. L'inductance équivalente est

$$\frac{1}{L_{\text{eq3}}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4}$$

$$L_{\text{eq3}} = 3\,\text{mH}$$



L'inductance équivalente est donc de 7 H, somme des deux inductances en série.

Exercice 10 :

(a) L'énergie est

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}05 \times (5)^2 = 0{,}625\,\text{J}$$

(b) En allant dans le sens du courant, la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur est

$$\Delta V = -L\frac{dI}{dt} = -0{,}05 \times (-2) = 0{,}1\,\text{V}$$

Une réponse positive signifie que le potentiel augmente en suivant le courant. Comme le courant ressort avec plus de potentiel, l'inducteur fournit de l'énergie. La puissance est

$$P = \Delta V \cdot I = 0{,}1 \times 5 = 0{,}5\,\text{W}$$

Encore une fois, une réponse positive signifie que l'inducteur fournit de la puissance.

Exercice 11 : L'inductance est

$$L = \mu_r \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{\ell} = 200\frac{4\pi \times 10^{-7} \times (3\,000)^2 \times \pi \times (0{,}002)^2}{0{,}05} = 0{,}568\,5\,\text{H}$$

L'énergie est alors

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}568\,5 \times (10)^2 = 28{,}42\,\text{J}$$

Exercice 12 :

(a) La densité d'énergie est

$$u_{\text{B}} = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} \times (0{,}000\,05)^2 = 9{,}947 \times 10^{-4}\,\text{J/m}^2$$

(b) L'énergie est

$$U_{\text{B}} = u_{\text{B}} \times \text{volume} = 9{,}947 \times 10^{-4} \times (1\,000)^3 = 994\,718\,\text{J}$$

Exercice 13 : Avec une telle densité d'énergie, le champ doit être

$$u_{\text{B}} = \frac{1}{2\mu_0}B^2 \quad \longrightarrow \quad 1 = \frac{1}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} \cdot B^2 \quad \longrightarrow \quad B = 0{,}001\,585\,\text{T}$$

Le courant doit donc être le suivant.

$$B = \frac{\mu_0 N I}{\ell} \quad \longrightarrow \quad 0{,}001\,585 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 500 \times I}{0{,}05} \quad \longrightarrow \quad I = 0{,}126\,2\,\text{A}$$

Exercice 14 :

(a) À $t = 0{,}4\,\text{s}$, le courant est donc

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-Rt}{L}}\right) = \frac{50}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-2\times 0{,}4}{0{,}4}}\right) = 21{,}62\,\text{A}$$

(b) La différence de potentiel aux bornes de la résistance est

$$\Delta V_R = RI = 2 \times 21{,}62 = 43{,}23\,\text{V}$$

(c) Ainsi, la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur est

$$\Delta V_L = \Delta V_{\text{source}} - \Delta V_R = 50 - 43{,}23 = 6{,}77\,\text{V}$$

(d) On peut trouver le rythme d'augmentation du courant avec

$$\Delta V_L = \left|-L\frac{dI}{dt}\right| \qquad \longrightarrow \qquad 6{,}77 = 0{,}4 \cdot \frac{dI}{dt} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{dI}{dt} = 16{,}92\,\text{A/s}$$

(e) Le temps se trouve ainsi

$$\begin{aligned} I &= \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-Rt}{L}}\right) \\ 0{,}9\frac{\mathscr{E}}{R} &= \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-2\cdot t}{0{,}4}}\right) \\ 0{,}9 &= \left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-t}{0{,}2}}\right) \end{aligned} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{aligned} \mathrm{e}^{\frac{-t}{0{,}2}} &= 0{,}1 \\ \frac{-t}{0{,}2} &= \ln(0{,}1) \\ t &= -0{,}2 \times \ln(0{,}1) \\ t &= 0{,}460\,5\,\text{s} \end{aligned}$$

Exercice 15 :

(a) Le courant maximum est

$$I_{\max} = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{120}{8} = 15\,\text{A}$$

(b) L'inductance équivalente est de

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{200} + \frac{1}{300} \qquad \longrightarrow \qquad L_{\text{eq}} = 120\,\text{mH}$$

Le courant est donc

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-Rt}{L}}\right) = \frac{120}{8}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-8\times 0{,}02}{0{,}12}}\right) = 11{,}05\,\text{A}$$

(c) La puissance fournie par la pile est

$$P_{\text{source}} = \Delta V \cdot I = 120 \times 11{,}05 = 1\,325{,}5\,\text{W}$$

(d) La puissance dissipée en chaleur par la résistance est

$$P_R = RI^2 = 8 \times (11{,}05)^2 = 976{,}1\,\text{W}$$

(e) Puisque la source fournie par pile est de $1\,325{,}5\,\text{W}$ et que la résistance en dissipe $976{,}1\,\text{W}$, la puissance qu'il reste pour les inducteurs est

$$P_L = P_{\text{source}} - P_R = 1\,325{,}5 - 976{,}1 = 349{,}4\,\text{W}$$

Exercice 16 : On a

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$$
$$0{,}4\frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$$
$$0{,}4 = \left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$$

$$\longrightarrow$$

$$e^{\frac{-Rt}{L}} = 0{,}6$$
$$\frac{-Rt}{L} = \ln(0{,}6)$$
$$\frac{-40 \times 1}{L} = \ln(0{,}6)$$
$$L = 78{,}3\,\mathrm{H}$$

Exercice 17 : On a

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$$
$$0{,}1\frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-R\cdot 4}{L}}\right)$$
$$0{,}1 = \left(1 - e^{\frac{-R\cdot 4}{L}}\right)$$

$$\longrightarrow$$

$$e^{\frac{-R\cdot 4}{L}} = 0{,}9$$
$$\frac{-R \cdot 4}{L} = \ln(0{,}9)$$
$$\frac{R}{L} = \frac{-\ln(0{,}9)}{4}$$
$$\frac{R}{L} = 0{,}026\,34\,\mathrm{s}^{-1}$$

Pour 95 % du courant maximum, on aura donc

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$$
$$0{,}95\frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{-0{,}026\,34\cdot t}\right)$$
$$0{,}95 = \left(1 - e^{-0{,}263\,4\cdot t}\right)$$

$$\longrightarrow$$

$$e^{-0{,}263\,4\cdot t} = 0{,}05$$
$$-0{,}263\,4 \cdot t = \ln(0{,}05)$$
$$t = \frac{\ln(0{,}05)}{-0{,}263\,4}$$
$$t = 113{,}7\,\mathrm{s}$$

Exercice 18 :

(a) Au bout d'un temps très long, le courant dans le circuit (la grande maille) est

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{50}{100} = 0{,}5\,\mathrm{A}$$

Ce sera le courant initial de la maille de droite quand on mettra l'interrupteur à la position *b*. Les deux résisteurs dans le circuit possèdent une résistance une résistance équivalente de 140 Ω. Au bout de 0,5 ms, le courant est maintenant

$$I = I_0 e^{\frac{-Rt}{L}} = 0{,}5 \cdot e^{\frac{-140 \times 0{,}000\,5}{0{,}1}} = 0{,}248\,3\,\mathrm{A}$$

(b) La différence de potentiel aux bornes de la résistance équivalente est

$$\Delta V = RI = 140 \times 0{,}248\,3 = 34{,}76\,\mathrm{V}$$

Puisque l'inducteur est en parallèle avec la résistance équivalente, la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur est aussi de 34,76 V.

(c) On trouve le temps avec

$$I = I_0 e^{\frac{-Rt}{L}}$$
$$0{,}1 = 0{,}5 e^{\frac{-140\cdot t}{0{,}1}}$$
$$0{,}2 = e^{\frac{-140\cdot t}{0{,}1}}$$

$$\longrightarrow$$

$$\ln(0{,}2) = \frac{140 \cdot t}{0{,}1}$$
$$t = \frac{-0{,}1 \times \ln(0{,}2)}{0{,}1}$$
$$t = 1{,}15 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} = 1{,}15\,\mathrm{ms}$$

Exercice 19 :

(a) Le courant va monter pendant 1 ms. À la fin de la période de montée, le courant est

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right) = \frac{240}{50}\frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-50\times 0{,}001}{0{,}02}}\right) = 4{,}406\,\mathrm{A}$$

On aura ce courant comme courant initial pendant la phase de baisse du courant, qui commence quand on met l'interrupteur à la position 2. Cette phase de baisse dure 0,5 ms. Après 0,5 ms de baisse, le courant est

$$I = I_0 e^{\frac{-Rt}{L}} = 4{,}406 \cdot e^{\frac{50\times 0{,}000\,5}{0{,}02}} = 1{,}262\,\mathrm{A}$$

(b) L'énergie dissipée par la résistance correspond à l'énergie perdue par l'inducteur pendant la période de baisse du courant. Au début de cette phase, l'énergie de l'inducteur est

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}02 \times (4{,}406)^2 = 0{,}194\,13\,\mathrm{J}$$

0,5 ms plus tard l'énergie est

$$U' = \frac{1}{2}LI'^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}02 \times (1{,}262)^2 = 0{,}015\,93\,\mathrm{J}$$

La perte d'énergie est donc

$$\Delta U = U' - U = 0{,}015\,93 - 0{,}194\,13 = -0{,}178\,2\,\mathrm{J}$$

Cette perte d'énergie se fait en chaleur dans les résistances. L'énergie dissipée est donc de 0,178 2 J.

Exercice 20 :

(a) L'inductance est

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{\ell} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times (200)^2 \times \pi \times (0{,}025)^2}{0{,}2} = 4{,}935 \times 10^{-4}\,\mathrm{H}$$

La résistance du fil est

$$R = \rho\frac{\ell}{\pi r^2} = 1{,}678 \times 10^{-8} \times \frac{200 \times 2\pi \times 0{,}025}{\pi \times (0{,}001)^2} = 0{,}167\,8\,\Omega$$

Le courant sera donc de

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right) = \frac{100}{0{,}167\,8}\left(1 - e^{\frac{-0{,}167\,8\times 0{,}001}{4{,}935\times 10^{-4}}}\right) = 171{,}8\,\mathrm{A}$$

Le champ est donc

$$B = \frac{\mu_0 N I}{\ell} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 200 \times 171{,}78}{0{,}2} = 0{,}215\,9\,\mathrm{T}$$

(b) Puisque le solénoïde est en parallèle avec la source, la différence de potentiel aux bornes du solénoïde doit être de 100 V. (Vous pouvez aussi vérifier dans vos temps libres que $-RI - L\frac{dI}{dt}$ donne aussi -100 V.)

Exercice 21 :

(a) Trouvons premièrement la fréquence angulaire

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}04 \times 100 \times 10^{-6}}} = 500\,\text{rad/s}$$

La fréquence est donc

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{500}{2\pi} = 79{,}58\,\text{Hz}$$

(b) Le courant maximal est égal à l'amplitude

$$I_0 = Q_0\omega_0 = 20 \times 10^{-6} \times 500 = 0{,}01\,\text{A}$$

(c) Le courant est

$$I = -Q_0\omega_0 \sin(\omega_0 t) = -0{,}01\sin(500 \times 0{,}01) = -4{,}794 \times 10^{-3}\,\text{A} = 4{,}794\,\text{mA}$$

Le courant est donc de 4,794 mA.

Exercice 22 :

(a) Initialement, toute l'énergie dans le condensateur. L'énergie du système est donc égale à l'énergie initiale du condensateur.

$$U = \frac{1}{2}C\Delta V_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}03 \times (100)^2 = 150\,\text{J}$$

(b) On a

$$150 = U_C + U_L$$

Puisqu'on veut que les deux énergies soient égales, on doit avoir $U_C = U_L$. On a donc

$$150 = U_C + U_L \qquad \text{soit} \qquad U_C = 75\,\text{J}$$

La charge du condensateur doit donc être de

$$75 = \frac{Q^2}{2C} \qquad \longrightarrow \qquad 75 = \frac{Q^2}{2 \times 0{,}03} \qquad \longrightarrow \qquad Q = \pm 2{,}121\,\text{C}$$

(c) La charge initiale est

$$Q_0 = C\Delta V_0 = 0{,}03 \times 100 = 3\,\text{C}$$

(d) La fréquence angulaire est

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}012 \times 0{,}03}} = 52{,}70\,\text{rad/s}$$

Si la charge est 2,121 C, on a (ne pas oubliez qu'il y a 2 réponses à arccos qui sont la réponse donnée par la calculatrice et − la réponse donnée par la calculatrice.)

$$Q = Q_0\cos(\omega_0 t)$$
$$2{,}121 = 3 \cdot \cos(52{,}70 \cdot t)$$
$$0{,}7071 = \cos(52{,}70 \cdot t)$$

$$\frac{\pi}{4} = 52{,}70 \cdot t_1 \qquad\qquad -\frac{\pi}{4} = 52{,}70 \cdot t_2$$
$$t_1 = 0{,}0149\,\text{s} = 14{,}9\,\text{ms} \qquad t_2 = -0{,}0149\,\text{s} = -14{,}9\,\text{ms}$$

Comme la même configuration se répète à toutes les périodes, on ramène la 2^e^ réponse positive en ajoutant la période. La période étant

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{52{,}70} = 0{,}119\,2\,\mathrm{s} = 119{,}2\,\mathrm{ms}$$

Nos deux premières réponses sont

$$t_1 = 14{,}9\,\mathrm{ms} \qquad \text{et} \qquad t_2 = -14{,}9\,\mathrm{ms} + 119{,}2\,\mathrm{ms} = 104{,}3\,\mathrm{ms}$$

Si la charge est $-2{,}121$ C, on a

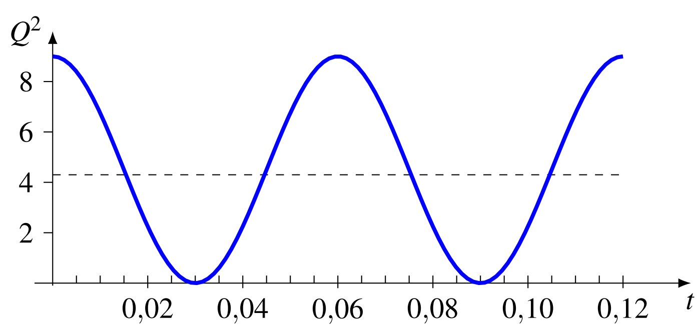
$$\begin{aligned} Q &= Q_0 \cos(\omega_0 t) \\ -2{,}121 &= 3 \cdot \cos(52{,}70 \cdot t) \\ -0{,}707\,1 &= \cos(52{,}70 \cdot t) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} \frac{3\pi}{4} = 52{,}70 \cdot t_1 & -\frac{3\pi}{4} = 52{,}70 \cdot t_2 \\ t_3 = 0{,}044\,71\,\mathrm{s} = 44{,}71\,\mathrm{ms} & t_4 = -0{,}044\,71\,\mathrm{s} = -44{,}71\,\mathrm{ms} \end{array}$$

Comme la même configuration se répète à toutes les périodes, on ramène la 2^e^ réponse positive en ajoutant la période. Nos deux premières sont donc

$$t_3 = 44{,}7\,\mathrm{ms} \qquad \text{et} \qquad t_4 = -44{,}71\,\mathrm{ms} + 119{,}2\,\mathrm{ms} = 74{,}5\,\mathrm{ms}$$

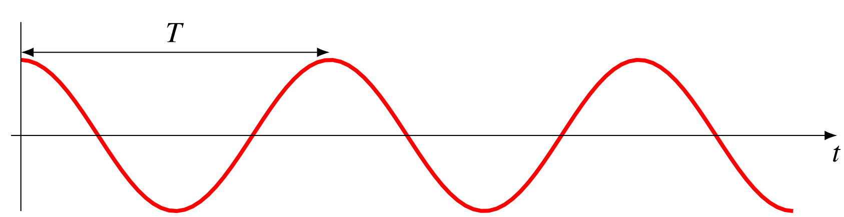
On peut comprendre pourquoi on a ces 4 valeurs en examinant le graphique de la fonction $Q^2 = 9\cos^2(52{,}70 \cdot t)$ sur un cycle.



La ligne pointillé montre $Q^2 = 4{,}32\,\mathrm{C}^2$. On voit qu'on a cette valeur 4 fois par cycle.

La première fois est donc à $t = 14{,}9$ ms.

Exercice 23 : Si on passe d'un condensateur plein à un condensateur vide, c'est qu'il s'est écoulé ¼ de période.



La valeur de l'inductance se trouve à partir de

$$t = \frac{T}{4} \qquad t = \frac{1}{4} \cdot 2\pi\sqrt{LC} \qquad \text{soit} \qquad t = \frac{\pi}{2}\sqrt{LC} \qquad 0{,}001 = \frac{\pi}{2}\sqrt{L \cdot 500 \times 10^{-6}} \qquad \text{soit} \qquad L = 8{,}106 \times 10^{-4}\,\text{H}$$

Exercice 24 :

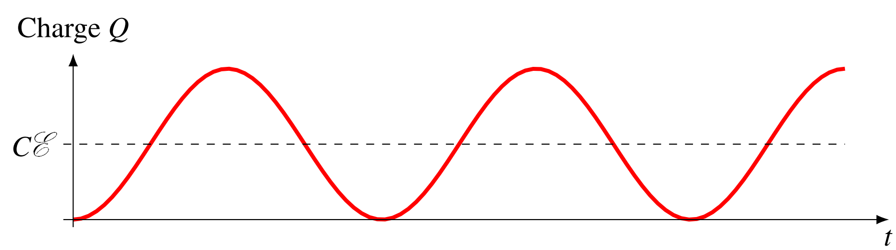
(a) Trouvons premièrement la fréquence angulaire

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}04 \times 100 \times 10^{-6}}} = 500\,\text{rad/s}$$

La fréquence est donc

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{500}{2\pi} = 79{,}58\,\text{Hz}$$

(b) On atteint la charge maximale au bout d'un demi-cycle.



Puisqu'il s'agit d'une oscillation ayant une amplitude égale à $C\mathscr{E}$ centrée autour de $C\mathscr{E}$, la valeur maximale doit être de $2C\mathscr{E}$. La charge maximale est donc de

$$Q_{\text{max}} = 2C\mathscr{E} = 2 \times 100 \times 10^{-6} \times 20 = 4 \times 10^{-3}\,\text{C} = 4\,\text{mC}$$

(c) La charge est

$$I = C\mathscr{E}\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

La valeur maximale est donc

$$I_0 = C\mathscr{E}\omega_0 = 100 \times 10^{-6} \times 20 \times 500 = 1\,\text{A}$$

Exercice 25 :

(a) On a

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{10}{2 \times 5} = 1\,\text{s}^{-1}$$

et

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2} = \sqrt{\frac{1}{5 \times 0{,}02} - (1)^2} = 3\,\text{rad/s}$$

La période est donc

$$T = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{3} = 2{,}094\,\text{s}$$

(b) La charge est

$$Q = Q_0 e^{-\alpha t}\left(\cos\omega' t + \frac{\alpha}{\omega'}\sin\omega' t\right) = 0{,}4e^{-1\times 3}\left(\cos(3\times 3) + \frac{1}{3}\sin(3 \times 3)\right) = -0{,}01541\,\text{C}$$

(c) Le courant est

$$I = -\frac{Q_0}{\omega' LC} e^{-\alpha t} \sin \omega' t = -\frac{0{,}4}{3 \times 5 \times 0{,}02} e^{-1 \times 3} \sin(3 \times 3) = -0{,}027\,36\,\mathrm{A}$$

Exercice 26 : Si on veut qu'il y ait des oscillations, on doit avoir

$$\begin{aligned} \frac{1}{LC} &> \alpha^2 \\ \frac{1}{LC} &> \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \\ \frac{1}{LC} &> \frac{R^2}{4L^2} \end{aligned} \qquad \text{et donc} \qquad \begin{aligned} \frac{4L}{C} &> R^2 \\ \frac{4 \times 0{,}4}{50 \times 10^{-6}} &> R^2 \\ 32\,000 &> R^2 \\ 178{,}9\,\Omega &> R \end{aligned}$$

La résistance doit donc être inférieure à 178,9 Ω.

Exercice 27 :

(a) On a

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{1}{2 \times 0{,}5} = 1\,\mathrm{s}^{-1}$$

et

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2} = \sqrt{\frac{1}{0{,}5 \times 0{,}04} - (1)^2} = 7\,\mathrm{rad/s}$$

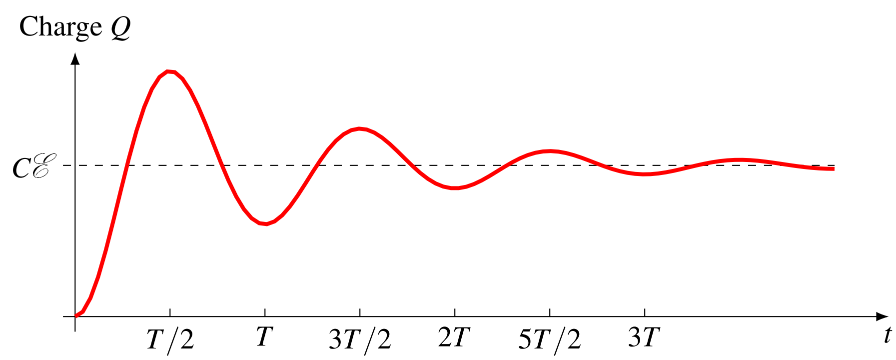
La période est donc

$$T = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{7} = 0{,}897\,6\,\mathrm{s}$$

(b) La charge est

$$\begin{aligned} Q &= Q_0 \left(1 - e^{-\alpha t} \left(\cos \omega' t + \frac{\alpha}{\omega'} \sin \omega' t\right)\right) \\ &= 40 \times 10^{-3} \times 20 \times \left(1 - e^{-1 \times 0{,}2} \left(\cos(7 \times 0{,}2) + \frac{1}{7} \sin(7 \times 0{,}2)\right)\right) = 0{,}596\,5\,\mathrm{C} \end{aligned}$$

(c) Voici le graphique de la charge en fonction du temps.



Au bout d'un temps très long, la valeur de la charge se stabilise à $C\mathscr{E}$. La charge est donc

$$Q = C\mathscr{E} = 40 \times 10^{-3} \times 20 = 0{,}8\,\mathrm{C}$$

(d) Le maximum de la charge se produit une demi-période après le début de la charge, donc à $t = 0{,}448\,8\,\mathrm{s}$. À ce moment, le sinus vaut 0 et le cosinus vaut -1.

$$Q = Q_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\cos\omega' t + \frac{\alpha}{\omega'}\sin\omega' t\right)\right) = 40\times 10^{-3}\left(1 - \mathrm{e}^{-1\times 0{,}448\,8}(-1+0)\right) = 1{,}311\,\mathrm{C}$$

(e) La formule du courant est

$$I = \frac{\mathscr{E}}{\omega' L}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega' t$$

Au maximum du courant, on a $dI/dt = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= 0 \\ \frac{d\left(\frac{\mathscr{E}}{\omega' L}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega' t\right)}{dt} &= 0 \\ \frac{\mathscr{E}}{\omega' L}\left(-\alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega' t + \mathrm{e}^{-\alpha t}\omega'\cos\omega' t\right) &= 0 \\ -\alpha\sin\omega' t + \omega'\cos\omega' t &= 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \alpha\sin\omega' t &= \alpha\cos\omega' t \\ \tan\omega' t &= \frac{\omega'}{\alpha} \\ \tan 7t &= 7 \\ 7t &= 1{,}428\,9 + n\pi \\ t &= 0{,}204\,13\,\mathrm{s} + n\frac{\pi}{7} \end{aligned}$$

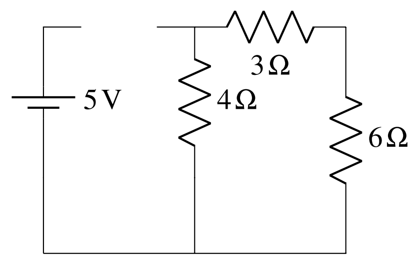
La première réponse positive est $t = 0{,}204\,13\,\mathrm{s}$.

(f) À ce moment, le courant

$$I = \frac{\mathscr{E}}{\omega' L}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega' t = \frac{20}{7\times 0{,}5}\mathrm{e}^{-1\times 0{,}204\,13}\sin(7\times 0{,}204\,13) = 4{,}612\,\mathrm{A}$$

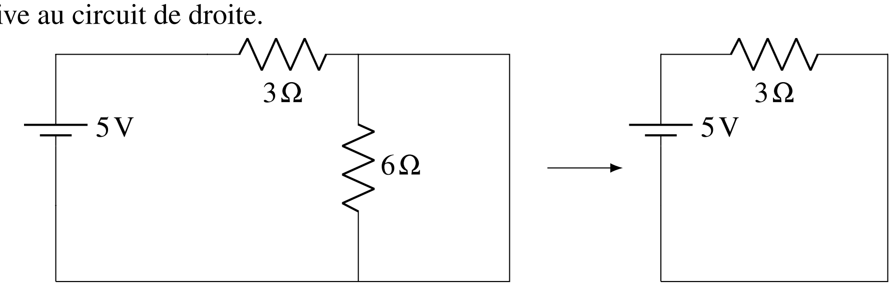
Exercice 28 :

(a) À $t = 0$, les inducteurs bloquent le courant. Comme il y a un inducteur sur la branche sur laquelle on retrouve la source, le courant fourni par la source est donc nul.



(b) À $t = \infty$, les condensateurs bloquent le courant et les inducteurs n'ont plus d'effet. On enlève donc les branches avec des condensateurs et on remplace les inducteurs par des fils. On a alors le circuit de gauche.

Comme la résistance de $6\,\Omega$ est court-circuitée, on enlève la branche de cette résistance et on arrive au circuit de droite.

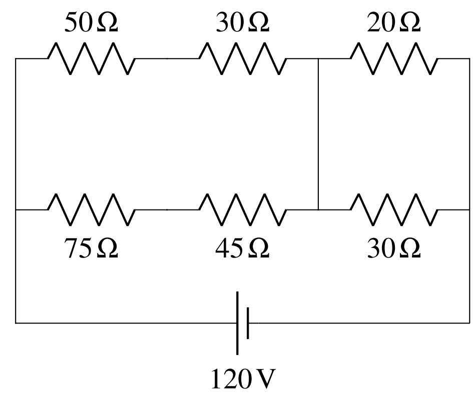


Le courant est donc

$$I = \frac{5}{3} = 1{,}667\,\mathrm{A}$$

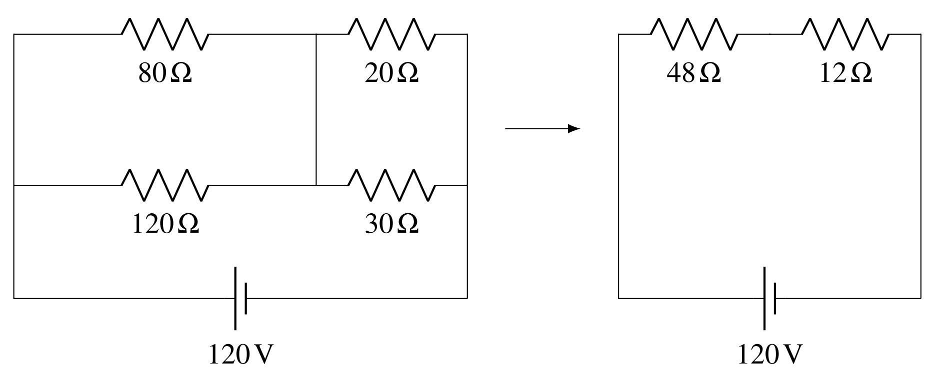
Exercice 29 :

(a) À $t = 0$, les inducteurs bloquent le courant et es condensateurs n'ont pas d'effet. On enlève donc les branches avec des inducteurs et on remplace les condensateurs par des fils. On a alors le circuit suivant.



Ce qui donne le circuit équivalent de gauche.

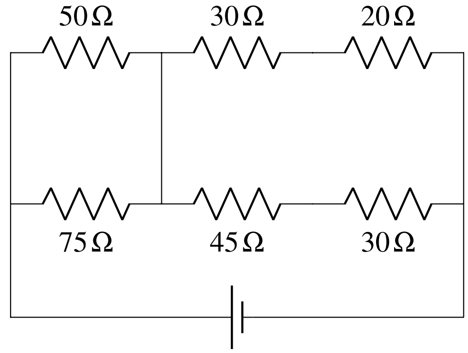
En prenant les résistances en parallèle équivalentes, on arrive au circuit équivalent de droite.



La résistance équivalente étant donc de 60 Ω, le courant est

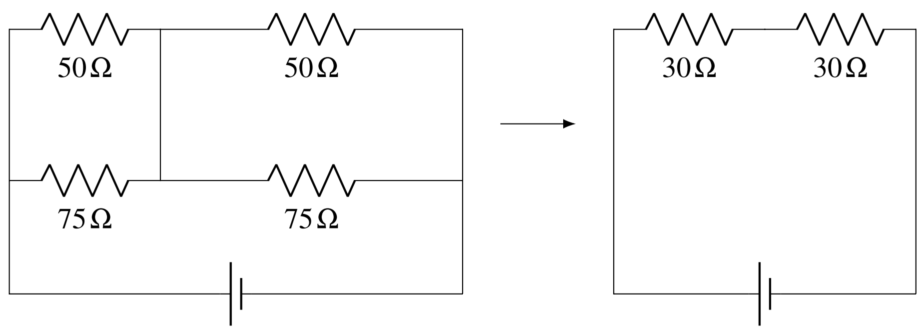
$$I = \frac{120}{60} = 2\,\mathrm{A}$$

(b) À $t = \infty$, les condensateurs bloquent le courant et les inducteurs n'ont plus d'effet. On enlève donc les branches avec des condensateurs et on remplace les inducteurs par des fils. On a alors le circuit suivant.



Ce qui donne le circuit équivalent de gauche.

En prenant les résistances en parallèle équivalentes, on arrive au circuit équivalent de droite.



La résistance équivalente étant donc de 60 Ω, le courant est

$$I = \frac{120}{60} = 2\,\mathrm{A}$$

Cette page est intentionnellement laissée en blanc.

Pourquoi ces pylônes transportent-ils 3 fils ?
Découvrez la réponse à cette question dans ce chapitre.

12. Solutions du chapitre 12

Exercice 1 :

(a) L'impédance étant de $60\,\Omega$, le courant efficace est

$$I = \frac{\Delta V}{Z} = \frac{240}{60} = 4\,\text{A}$$

(b) L'amplitude du courant est

$$i_0 = \sqrt{2} \cdot I = \sqrt{2} \times 4 = 5{,}657\,\text{A}$$

(c) L'amplitude de la différence de potentiel est

$$\Delta v_0 = \sqrt{2} \cdot \Delta V = \sqrt{2} \times 240 = 339{,}4\,\text{V}$$

(d) La puissance moyenne est

$$P = \Delta V \cdot I = 240 \times 4 = 960\,\text{W}$$

(e) La puissance dissipée par la résistance est

$$P_R = \frac{(\Delta V)^2}{R} = \frac{(300)^2}{60} = 1\,500\,\text{W}$$

Exercice 2 :

(a) L'impédance est

$$Z = \omega L = 2\pi \times 100 \times 0{,}04 = 25{,}13\,\Omega$$

Le courant efficace est

$$I = \frac{\Delta V}{Z_L} = \frac{360}{25{,}13} = 14{,}32\,\text{A}$$

L'amplitude du courant est

$$i_0 = \sqrt{2} \cdot I = \sqrt{2} \times 14{,}32 = 20{,}26\,\text{A}$$

(b) Le déphasage étant de $\pi/2$, On trouve que

$$\Delta t = \frac{\phi}{\omega} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi \times 100} = 2{,}5 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} = 2{,}5\,\mathrm{ms}$$

Comme la valeur est positive, le potentiel devance le courant.

(c) Avec une valeur efficace de 360 V, l'amplitude de la différence de potentiel est

$$\Delta v_0 = \sqrt{2} \cdot \Delta V = \sqrt{2} \times 360 = 509{,}1\,\mathrm{V}$$

La différence de potentiel en fonction du temps dans ce circuit est donc

$$\Delta v = 509{,}1 \sin\left(200\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Quand on a 200 V, on a

$$200 = 509{,}1 \sin\left(200\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{soit} \qquad 0{,}392\,3 = \sin\left(200\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Il y a deux réponses à l'arcsinus

$$\begin{aligned} 0{,}403\,7 &= 200\pi \cdot t + \frac{\pi}{2} \\ t &= -1{,}857 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} 2{,}738 &= 200\pi \cdot t + \frac{\pi}{2} \\ t &= 1{,}857 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

À ces moments, le courant est

$$\begin{aligned} i = i_0 \sin\left(200\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) &= 20{,}26 \sin(200 \cdot \pi t) \\ &= 20{,}26 \sin(200\pi \times (\pm 1{,}857 \times 10^{-3})) = \pm 18{,}63\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

(d) La puissance est de 0 W.

(e) La puissance est

$$P = \Delta v \cdot i = 200 \times (\pm 18{,}63) = \pm 3\,726\,\mathrm{W}$$

(f) L'énergie maximale est

$$U_{\max} = \frac{1}{2} L I_{\max}^2 = \frac{1}{2} L i_0^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}04 \times (20{,}26)^2 = 8{,}207\,\mathrm{J}$$

Exercice 3 : L'amplitude du courant est

$$i_0 = \sqrt{2} \cdot I = \sqrt{2} \times 1 = 1{,}414\,\mathrm{A}$$

L'impédance est alors

$$Z = \frac{\Delta v_0}{i_0} = \frac{80}{1{,}414} = 56{,}57\,\Omega$$

On doit donc avoir

$$Z_L = \omega L \qquad \longrightarrow \qquad 56{,}57 = 2\pi \times 0{,}2 \qquad \longrightarrow \qquad f = 45{,}02\,\mathrm{Hz}$$

Exercice 4 :

(a) L'impédance est

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \times 100 \times 20 \times 10^{-6}} = 79{,}58\,\Omega$$

Le courant efficace est

$$I = \frac{\Delta V}{Z_C} = \frac{60}{79{,}58} = 0{,}754\,0\,\text{A}$$

L'amplitude du courant est

$$i_0 = \sqrt{2} \cdot I = \sqrt{2} \times 0{,}754\,0 = 1{,}066\,\text{A}$$

(b) Le déphasage étant de $-\pi/2$, on trouve que

$$\Delta t = \frac{\phi}{\omega} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{2\pi \times 100} = -2{,}5 \times 10^{-3}\,\text{s} = -2{,}5\,\text{ms}$$

Comme la valeur est négative, le potentiel est en retard sur le courant.

(c) Avec une valeur efficace de 60 V, l'amplitude de la différence de potentiel est

$$\Delta v_0 = \sqrt{2} \cdot \Delta V = \sqrt{2} \times 60 = 84{,}85\,\text{V}$$

La différence de potentiel en fonction du temps dans ce circuit est donc

$$\Delta v = 84{,}85 \sin\left(200\pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Quand on a 40 V, on a

$$40 = 84{,}85 \sin\left(200\pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{soit} \qquad 0{,}471\,4 = \sin\left(200\pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Il y a deux réponses à l'arcsinus.

$$\begin{aligned} 0{,}490\,9 &= 200\pi \cdot t - \frac{\pi}{2} \\ t &= 3{,}281 \times 10^{-3}\,\text{s} \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} 2{,}651 &= 200\pi \cdot t - \frac{\pi}{2} \\ t &= 6{,}719 \times 10^{-3}\,\text{s} \end{aligned}$$

À ces moments, le courant est

$$\begin{aligned} i &= i_0 \sin(200\pi \cdot t) \\ &= 1{,}066 \sin(200\pi \cdot t) \\ &= 1{,}066 \sin(200\pi \times (3{,}281 \times 10^{-3})) \\ &= 0{,}940\,4\,\text{A} \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} i &= i_0 \sin(200\pi \cdot t) \\ &= 1{,}066 \sin(200\pi \cdot t) \\ &= 1{,}066 \sin(200\pi \times (6{,}719 \times 10^{-3})) \\ &= -0{,}940\,4\,\text{A} \end{aligned}$$

Le courant est donc de 0,940 4 A (dans un sens ou dans l'autre).

(d) La puissance est 0 W.

(e) La puissance est

$$P = \Delta v \cdot i = 40 \times (\pm 0{,}940\,4) = \pm 37{,}62\,\text{W}$$

(f) La charge maximale est

$$Q_{\max} = C\Delta V_{\max} = C\Delta v_0 = 20 \times 10^{-6} \times 84{,}85 = 1{,}697 \times 10^{-3}\,\text{F} = 1\,697\,\mu\text{F}$$

Exercice 5 : L'impédance est

$$Z = \frac{\Delta V}{I} = \frac{400}{0{,}1} = 4\,000\,\Omega$$

On doit donc avoir

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} \qquad \longrightarrow \qquad 4\,000 = \frac{1}{2\pi \times 200 \times C} \qquad \longrightarrow \qquad C = 331{,}6\,\text{nF}$$

Exercice 6 :

(a) On a

$$Z_L = \omega L = 2\pi \times 180 \times 0{,}2 = 222{,}6\,\Omega$$
$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \times 180 \times 10 \times 10^{-6}} = 88{,}42\,\Omega$$

L'impédance est donc

$$Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{(50)^2 + (226{,}2 - 88{,}42)^2} = 146{,}6\,\Omega$$

Le courant efficace est

$$I = \frac{\Delta V}{Z} = \frac{200}{146{,}6} = 1{,}365\,\text{A}$$

(b) Le déphasage est

$$\tan\phi = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \frac{226{,}2 - 88{,}42}{50} = 2{,}755 \qquad \text{soit} \qquad \phi = 1{,}223\,\text{rad}$$

L'écart de temps est

$$\Delta t = \frac{\phi}{\omega} = \frac{1{,}223}{2\pi \times 180} = 1{,}081 \times 10^{-3}\,\text{s} = 1{,}081\,\text{ms}$$

Le potentiel devance le courant de 1,081 ms.

(c) Avec une valeur efficace de 200 V, l'amplitude de la différence de potentiel est

$$\Delta v_0 = \sqrt{2} \cdot \Delta V = \sqrt{2} \times 200 = 282{,}4\,\text{V}$$

La différence de potentiel en fonction du temps dans ce circuit est donc

$$\Delta v = 282{,}8 \sin(360\pi \cdot t + 1{,}223)$$

Quand on a 120 V, on a

$$120 = 282{,}8 \sin(360\pi \cdot t + 1{,}223) \qquad \text{soit} \qquad 0{,}424\,3 = \sin(360\pi \cdot t + 1{,}223)$$

Il y a deux réponses à l'arcsinus.

$$\begin{aligned} 0{,}438\,1 &= 360\pi \cdot t + 1{,}223 \\ t &= -6{,}940 \times 10^{-4}\,\text{s} \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} 2{,}703 &= 360\pi \cdot t + 1{,}223 \\ t &= 1{,}309 \times 10^{-3}\,\text{s} \end{aligned}$$

À ces moments, le courant est

$$\begin{aligned} i &= i_0 \sin(360\pi \cdot t) \\ &= 1{,}365 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(360\pi \cdot t) \\ &= 1{,}930 \sin(360\pi \times (-6{,}940 \times 10^{-4})) \\ &= -1{,}363\,\text{A} \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} i &= i_0 \sin(360\pi \cdot t) \\ &= 1{,}365 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(360\pi \cdot t) \\ &= 1{,}930 \sin(360\pi \times (1{,}309 \times 10^{-3})) \\ &= 1{,}922\,\text{A} \end{aligned}$$

(d) La puissance est

$$P = RI^2 = 50 \times (1{,}365)^2 = 93{,}1\,\mathrm{W}$$

Exercice 7 : On a

$$Z_L = \omega L = 200 \times 0{,}5 = 100\,\Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{200 \times 20 \times 10^{-6}} = 250\,\Omega$$

L'impédance est donc

$$Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{(40)^2 + (100 - 250)^2} = 155{,}2\,\Omega$$

L'amplitude de la différence de potentiel est donc

$$\Delta v_0 = Z i_0 = 155{,}2 \times 0{,}32 = 49{,}68\,\mathrm{V}$$

Le déphasage est

$$\tan\phi = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \frac{100 - 250}{40} = -3{,}75 \qquad \text{soit} \qquad \phi = -1{,}310\,\mathrm{rad}$$

La formule du potentiel est donc

$$\Delta v = \Delta v_0 \sin(\omega t + \phi) = 49{,}68 \sin(200t - 1{,}310)$$

Exercice 8 :

(a) L'impédance est

$$Z = \frac{\Delta v_0}{i_0} = \frac{60}{0{,}5} = 120\,\Omega$$

(b) On a

$$\cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{72}{120} = 0{,}6 \qquad \text{soit} \qquad \phi = \pm 0{,}927\,3\,\mathrm{rad}$$

Comme on dit que le courant devance le potentiel, on doit prendre la valeur négative. On aurait également pu faire

$$Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} \quad \longrightarrow \quad 120 = \sqrt{(72)^2 + (Z_L - Z_C)^2} \quad \longrightarrow \quad Z_L - Z_C = \pm 96\,\Omega$$

On avait alors

$$\tan\phi = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \frac{\pm 96}{72} = \frac{\pm 4}{3} \qquad \text{soit} \qquad \phi = \pm 0{,}927\,3$$

Comme on dit que le courant devance le potentiel, on doit prendre la valeur négative.

(c) La puissance est

$$P = \frac{\Delta v_0 \cdot i_0}{2} \cos\phi = \frac{60 \times 0{,}5}{2} \cos(-0{,}927\,3) = 9\,\mathrm{W}$$

(d) On a

$$Z_L - Z_C = -96 \qquad \qquad 200 \times 0{,}2 - \frac{1}{200 \times C} = -96$$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = -96 \qquad \text{et donc} \qquad C = 3{,}676 \times 10^{-5}\,\mathrm{F} = 36{,}76\,\mu\mathrm{F}$$

Exercice 9 :

(a) Si on veut le plus grand courant efficace, on doit être à la fréquence de résonance. On a donc

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0{,}05 \times 50 \times 10^{-6}}} = 100{,}7\,\mathrm{Hz}$$

(b) À la fréquence de résonance, l'impédance est

$$Z = R = 100\,\Omega$$

Le courant efficace est donc

$$I = \frac{\Delta V}{Z} = \frac{40}{100} = 0{,}4\,\mathrm{A}$$

(c) Si on veut que le courant efficace soit de 0,1 A, l'impédance doit être

$$Z = \frac{\Delta V}{I} = \frac{40}{0{,}1} = 400\,\Omega$$

On a donc

$$Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} \quad \longrightarrow \quad 400 = \sqrt{(100)^2 + (Z_L - Z_C)^2} \quad \longrightarrow \quad Z_L - Z_C = \pm 387{,}3\,\Omega$$

Avec la valeur positive de $Z_L - Z_C$, on a

$$\begin{aligned} Z_L - Z_C &= 387{,}3\,\Omega \\ \omega L - \frac{1}{\omega C} &= 387{,}3 \\ \omega \times 0{,}05 - \frac{1}{\omega \times 50 \times 10^{-6}} &= 387{,}3 \end{aligned} \qquad \text{soit} \qquad \begin{aligned} \omega^2 \times 0{,}05 - \frac{1}{50 \times 10^{-6}} &= \omega \times 387{,}3 \\ \omega^2 \times 0{,}05 - 20\,000 &= \omega \times 387{,}3 \\ \omega^2 \times 0{,}05 - \omega \times 387{,}3 - 20\,000 &= 0 \end{aligned}$$

Les solutions de cette équation sont

$$\omega = 7\,797{,}3\,\mathrm{rad/s} \qquad \text{et} \qquad \omega = -51{,}3\,\mathrm{rad/s}$$

La deuxième réponse est à rejeter. Il ne reste que la première réponse qui correspond à une fréquence de

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 1\,241\,\mathrm{Hz}$$

Avec la valeur négative de $Z_L - Z_C$, on a

$$\begin{aligned} Z_L - Z_C &= -387{,}3\,\Omega \\ \omega L - \frac{1}{\omega C} &= -387{,}3 \\ \omega \times 0{,}05 - \frac{1}{\omega \times 50 \times 10^{-6}} &= -387{,}3 \end{aligned} \qquad \text{soit} \qquad \begin{aligned} \omega^2 \times 0{,}05 - \frac{1}{50 \times 10^{-6}} &= -\omega \times 387{,}3 \\ \omega^2 \times 0{,}05 - 20\,000 &= -\omega \times 387{,}3 \\ \omega^2 \times 0{,}05 + \omega \times 387{,}3 - 20\,000 &= 0 \end{aligned}$$

Les solutions de cette équation sont

$$\omega = 51{,}3\,\mathrm{rad/s} \qquad \text{et} \qquad \omega = -7\,797{,}3\,\mathrm{rad/s}$$

La deuxième réponse est à rejeter. Il ne reste que la première réponse qui correspond à une fréquence de

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 8{,}165\,\mathrm{Hz}$$

Les fréquences sont donc de 8,165 Hz et 1 241 Hz.

Exercice 10 : On a

$$Z_L = \omega L = 2\pi \times 60 \times 0{,}25 = 84{,}25\,\Omega$$
$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \times 60 \times 100 \times 10^{-6}} = 26{,}53\,\Omega$$

L'impédance est donc

$$Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{(20)^2 + (94{,}25 - 26{,}53)^2} = 70{,}61\,\Omega$$

Le courant est donc

$$I = \frac{\Delta V}{Z} = \frac{360}{70{,}61} = 5{,}098\,\text{A}$$

(a) La différence de potentiel aux bornes de la résistance est

$$\Delta V_R = Z_R I = 20 \times 5{,}098 = 102{,}0\,\text{V}$$

(b) La différence de potentiel aux bornes de l'inducteur est

$$\Delta V_L = Z_L I = 94{,}25 \times 5{,}098 = 480{,}5\,\text{V}$$

(c) La différence de potentiel aux bornes du condensateur est

$$\Delta V_C = Z_C I = 26{,}53 \times 5{,}098 = 135{,}2\,\text{V}$$

(d) Entre les points A et C, l'impédance est

$$Z = \sqrt{R^2 + Z_L^2} = \sqrt{(20)^2 + (94{,}25)^2} = 96{,}35\,\Omega$$

La différence de potentiel entre les points A et C est donc

$$\Delta V = ZI = 96{,}35 \times 5{,}098 = 491{,}2\,\text{V}$$

(e) Entre les points B et D, l'impédance est

$$Z = \sqrt{(Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{(94{,}25 - 26{,}53)^2} = 67{,}72\,\Omega$$

La différence de potentiel entre les points B et D est donc

$$\Delta V = ZI = 67{,}72 \times 5{,}098 = 345{,}3\,\text{V}$$

Exercice 11 : On a

$$I = \frac{\Delta V_R}{Z_R} = \frac{25}{40} = 0{,}625\,\text{A}$$

L'impédance du circuit est donc

$$Z = \frac{\Delta V}{I} = \frac{100}{0{,}625} = 160\,\Omega$$

Puisque

$$Z_L = \omega L = 2\pi \times 80 \times 0{,}4 = 201{,}1\,\text{Hz}$$

On a

$$Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} \quad \longrightarrow \quad 160 = \sqrt{(40)^2 + (201{,}1 - Z_C)^2} \quad \longrightarrow \quad 201{,}1 - Z_C = \pm 154{,}9\,\Omega$$

Avec la valeur positive, on a

$$\begin{aligned} 201{,}1 - Z_C &= 154{,}9\,\Omega \\ Z_C &= 46{,}14\,\Omega \\ \frac{1}{\omega C} &= 46{,}14\,\Omega \end{aligned} \qquad \text{soit} \qquad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi \times 80 \times C} &= 46{,}14 \\ C &= 4{,}311 \times 10^{-5}\,\mathrm{F} = 43{,}11\,\mu\mathrm{F} \end{aligned}$$

Avec la valeur positive, on a

$$\begin{aligned} 201{,}1 - Z_C &= -154{,}9\,\Omega \\ Z_C &= 356{,}0\,\Omega \\ \frac{1}{\omega C} &= 356{,}0\,\Omega \end{aligned} \qquad \text{soit} \qquad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi \times 80 \times C} &= 356{,}0 \\ C &= 5{,}589 \times 10^{-6}\,\mathrm{F} = 5{,}589\,\mu\mathrm{F} \end{aligned}$$

La capacité est de 43,11 µF ou 5,589 µF.

Exercice 12 : On a

$$Z_L = \omega L = 2\pi \times 60 \times 0{,}1 = 50{,}27\,\Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \times 60 \times 25 \times 10^{-6}} = 79{,}58\,\Omega$$

Le courant est donc

$$I = \frac{\Delta V_L}{Z_L} = \frac{30}{50{,}27} = 0{,}596\,8\,\mathrm{A}$$

L'impédance du circuit est donc

$$Z = \frac{\Delta}{I} = \frac{24}{0{,}596\,8} = 40{,}21\,\Omega$$

On peut donc trouver la résistance avec

$$Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} \quad \longrightarrow \quad 40{,}21 = \sqrt{R^2 + (50{,}27 - 79{,}58)^2} \quad \longrightarrow \quad R = 27{,}53\,\Omega$$

La puissance dissipée est donc

$$P = RI^2 = 27{,}53 \times (0{,}596\,8)^2 = 9{,}806\,\mathrm{W}$$

Exercice 13 :

(a) Si la puissance est maximale, c'est que le courant efficace est maximal. On est donc à la fréquence de résonance. On a donc

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \longrightarrow \quad 1\,500 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \times 40 \times 10^{-6}}} \quad \longrightarrow \quad L = 2{,}814 \times 10^{-4}\,\mathrm{H}$$

(b) À la fréquence de résonance, on a

$$Z = R \qquad \text{et} \qquad \cos\phi = 1$$

La puissance dissipée est alors

$$\begin{aligned} P &= \frac{\Delta V^2}{Z}\cos\phi \\ P &= \frac{\Delta V^2}{R} \end{aligned} \qquad \text{et donc} \qquad \begin{aligned} 400 &= \frac{(800)^2}{R} \\ R &= 1\,600\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

Exercice 14 :

(a) Le déphasage est

$$\phi = \omega\Delta t = 2\pi \times 100 \times (-0{,}001) = -\frac{\pi}{5}$$

On a donc

$$\tan\phi = \frac{Z_L - Z_C}{R} \quad \longrightarrow \quad \tan\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \frac{Z_L - Z_C}{60} \quad \longrightarrow \quad Z_L - Z_C = -43{,}59\,\Omega$$

On a ainsi

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = -43{,}59\,\Omega$$
$$(2\pi \times 100) \times 1{,}2 - \frac{1}{2\pi \times 100 \times C} = -43{,}59$$
$$C = 1{,}995 \times 10^{-6}\,\mathrm{F} = 1{,}995\,\mu\mathrm{F}$$

(b) La fréquence de résonance est

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1{,}2 \times 1{,}995 \times 10^{-6}}} = 102{,}9\,\mathrm{Hz}$$

Exercice 15 : La différence de potentiel efficace est

$$\Delta V = \sqrt{\Delta V_R^2 + (\Delta V_L - \Delta V_C)^2} = \sqrt{(30)^2 + (70-20)^2} = 58{,}31\,\mathrm{V}$$

L'amplitude est donc

$$\Delta v_0 = \sqrt{2} \cdot \Delta V = \sqrt{2} \times 58{,}31 = 82{,}46\,\mathrm{V}$$

Exercice 16 : La puissance dissipée est

$$P = RI^2$$

et le courant est

$$I = \frac{\Delta V}{Z}$$

On a donc

$$P = RI^2 = R\frac{\Delta V^2}{Z^2}$$

Puisque

$$Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}$$

on a

$$P = \frac{R\Delta V^2}{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}$$

Les valeurs de Z_L et Z_C sont

$$Z_L = \omega L = 2\pi \times 1\,000 \times 0{,}075 = 471{,}2\,\Omega$$
$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \times 1\,000 \times 2 \times 10^{-9}} = 795{,}8\,\Omega$$

Notre équation devient donc

$$P = \frac{R\Delta V^2}{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}$$
$$170 = \frac{R(340)^2}{R^2 + (471{,}2 - 795{,}8)^2} \qquad \text{soit} \qquad 170 = \frac{R(340)^2}{R^2 + 105\,323}$$

Il ne reste plus qu'à isoler R.

$$170 = \frac{R(340)^2}{R^2 + 105\,323} \qquad \text{soit} \qquad R^2 + 105\,323 = R \times 680$$
$$170(R^2 + 105\,323) = R(340)^2 \qquad\qquad R^2 - 680R + 105\,323 = 0$$

Les solutions de cette équation quadratique sont 441,4 Ω et 238,6 Ω.

Exercice 17 :

(a) On a

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \times 180 \times 8 \times 10^{-6}} = 110{,}5\,\Omega$$

L'impédance du circuit est

$$Z = \sqrt{R^2 + (-Z_C)^2} = \sqrt{(240)^2 + (-110{,}5)^2} = 264{,}2\,\Omega$$

Le courant efficace est

$$i_0 = \frac{\Delta v_0}{Z} = \frac{240}{264{,}2} = 0{,}908\,3\,\text{A}$$

(b) Le déphasage est

$$\tan\phi = -\frac{Z_C}{R} = -\frac{110{,}5}{240} = -0{,}460\,5 \qquad \longrightarrow \qquad \phi = -0{,}431\,6\,\text{rad}$$

L'écart de temps est donc

$$\Delta t = \frac{\phi}{\omega} = \frac{-0{,}431\,6}{2\pi \times 180} = -3{,}816 \times 10^{-4}\,\text{s}$$

Le courant devance donc le potentiel de 0,381 6 ms.

(c) La puissance est

$$P = \frac{Ri_0^2}{2} = \frac{240 \times (0{,}908\,3)^2}{2} = 99\,\text{W}$$

Exercice 18 :

(a) On a

$$Z_L = \omega L = 2\pi \times 1\,000 \times 0{,}8 = 5\,026{,}5\,\Omega$$
$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \times 1\,000 \times 30 \times 10^{-9}} = 5\,305{,}2\,\Omega$$

L'impédance du circuit est

$$Z = \sqrt{(Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{(5\,026{,}5 - 5\,305{,}2)^2} = \sqrt{(-278{,}6)^2} = 278{,}6\,\Omega$$

Le courant efficace est donc

$$I = \frac{\Delta V}{Z} = \frac{400}{278{,}6} = 1{,}436\,\text{A}$$

(b) Le déphasage est donc

$$\tan\phi = \frac{Z_L - Z_C}{0} = \frac{-278{,}6}{0} = -\infty \qquad \longrightarrow \qquad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

L'écart de temps est donc

$$\Delta t = \frac{\phi}{\omega} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{2\pi \times 1\,000} = -2{,}5 \times 10^{-4}\,\text{s}$$

Le courant devance donc le potentiel de 0,25 ms.

(c) La puissance est alors

$$P = RI^2 = 0 \times (0{,}908\,3)^2 = 0\,\mathrm{W}$$

Exercice 19 : À 250 Hz, on a

$$Z = \frac{\Delta V}{I} = \frac{200}{0{,}2} = 1\,000\,\Omega$$

On a donc

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + Z_L^2} \\ Z &= \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \end{aligned} \qquad \text{soit} \qquad \begin{aligned} 1\,000 &= \sqrt{R^2 + (500\pi \cdot L)^2} \\ (1\,000)^2 &= R^2 + (500\pi \cdot L)^2 \end{aligned}$$

À 350 Hz, on a

$$Z = \frac{\Delta V}{I} = \frac{200}{0{,}16} = 1\,250\,\Omega$$

On a donc

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + Z_L^2} \\ Z &= \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \end{aligned} \qquad \text{soit} \qquad \begin{aligned} 1\,250 &= \sqrt{R^2 + (700\pi \cdot L)^2} \\ (1\,250)^2 &= R^2 + (700\pi \cdot L)^2 \end{aligned}$$

On a donc deux équations.

$$(1\,000)^2 = R^2 + (500\pi \cdot L)^2 \qquad \text{et} \qquad (1\,250)^2 = R^2 + (700\pi \cdot L)^2$$

Si on soustrait les deux équations, on a

$$\begin{aligned} (1\,250)^2 - (1\,000)^2 &= \left(R^2 + (700\pi \cdot L)^2\right) - \left(R^2 + (500\pi \cdot L)^2\right) \\ &= (700\pi \cdot L)^2 - (500\pi \cdot L)^2 = \left((700\pi)^2 - (500\pi)^2\right) L^2 \end{aligned}$$

On a donc

$$L^2 = \frac{(1\,250)^2 - (1\,000)^2}{(700\pi)^2 - (500\pi)^2} = 0{,}237\,5 \qquad \text{soit} \qquad L = 0{,}487\,3\,\mathrm{H}$$

L'inductance est de 487,3 mH.
On peut ensuite trouver la résistance.

$$\begin{aligned} (1\,000)^2 &= R^2 + (500\pi \cdot L)^2 \\ (1\,000)^2 &= R^2 + (500\pi \times 0{,}487\,3)^2 \end{aligned} \qquad \text{soit} \qquad \begin{aligned} (1\,000)^2 &= R^2 + (765{,}5)^2 \\ R &= 643{,}5\,\Omega \end{aligned}$$

Exercice 20 : Le courant se trouve avec l'équation suivante.

$$P = RI^2 \qquad \longrightarrow \qquad 21{,}6 = 60 \times I^2 \qquad \longrightarrow \qquad I = 0{,}6\,\mathrm{A}$$

L'impédance du circuit est donc

$$Z = \frac{\Delta V}{I} = \frac{120}{0{,}6} = 200\,\Omega$$

On a donc

$$Z = \sqrt{R^2 + Z_L^2} \qquad \longrightarrow \qquad 200 = \sqrt{(60)^2 + (120\pi \cdot L)^2} \qquad \longrightarrow \qquad L = 0{,}506\,1\,\mathrm{H}$$

Exercice 21 : Le déphasage est

$$\phi = \omega\Delta t = 400\pi \times (-0{,}001) = -\frac{2\pi}{5}$$

La valeur est négative puisque le courant devance le potentiel.
Si l'élément inconnu était un inducteur, le déphasage serait

$$\tan\phi = \frac{Z_L}{R}$$

et il serait positif, ce qui n'est pas le cas.
Si l'élément inconnu était un condensateur, le déphasage serait

$$\tan\phi = \frac{-Z_C}{R}$$

et il serait négatif, ce qui est le cas. L'élément mystère est donc un condensateur. On a donc

$$\tan\phi = \frac{-Z_C}{R} \qquad \longrightarrow \qquad \tan\left(\frac{-2\pi}{5}\right) = \frac{-Z_C}{10} \qquad \longrightarrow \qquad Z_C = 30{,}77\,\Omega$$

Il ne reste qu'à trouver la capacité.

$$Z_C = 30{,}77\,\Omega \qquad \qquad \frac{1}{400\pi \cdot C} = 30{,}77$$

$$\frac{1}{\omega C} = 30{,}77 \qquad \text{et donc} \qquad C = 2{,}586 \times 10^{-5}\,\mathrm{F} = 25{,}86\,\mu\mathrm{F}$$

Exercice 22 :

(a) La différence de potentiel aux bornes du circuit secondaire est

$$\Delta V_2 = \frac{N_2}{N_1}\Delta V_1 = \frac{100}{500} \cdot 1\,000 = 200\,\mathrm{V}$$

Comme la résistance est en parallèle avec la bobine du circuit secondaire, la différence de potentiel aux bornes de la résistance est aussi de 200 V.

(b) Le courant efficace dans le circuit secondaire est

$$I_2 = \frac{\Delta V_2}{R} = \frac{200}{10} = 20\,\mathrm{A}$$

(c) Le courant efficace dans le circuit primaire est

$$I_1 = \frac{N_2}{N_1} I_2 = \frac{100}{500} \cdot 200 = 4\,\mathrm{A}$$

Exercice 23 :

(a) Quel est le courant efficace dans le circuit tertiaire ?

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{120}{1\,000} = 0{,}12\,\mathrm{A}$$

(b) On a

$$\Delta V_2 = \frac{N_2}{N_1}\Delta V_1 \qquad \longrightarrow \qquad 120 = \frac{N_2}{N_1} \times 425\,000 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{N_2}{N_1} = 0{,}000\,282\,4 = \frac{1}{3541}$$

(c) Le courant efficace dans le circuit secondaire est

$$I_1 = \frac{N_2}{N_1} I_2 = \frac{0{,}12}{3\,541} = 3{,}388 \times 10^{-5}\,\mathrm{A} = 33{,}88\,\mu\mathrm{A}$$

(d) On a

$$\Delta V_2 = \frac{N_2}{N_1}\Delta V_1 \quad \longrightarrow \quad 425\,000 = \frac{N_2}{N_1} \times 13\,800 \quad \longrightarrow \quad \frac{N_2}{N_1} = 30{,}8$$

(e) Le courant efficace dans le circuit primaire est

$$I_1 = \frac{N_2}{N_1} I_2 = 33{,}88 \times 10^{-6} \times 30{,}8 = 1{,}04 \times 10^{-3}\,\mathrm{A} = 1{,}04\,\mathrm{mA}$$

Exercice 24 :

(a) La différence de potentiel est

$$\Delta V_1 = \frac{N_1}{N_2}\Delta V_2 = \frac{100 N_2}{N_2} \times 120 = 12\,000\,\mathrm{V}$$

(b) Le courant dans le circuit secondaire est

$$I = \frac{P}{\Delta V} = \frac{60\,000}{120} = 500\,\mathrm{A}$$

(c) Le courant dans le circuit primaire est

$$I_1 = \frac{N_2}{N_1} I_2 = \frac{N_2}{100 N_2} \times 500 = 5\,\mathrm{A}$$

(d) La perte d'énergie est

$$P = RI^2 = 10 \times (5)^2 = 250\,\mathrm{W}$$

(e) La différence de potentiel est

$$\Delta V_1 = \frac{N_1}{N_2}\Delta V_2 = \frac{1\,000 N_2}{N_2} \times 120 = 120\,000\,\mathrm{V}$$

(f) Le courant dans le circuit secondaire est

$$I = \frac{P}{\Delta V} = \frac{60\,000}{120} = 500\,\mathrm{A}$$

(g) Le courant dans le circuit primaire est

$$I_1 = \frac{N_2}{N_1} I_2 = \frac{N_2}{1\,000 N_2} \times 500 = 0{,}5\,\mathrm{A}$$

(h) La perte d'énergie est

$$P = RI^2 = 10 \times (0{,}5)^2 = 2{,}5\,\mathrm{W}$$

(i) Oui. En transportant l'électricité à 12 000 V, les pertes sont de 250 W. En transportant l'électricité à 120 000 V, les pertes ne sont plus que de 2,5 W. On constate que les pertes diminuent quand on augmente le potentiel.

Exercice 25 : On sait que le courant est donné par

$$I=\frac{\Delta V}{Z}=\frac{\Delta V}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

On peut écrire cette formule sous la forme suivante.

$$I=\frac{\Delta V}{\sqrt{R^2+L^2\left(\omega-\frac{1}{\omega LC}\right)^2}}=\frac{\Delta V}{\sqrt{R^2+L^2\left(\omega-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}=\frac{\Delta V}{\sqrt{R^2+\frac{L^2}{\omega^2}\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}}$$

Au pic, le courant est

$$I_{\max}=\frac{\Delta V}{R}$$

À la moitié de la hauteur du pic, on a donc

$$\begin{aligned}\frac{I_{\max}}{2}&=\frac{\Delta V}{\sqrt{R^2+\frac{L^2}{\omega_{\frac12}^2}\left(\omega_{\frac12}^2-\omega_0^2\right)^2}}\\ \frac{\Delta V}{2R}&=\frac{\Delta V}{\sqrt{R^2+\frac{L^2}{\omega_{\frac12}^2}\left(\omega_{\frac12}^2-\omega_0^2\right)^2}}\end{aligned}\quad\Longrightarrow\quad 2R=\sqrt{R^2+\frac{L^2}{\omega_{\frac12}^2}\left(\omega_{\frac12}^2-\omega_0^2\right)^2}$$

Comme vous pouvez le constater, on a appelé $\omega_{\frac12}$ la fréquence à la moitié du courant maximum. On a alors

$$4R^2=R^2+\frac{L^2}{\omega_{\frac12}^2}\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2\quad\Longrightarrow\quad 3R^2\omega_{\frac12}^2=L^2R^2+\frac{L^2}{\omega_{\frac12}^2}\left(\omega_{\frac12}^2-\omega_0^2\right)^2$$

On va écrire

$$\omega_{\frac12}=\omega_0+\frac12\Delta\omega$$

(où $\Delta\omega$ est la largeur du pic). On a alors

$$\begin{aligned}3R^2\left(\omega_0^2+\frac12\Delta\omega\right)^2&=L^2\left(\left(\omega_0+\frac12\Delta\omega\right)^2-\omega_0^2\right)^2\\ 3R^2\left(\omega_0^2+\frac12\Delta\omega\right)^2&=L^2\left(\omega_0^2+\omega_0\Delta\omega+\left(\frac12\Delta\omega\right)^2-\omega_0^2\right)^2\\ 3R^2\left(\omega_0^2+\frac12\Delta\omega\right)^2&=L^2\left(\omega_0\Delta\omega+\left(\frac12\Delta\omega\right)^2\right)^2\\ 3R^2\omega_0^2\left(1+\frac{\Delta\omega}{2\omega_0}\right)^2&=L^2\omega_0^2\left(\Delta\omega\right)^2\left(1+\frac{\Delta\omega}{4\omega_0}\right)^2\\ 3R^2\left(1+\frac{\Delta\omega}{2\omega_0}\right)^2&=L^2\left(\Delta\omega\right)^2\left(1+\frac{\Delta\omega}{4\omega_0}\right)^2\end{aligned}$$

Si le pic est mince, alors

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\ll 1$$

On peut donc négliger les deuxièmes termes dans chacune des parenthèses. On a donc

$$
\begin{array}{c}
3R^2(1+0)^2 = L^2\,(\Delta\omega)^2 \cdot (1+0)^2 \\
3R^2 = L^2\,(\Delta\omega)^2
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{c}
(\Delta\omega)^2 = \dfrac{3R^2}{L^2} \\
\Delta\omega = \dfrac{\sqrt{3}R}{L}
\end{array}
$$

Cette page est intentionnellement laissée en blanc.

On parle souvent de faire un vaisseau spatial propulsé par la pression de radiation du Soleil. Pour propulser le vaisseau, il suffit de placer une surface qui captera l'énergie du Soleil. La lumière, en frappant cette surface, exercera une force qui fera accélérer le vaisseau. Quelle force moyenne exerce la lumière du Soleil sur la surface de 1 km^2 ? Apprenez comment résoudre ce problème dans ce chapitre.

13. Solutions du chapitre 13

Exercice 1 :

(a) En mettant nos doigts de la main droite dans la direction du champ électrique et en les pliant dans la direction du champ magnétique, notre pouce pointe vers la droite. Cette onde va donc vers la droite.

(b) On trouve le champ magnétique avec

$$E = Bc \qquad \longrightarrow \qquad 45 = B \times 3 \times 10^8 \qquad \longrightarrow \qquad B = 1{,}5 \times 10^{-7}\,\mathrm{T}$$

Selon la règle de la main droite, ce champ sort de la page

Exercice 2 :

(a) On a

$$c = \frac{\omega}{k} \qquad \longrightarrow \qquad 3 \times 10^8 = \frac{\omega}{\frac{\pi}{50}} \qquad \longrightarrow \qquad \omega = 1{,}885 \times 10^7\,\mathrm{rad/s}$$

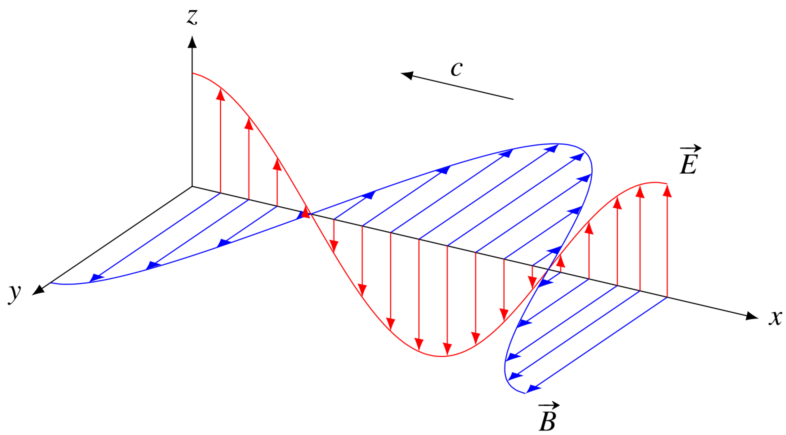
(b) Puisqu'on a un signe positif devant ω, cette onde va vers les x négatifs.

(c) Si l'onde va vers les x négatifs, on doit avoir l'onde suivante à $t = 0\,\mathrm{s}$.
On voit que le champ magnétique a une composante en y. On a alors

$$E_z = B_y c$$
$$12 \sin\left(\frac{\pi}{50} \cdot x + 1{,}885 \times 10^7 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = B_y \times 3 \times 10^8$$
$$B_y = 4 \times 10^{-8} \sin\left(\frac{\pi}{50} \cdot x + 1{,}885 \times 10^7 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Note : Si l'onde allait vers les x positifs, le champ magnétique à $x = 0$ aurait été vers les y négatifs alors que le champ électrique aurait été vers les z positifs. Il y aurait alors eu un signe négatif de plus. On aurait alors eu

$$E_z = -B_y c$$
$$12 \sin\left(\frac{\pi}{50} \cdot x - 1{,}885 \times 10^7 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = -B_y \times 3 \times 10^8$$
$$B_y = -4 \times 10^{-8} \sin\left(\frac{\pi}{50} \cdot x - 1{,}885 \times 10^7 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$



On aurait pu ensuite camoufler ce signe négatif dans le déphasage pour obtenir

$$B_y = 4\times 10^{-8}\sin\left(\frac{\pi}{50}\cdot x - 1{,}885\times 10^{7}\cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Exercice 3 : L'amplitude du champ électrique se trouve avec

$$\bar{I} = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2} \qquad \longrightarrow \qquad 1\,000 = \frac{3\times 10^{8}\times 8{,}85\times 10^{-12}\times E_0^2}{2} \qquad \longrightarrow \qquad E_0 = 867{,}7\,\mathrm{V/m}$$

L'amplitude du champ magnétique est

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{867{,}7}{3\times 10^{8}} = 2{,}892\times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

Exercice 4 : L'intensité est

$$\bar{I} = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{3\times 10^{8}\times 8{,}85\times 10^{-12}\times (25)^2}{2} = 0{,}83\,\mathrm{W/m^2}$$

La puissance captée est

$$P_{\text{captée}} = IA_{\text{capteur}} = 0{,}83\times 30 = 24{,}9\,\mathrm{W}$$

L'énergie captée en 5 minutes est alors

$$P = E\Delta t = 24{,}9\times 5\times 60 = 7\,471\,\mathrm{J}$$

Exercice 5 : L'intensité à 2 000 m de distance est

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1\,000}{4\pi(2\,000)^2} = 1{,}989\times 10^{-5}\,\mathrm{W/m^2}$$

L'amplitude du champ électrique se trouve avec

$$\bar{I} = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2}$$
$$1{,}989\times 10^{-5} = \frac{3\times 10^{8}\times 8{,}85\times 10^{-12}\times E_0^2}{2}$$
$$E_0 = 0{,}122\,4\,\mathrm{V/m}$$

L'amplitude du champ magnétique est donc

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{0{,}122\,4}{3\times 10^{8}} = 4{,}080\times 10^{-10}\,\mathrm{T}$$

Exercice 6 :

(a) À la limite, on a

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \quad \longrightarrow \quad 10^{-10} = \frac{50}{4\pi r^2} \quad \longrightarrow \quad r = 1{,}995 \times 10^5\,\mathrm{m} = 199{,}5\,\mathrm{km}$$

(b) L'amplitude du champ électrique se trouve avec L'amplitude du champ électrique se trouve avec

$$\bar{I} = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2} \quad \longrightarrow \quad 10^{-10} = \frac{3 \times 10^8 \times 8{,}85 \times 10^{-12} \times E_0^2}{2} \quad \longrightarrow \quad E_0 = 2{,}744 \times 10^{-4}\,\mathrm{V/m}$$

L'amplitude du champ magnétique est donc

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{2{,}744 \times 10^{-4}}{3 \times 10^8} = 9{,}147 \times 10^{-13}\,\mathrm{T}$$

Exercice 7 : L'intensité est

$$\bar{I} = c\frac{B_0^2}{2\mu_0} = 3 \times 10^8 \times \frac{(1 \times 10^{-7})^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 1{,}194\,\mathrm{W/m^2}$$

On a alors

$$P = IA = I \cdot (4\pi r^2) = 1{,}194 \times 4\pi \times (5)^2 = 375\,\mathrm{W}$$

Exercice 8 : La puissance captée par le panneau est

$$P = 0{,}2 \times 1\,350 \times A_{\text{capteur}}$$

Le 0,2 ne représente que 20 % de la puissance de la lumière reçue. L'énergie reçue pendant toute l'année est donc

$$E = P\Delta t = 0{,}2 \times 1\,350 \times A_{\text{capteur}} \times 365{,}25 \times 12 \times 60 \times 60 = 4{,}26 \times 10^9 \times A_{\text{capteur}}$$

Cette énergie captée doit être égale à l'énergie consommée, qui est de

$$E = 5 \times 10^{12} \times 3{,}6 \times 10^6 = 1{,}8 \times 10^{19}\,\mathrm{J}$$

On a donc

$$1{,}8 \times 10^{19} = 4{,}26 \times 10^9 \cdot A_{\text{capteur}}$$

L'aire des panneaux est donc

$$A_{\text{capteur}} = 4{,}225 \times 10^9\,\mathrm{m^2}$$

Avec un capteur carré, la longueur d'un côté d'un capteur est

$$l = \sqrt{A_{\text{capteur}}} = \sqrt{4{,}225 \times 10^9} = 65\,000\,\mathrm{m} = 65\,\mathrm{km}$$

Exercice 9 : La pression est

$$P = \frac{I}{c} = \frac{1\,350}{3 \times 10^8} = 4{,}5 \times 10^{-6}\,\mathrm{Pa}$$

La force est donc

$$F = PA = 4{,}5 \times 10^{-6} \times 50 = 2{,}25 \times 10^{-4}\,\mathrm{N}$$

Exercice 10 : La force de gravitation sur la plaque est

$$F = mg = 0{,}001 \times 9{,}8 = 0{,}009\,8\,\mathrm{N}$$

Si on veut que la plaque lévite, la force de la pression de radiation doit être de 0,009 8 N vers le haut. La pression de radiation doit être de

$$P = \frac{F}{A} = \frac{0{,}009\,8}{0{,}008} = 1{,}225\,\mathrm{Pa}$$

L'intensité de la lumière doit donc être de

$$I = P \cdot c = 1{,}225 \times 3 \times 10^8 = 3{,}675 \times 10^8\,\mathrm{W/m^2}$$

(C'est pas mal grand comme intensité...Ce serait l'intensité d'une ampoule de 462 milliards de watts à 10 m de distance !)

Exercice 11 : La pression est

$$P = \frac{I}{c} = \frac{6\,000}{3 \times 10^8} = 2 \times 10^{-5}\,\mathrm{Pa}$$

Cette pression s'exerce seulement là où le laser éclaire la plaque. Pour calculer la force, il faut donc prendre seulement l'aire de la région où le laser éclair la plaque.

$$F = PA = 2 \times 10^{-5} \times \pi \times (0{,}000\,5)^2 = 1{,}571 \times 10^{-11}\,\mathrm{N}$$

On ne peut pas dire que c'est une grosse force...

Exercice 12 : Commençons par trouver la force sur un grain de poussière. L'intensité de la lumière à une distance r du Soleil est

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{100 \times 3{,}83 \times 10^{26}}{4\pi r^2} = \frac{3{,}048 \times 10^{27}}{r^2}$$

La pression de radiation est donc

$$P = \frac{I}{c} = \frac{\frac{3{,}048 \times 10^{27}}{r^2}}{3 \times 10^8} = \frac{1{,}016 \times 10^{19}\,\mathrm{N}}{r^2}$$

Si le grain a un rayon R, il agit comme un capteur circulaire de rayon R. La force sur le grain est donc de

$$F_{\text{rad}} = PA = \frac{1{,}016 \times 10^{19}}{r^2} \cdot \pi R^2 = 3{,}192 \times 10^{19} \frac{R^2}{r^2}$$

La force de gravitation sur le grain est

$$\begin{aligned} F_g &= \frac{GM_{\text{Soleil}} m_{\text{grain}}}{r^2} = \frac{GM_{\text{Soleil}} \rho\,(\text{volume})_{\text{grain}}}{r^2} = \frac{GM_{\text{Soleil}} \rho\,(\frac{4}{3}\pi R^3)}{r^2} \\ &= \frac{6{,}674 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30} \times 2\,000 \times (\frac{4}{3}\pi R^3)}{r^2} = 1{,}118 \times 10^{24} \frac{R^3}{r^2} \end{aligned}$$

Le grain est poussé à l'extérieur du système solaire si la force de poussée est supérieure à la force de gravitation. Donc si

$$3{,}192 \times 10^{19} \frac{R^2}{r^2} > 1{,}118 \times 10^{24} \frac{R^3}{r^2} \longrightarrow 3{,}192 \times 10^{19} > 1{,}118 \times 10^{24} \cdot R \longrightarrow 2{,}854 \times 10^{-5}\,\mathrm{m} > R$$

Ainsi, tous les grains de poussière dont le rayon était inférieur à 28,54 µm furent éliminés du système solaire par la pression de radiation.

Exercice 13 : Dans un champ de 10^6 V/m, l'accélération de l'électron est

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m} = \frac{1{,}602 \times 10^{-19} \times 1 \times 10^6}{9{,}11 \times 10^{-31}} = 1{,}758 \times 10^{17}\,\mathrm{m/s^2}$$

La puissance émise est donc

$$P = \frac{a^2 q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{(1{,}758 \times 10^{17})^2 \times (1{,}602 \times 10^{-19})^2}{6\pi \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times (3 \times 10^8)^3} = 1{,}761 \times 10^{-19}\,\mathrm{W}$$

Puisque l'électron accélère pendant 10 s, l'énergie perdue est

$$E = Pt = 1{,}761 \times 10^{-19} \times 10 = 1{,}761 \times 10^{-18}\,\mathrm{J} = 10{,}99\,\mathrm{eV}$$

Exercice 14 : L'intensité de l'onde est

$$I = \frac{a^2 q^2 \sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2}$$

Comme on a une oscillation harmonique, l'accélération est

$$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

L'intensité est donc

$$I = \frac{A^2\omega^4 \sin^2(\omega t + \phi) q^2 \sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2}$$

Pour avoir la valeur moyenne de l'intensité sur une période, on prend la valeur moyenne de $\sin^2(\omega t + \phi)$ sur un cycle, qui est $\frac{1}{2}$. On a donc

$$\bar{I} = \frac{1}{2} \cdot \frac{A^2\omega^4 q^2 \sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2}$$

Dans cette formule, θ est l'angle entre la direction de l'accélération (verticale ici) et l'endroit où on veut savoir l'intensité. Cet angle est donc de 60°.

Avec les valeurs, on a

$$\bar{I} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(0{,}001)^2 (\frac{2\pi}{10^{-6}})^4 (0{,}01)^2 \sin^2 30^\circ}{16\pi^2 \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times (3 \times 10^8)^3 \times (15)^2} = 2{,}294 \times 10^{-3}\,\mathrm{W/m^2}$$

Exercice 15 : Pendant le freinage, l'accélération de l'électron est

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2 \qquad \longrightarrow \qquad 2a(0{,}1 \times 10^{-9}) = 0 - (10^8)^2 \qquad \longrightarrow \qquad a = -5 \times 10^{25}\,\mathrm{m/s^2}$$

La puissance émise est donc

$$P = \frac{a^2 q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{(-5 \times 10^{25})^2 (1{,}602 \times 10^{-19})^2}{6\pi \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times (3 \times 10^8)^3} = 1{,}423\,8 \times 10^{-2}\,\mathrm{W}$$

La durée du freinage est donc

$$v = v_0 + at \qquad \longrightarrow \qquad 0 = 10^8 + (-5 \times 10^{25}) \cdot t \qquad \longrightarrow \qquad t = 2 \times 10^{-18}\,\mathrm{s}$$

L'énergie perdue est alors

$$E = Pt = 1{,}423\,8 \times 10^{-2} \times 2 \times 10^{-18} = 2{,}848 \times 10^{-20}\,\mathrm{J} = 0{,}177\,8\,\mathrm{eV}$$

Exercice 16 :

(a) L'accélération est

$$\begin{aligned} ma &= \frac{kqq}{r^2} \\ a &= \frac{kqq}{mr^2} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad a = \frac{9\times 10^9 \times (1{,}602\times 10^{-19})^2}{9{,}11\times 10^{-31}\times (5{,}29\times 10^{-11})^2} = 9{,}06\times 10^{22}\,\mathrm{m/s^2}$$

(b) L'énergie mécanique de l'électron sur son orbite est

$$E = E_k + U$$
$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{kZe^2}{r}$$

Or, l'équation de la force centripète

$$m_\mathrm{e}v^2 = \frac{kZe^2}{r}$$

nous permet d'écrire l'énergie cinétique sous la forme suivante.

$$\frac{1}{2}m_\mathrm{e}v^2 = \frac{kZe^2}{2r}$$

On a donc

$$E = E_k + U = \frac{kZe^2}{2r} - \frac{kZe^2}{r} = -\frac{kZe^2}{r}$$

L'énergie est donc

$$E = -\frac{kZe^2}{r} = -\frac{9\times 10^9\times 1\times (1{,}602\times 10^{-19})^2}{2\times 5{,}29\times 10^{-11}} = -2{,}183\times 10^{-18}\,\mathrm{J}$$

(c) La puissance est

$$P = \frac{a^2q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{(9{,}06\times 10^{22})^2(1{,}602\times 10^{-19})^2}{6\pi\times 8{,}854\times 10^{-12}\times (3\times 10^8)^3} = 4{,}674\times 10^{-8}\,\mathrm{W}$$

(d) On sait que

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{a^2e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

Puisque l'accélération est

$$a = \frac{ke^2}{mr^2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mr^2}$$

on a

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{e^6}{m^2r^4\cdot 96\pi^3\varepsilon_0^3c^3}$$

Puisque l'énergie est

$$E = -\frac{ke^2}{2r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

on a aussi

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dr}\left(-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}\right)\frac{dr}{dt} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{dr}{dt}$$

En égalant nos deux dE/dt, on trouve

$$\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{e^6}{m^2 r^4 \cdot 96\pi^3\varepsilon_0^3 c^3}$$
$$\frac{dr}{dt} = -\frac{e^4}{m^2 r^2 \cdot 12\pi^2\varepsilon_0^2 c^3}$$
$$r^2 dr = -\frac{e^4}{m^2 \cdot 12\pi^2\varepsilon_0^2 c^3}dt$$
$$\frac{r^3}{3} = -\frac{e^4 t}{m^2 \cdot 12\pi\varepsilon_0^2 c^3} + \text{constante}$$

Comme à $t = 0$, le rayon est le rayon de Bohr a_0, on a

$$\frac{a_0^3}{3} = 0 + \text{constante}$$

Ainsi, le rayon est

$$\frac{r^3}{3} = -\frac{e^4 t}{m^2 \cdot 12\pi^2\varepsilon_0^2 c^3} + \frac{a_0^3}{3}$$
$$r^3 = a_0^3 - \frac{e^4 t}{m^2 \cdot 4\pi^2\varepsilon_0^2 c^3}$$

Ainsi, le temps pour arriver à $r = 10^{-15}\,\text{m}$ est

$$(10^{-15})^3 = (5{,}29 \times 10^{-11})^3 - \frac{(1{,}602 \times 10^{-19})^4 t}{(9{,}11 \times 10^{-31})^2 \times 4\pi^2 \times (8{,}854 \times 10^{-12})^2 \times (3 \times 10^8)^3}$$
$$(10^{-15})^3 = (5{,}26 \times 10^{-11})^3 - 9{,}497 \times 10^{-21} t$$
$$t = 1{,}55 \times 10^{-11}\,\text{s}$$

L'atome ne vivrait donc pas très longtemps…