Preuve du théorème d'Ampère

Je donne ici une preuve beaucoup plus formelle, mais elle est d'un niveau nettement supérieur à ce que peut normalement comprendre un étudiant de cégep. Elle est plus d'un niveau d'un étudiant au baccalauréat en physique ou en mathématiques.

On va commencer avec la loi de Biot-Savart. Selon cette loi, le champ magnétique fait par un petit courant infinitésimal est

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} Ids \sin\theta$$

En fait, on peut imaginer qu'il peut y avoir du courant partout et que ce courant a une densité de courant J qui peut varier d'un endroit à l'autre. Le courant qui traverse une surface est

$$J = \frac{I}{A}$$

Comme la densité pourrait varier d'un endroit à l'autre sur la trajectoire, alors on va devoir calculer le courant en prenant de très petites surfaces. Ainsi, à un endroit, le courant est

$$I = JdA$$

La loi de Biot-Savart devient donc

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} JdAds \sin\theta$$

Or, $dAds$ est comme l'aire d'une petite région de l'espace multipliée par sa longueur. Cette multiplication donne le volume de cette région de l'espace.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} JdV \sin\theta$$

On va maintenant passer à la version vectorielle de cette équation, qui tient compte de la direction du champ. Pour commencer r est la distance entre le petit morceau de fil et l'endroit où on veut savoir le champ. Si la position du petit bout de fil est donnée par le vecteur $\vec{r}'$ et la position de l'endroit est donnée par le vecteur $\vec{r}$, alors la distance entre les deux est $\vec{r} - \vec{r}'$. On a donc

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi \left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^2} J'dV' \sin\theta$$

(Puisqu'on va intégrer sur tous les courants, dont la position est donnée par r', le volume de la région doit plutôt être noté dV'. Comme le courant est donné en fonction de r', On a aussi mis un prime à J pour se rappeler que J dépend de r'.)

Comme le champ est donné par la règle de la main droite avec J (qui est en réalité un vecteur qui pointe dans la direction de déplacement des charges) et la distance, la direction est dans la même direction que

$$\vec{J}'\times(\vec{r}-\vec{r}')$$

Comme la grandeur de ce produit vectoriel est $J\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|\sin\theta$, on a

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2} J' dV' \sin\theta \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} J'\left|\vec{r}-\vec{r}'\right| dV' \sin\theta \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} \vec{J}'\times(\vec{r}-\vec{r}')\, dV' \end{aligned}$$

Le champ magnétique total à un endroit est donc

$$\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} \vec{J}'\times(\vec{r}-\vec{r}')\, dV'$$

On va maintenant calculer l'intégrale de ligne

$$\begin{aligned} C &= \oint_{trajectoire} d\vec{B}\cdot d\vec{l} \\ &= \oint_{trajectoire} \left(\int \frac{\mu_0}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} \vec{J}'\times(\vec{r}-\vec{r}')\, dV' \right)\cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

Or, il existe un théorème qui permet de transformer les intégrales de surface en intégrales de ligne. Il s'agit du théorème de Stokes, qui dit que pour n'importe quel champ vectoriel.

$$\oint_{\substack{\text{trajectoire}\\ \text{fermée}}} \vec{D}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_{\substack{\text{Surface délimitée}\\ \text{par la trajectoire}}} \vec{\nabla}\times\vec{D}\cdot\overrightarrow{dA}$$

En utilisant le théorème de Stokes, on arrive à

$$
\begin{aligned}
C &= \oint\limits_{trajectoire} \left(\int \frac{\mu_0}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} \vec{J}' \times \left(\vec{r}-\vec{r}'\right) dV' \right) \cdot d\vec{l} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{surface} \vec{\nabla}_r \times \left(\int \frac{\mu_0}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} \vec{J}' \times \left(\vec{r}-\vec{r}'\right) dV' \right) \cdot d\vec{A} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\int\limits_{surface} \left(\vec{\nabla}_r \times \frac{\mu_0}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} \vec{J}' \times \left(\vec{r}-\vec{r}'\right) \right) \cdot d\vec{A} \right) dV'
\end{aligned}
$$

(On a mis un petit r à l'opérateur pour se rappeler que la dérivée se fait par rapport à r avec cet opérateur et non pas par rapport à r'. Comme l'intégrale se fait par rapport aux coordonnées primes et que l'opérateur se fait par rapport aux coordonnées pas primes, on a pu inverser l'ordre d'intégration.)

Or,

$$
\vec{\nabla} \times \frac{\vec{J}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} = \frac{\vec{J}' \times \left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}
$$

Ce qui signifie qu'on peut écrire

$$
C = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\int\limits_{surface} \vec{\nabla}_r \times \left(\vec{\nabla}_r \times \frac{\vec{J}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} \right) \cdot d\vec{A} \right) dV'
$$

Il y a une identité mathématique qui dit que

$$
\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}\right) - \nabla^2 \vec{V}
$$

On arrive donc à

$$
C = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\int\limits_{surface} \left(\vec{\nabla}_r \left(\vec{\nabla}_r \cdot \frac{\vec{J}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} \right) - \nabla_r^2 \frac{\vec{J}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} \right) \cdot d\vec{A} \right) dV'
$$

Or, le premier terme est

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\int\limits_{surface} \vec{\nabla}_r \left(\vec{\nabla}_r \cdot \frac{\vec{J}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} \right) \cdot d\vec{A} \right) dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{surface} \vec{\nabla}_r \left(\int \vec{\nabla}_r \cdot \frac{\vec{J}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} dV' \right) \cdot d\vec{A}
\end{aligned}
$$

L'intégrale

$$\int \vec{\nabla}_r \cdot \frac{\vec{J}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

se fait sur tout l'espace. Or, il y a le théorème de la divergence dit que

$$\int_{\text{volume}} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dV = \oint_{\substack{\text{surface qui englobe} \\ \text{tout le volume}}} \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

Ainsi, on a

$$\int \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{J}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' = \oint \frac{\vec{J}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \cdot d\vec{A}'$$

Mais comme on doit intégrer sur tout l'espace, cette surface est à l'infini. Cette valeur est nulle si mon courant est confiné dans un volume fini ou s'il diminue assez rapidement avec la distance. Ainsi, ce terme est nul. Il reste donc

$$C = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\int_{surface} \left(-\nabla_r^2 \frac{\vec{J}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{A} \right) dV'$$

On va maintenant calculer

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_{r'} \cdot \frac{\vec{J}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{J}' + \vec{J}' \cdot \vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ &= \vec{J}' \cdot \vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \end{aligned}$$

Le premier terme est nul parce que la divergence de J doit être nulle. Ce résultat vient de la conservation de la charge. En appliquant l'opérateur une seconde fois, on arrive à

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_{r'} \left(\vec{\nabla}_{r'} \cdot \frac{\vec{J}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) &= \vec{J}' \cdot \nabla_{r'}{}^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ &= \vec{J}' \cdot \nabla_r{}^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, on a changé le variable de la dérivée de r à r'. Avec notre fonction qui dépend uniquement de $\vec{r}-\vec{r}'$, cela change le signe deux fois, ce qui revient au même signe.

Maintenant, on a

$$C = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\int\limits_{surface}\left(\vec{J}'\nabla_r^2\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\right)\cdot d\vec{A}\right)dV'$$

Ce Laplacien dans l'intégral est

$$\nabla_r^2\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} = -4\pi\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)$$

où δ est la fonction de Dirac. On arrive alors à

$$\begin{aligned}
C &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\int\limits_{surface}\left(\vec{J}'\nabla_{r'}^2\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\right)\cdot d\vec{A}\right)dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\int\limits_{surface}\vec{J}'\cdot 4\pi\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)\cdot d\vec{A}\right)dV' \\
&= \mu_0\int\left(\int\limits_{surface}\vec{J}'\cdot\int\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)dV'\cdot d\vec{A}\right) \\
&= \mu_0\int\limits_{surface}\vec{J}'\cdot d\vec{A} \\
&= \mu_0 I_{\text{int}}
\end{aligned}$$

Et voilà!