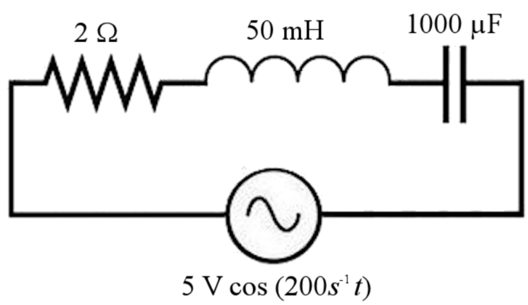
6. Les équations différentielles - extra

6. Applications pour des équations d'ordre 2

Un circuit électrique

Supposons qu'on ait le circuit suivant.



On veut savoir l'amplitude du courant dans ce circuit au bout d'un temps assez long.

En appliquant la loi de Kirchhoff (la somme des différences de potentiel est nulle sur une boucle fermée), on arrive à

$$580V\cos\left(200s^{-1}t\right)-RI-L\cdot\frac{dI}{dt}-\frac{Q}{C}=0$$

$$580V\cos\left(200s^{-1}t\right)-2\Omega\cdot I-0{,}05H\cdot\frac{dI}{dt}-\frac{Q}{10^{-3}F}=0$$

Mais puisque le courant fait varier la charge du condensateur, on a

$$I=\frac{dQ}{dt}$$

On peut donc écrire cette équation sous la forme suivante.

$$0{,}05H\cdot\frac{d^2Q}{dt^2}+2\Omega\cdot\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{10^{-3}F}=580V\cos\left(200s^{-1}t\right)$$

C'est une équation linéaire à coefficients constants non homogène. Commençons avec la solution de l'équation homogène.

$$0,05H\cdot\frac{d^2Q}{dt^2}+2\Omega\cdot\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{10^{-3}F}=0$$

L'équation caractéristique de cette équation est

$$0,05H\cdot\lambda^2+2\Omega\cdot\lambda+\frac{1}{10^{-3}F}=0$$

Les solutions de cette équation sont

$$\begin{aligned}\lambda&=\frac{-2\Omega\pm\sqrt{(2\Omega)^2-4\cdot 0,05H\cdot\frac{1}{10^{-3}F}}}{0,1H}\\&=\frac{-2\Omega\pm\sqrt{-196\Omega^2}}{0,1H}\\&=\frac{-2\Omega\pm 14i\Omega}{0,1H}\\&=(20\pm 140i)s^{-1}\end{aligned}$$

La solution de cette équation est

$$Q_h=e^{-20s^{-1}\cdot t}\left(A\cos\left(140s^{-1}\cdot t\right)+B\sin\left(140s^{-1}\cdot t\right)\right)$$

Avec cette charge, on obtient un courant (il faut dériver pour obtenir la formule du courant.) Toutefois, il y a une exponentielle qui diminue rapidement avec le temps devant cette fonction. Cette exponentielle sera présente dans tous les termes de la dérivée, ce qui signifie que la valeur de la dérivée diminue rapidement avec le temps. Au bout d'un temps pas si long que ça (1 seconde est suffisante), la valeur de cette dérivée sera négligeable.

On va voir maintenant ce que nous donne la solution non homogène. Puisque $f(t)$ à la forme d'un cosinus, alors la solution particulière soit avoir la forme suivante.

$$Q_{nh}=K_1\cos\left(200s^{-1}t\right)+K_2\sin\left(200s^{-1}t\right)$$

On trouve la valeur des coefficients en remplaçant dans l'équation différentielle.

$$0,05H \cdot \frac{d^2Q}{dt^2} + 2\Omega \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{10^{-3}F} = 500V\cos\left(200s^{-1}t\right)$$

$$0,05H \cdot \frac{d^2\left(K_1\cos\left(200s^{-1}t\right) + K_2\sin\left(200s^{-1}t\right)\right)}{dt^2} + 2\Omega \cdot \frac{d\left(K_1\cos\left(200s^{-1}t\right) + K_2\sin\left(200s^{-1}t\right)\right)}{dt}$$
$$+ \frac{K_1\cos\left(200s^{-1}t\right) + K_2\sin\left(200s^{-1}t\right)}{10^{-3}F} = 580V\cos\left(200s^{-1}t\right)$$

$$0,05H \cdot \left(200s^{-1}\right)^2\left(-K_1\cos\left(200s^{-1}t\right) - K_2\sin\left(200s^{-1}t\right)\right)$$
$$+2\Omega \cdot \left(200s^{-1}\right)\left(-K_1\sin\left(200s^{-1}t\right) + K_2\cos\left(200s^{-1}t\right)\right)$$
$$+ \frac{K_1\cos\left(200s^{-1}t\right) + K_2\sin\left(200s^{-1}t\right)}{10^{-3}F} = 580V\cos\left(200s^{-1}t\right)$$

En égalisant les coefficients des cosinus de chaque côté, on arrive à

$$-0,05H \cdot \left(200s^{-1}\right)^2 K_1 + 2\Omega \cdot \left(200s^{-1}\right)K_2 + \frac{K_1}{10^{-3}F} = 580V$$
$$-2000\tfrac{H}{s^2}K_1 + 400\tfrac{\Omega}{s}K_2 + 1000\tfrac{1}{F}K_1 = 580V$$
$$-200\tfrac{H}{s^2}K_1 + 40\tfrac{\Omega}{s}K_2 + 100\tfrac{1}{F}K_1 = 58V$$
$$-100K_1 + 40K_2 = 58C$$

En égalisant les coefficients des sinus de chaque côté, on arrive à

$$-0,05H \cdot \left(200s^{-1}\right)^2 K_2 - 2\Omega \cdot \left(200s^{-1}\right)K_1 + \frac{K_2}{10^{-3}F} = 0$$
$$-2000\tfrac{H}{s^2}K_2 - 400\tfrac{\Omega}{s}K_1 + 1000\tfrac{1}{F}K_2 = 0$$
$$-10K_2 - 2K_1 + 5K_2 = 0$$
$$-5K_2 - 2K_1 = 0$$

Nos deux équations sont donc

$$-300K_1 + 80K_2 = 1C$$
$$-5K_2 - 2K_1 = 0$$

Selon la deuxième équation, on a

$$K_1 = -\tfrac{5}{2} K_2$$

En remplaçant dans la première équation, on a

$$\begin{aligned}
-100K_1 + 40K_2 &= 58C \\
-100\tfrac{-5}{2}K_2 + 40K_2 &= 58C \\
250K_2 + 40K_2 &= 58C \\
K_2 &= 0,2C
\end{aligned}$$

De là, on a

$$\begin{aligned}
K_1 &= \tfrac{-5}{2}K_2 \\
&= \tfrac{-5}{2}\cdot 0,2C \\
&= -0,5C
\end{aligned}$$

On a donc

$$Q_{nh} = -0,5C\cdot\cos\left(200s^{-1}t\right) + 0,2C\cdot\sin\left(200s^{-1}t\right)$$

Toutefois, on a maintenant une solution sous la forme

$$Q_{nh} = K_1\cos(\omega t) + K_2\sin(\omega t)$$

Mais, pour obtenir l'amplitude du courant, il serait bien mieux d'avoir une solution sous la forme suivante.

$$Q_{nh} = Q_0\sin(\omega t + \phi)$$

Pas de problème. On peut écrire

$$\begin{aligned}
Q_{nh} &= K_1\cos(\omega t) + K_2\sin(\omega t) \\
&= \mathrm{Im}\left(iK_1\left(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right) + K_2\left(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right)\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(iK_1e^{i\omega t} + K_2e^{i\omega t}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\left(iK_1 + K_2\right)e^{i\omega t}\right)
\end{aligned}$$

On met alors le nombre $iK_1 + K_2$ en forme polaire. Le module de ce nombre est

$$\sqrt{K_1^2 + K_2^2}$$

Il y a un aussi une constante de phase ϕ, mais il n'est pas nécessaire de la trouver puisqu'on cherche uniquement l'amplitude. On a donc

$$\begin{aligned} Q_{nh} &= \text{Im}\left(\left(\sqrt{K_1^2 + K_2^2}e^{i\phi}\right)e^{i\omega t}\right) \\ &= \text{Im}\left(\sqrt{K_1^2 + K_2^2}e^{i\omega t+\phi}\right) \\ &= \text{Im}\left(\sqrt{K_1^2 + K_2^2}\left(\cos\left(\omega t + \phi\right) + i\sin\left(\omega t + \phi\right)\right)\right) \\ &= \sqrt{K_1^2 + K_2^2}\sin\left(\omega t + \phi\right) \end{aligned}$$

Dans notre exemple, on peut donc écrire la solution sous la forme suivante.

$$Q_{nh} = \sqrt{0,2^2 + 0,5^2}C \cdot \sin\left(200s^{-1} \cdot t + \phi\right)$$
$$Q_{nh} = \tfrac{\sqrt{29}}{10}C \cdot \sin\left(200s^{-1} \cdot t + \phi\right)$$

Le courant est la dérivée de cette fonction. On a donc

$$\begin{aligned} I &= \tfrac{\sqrt{29}}{10}C \cdot 200s^{-1} \cdot \cos\left(200s^{-1} \cdot t + \phi\right) \\ &= 20\sqrt{29}A \cdot \sin\left(200s^{-1} \cdot t + \phi\right) \end{aligned}$$

L'amplitude du courant est donc de

$$\begin{aligned} I_0 &= 20\sqrt{29}A \\ &\approx 107,7A \end{aligned}$$

Évidemment, ceux qui travaillent avec ce genre de circuit ne font pas cette solution au complet chaque fois. En faisant la solution générale de ce problème en laissant les variables R, L et C, on obtient une formule qui donne l'amplitude du courant. Si on le fait, on a alors l'équation suivante.

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=\varepsilon_0\cos(\omega t)$$

Ici, on va s'intéresser uniquement à la solution non homogène puisqu'on sait qu'au bout d'un certain temps, c'est la seule qui aura de l'importance. Puisque $f(t)$ à la forme d'un cosinus, alors la solution particulière soit avoir la forme suivante.

$$Q_{nh}=K_1\cos(\omega t)+K_2\sin(\omega t)$$

On trouve la valeur des coefficients en remplaçant dans l'équation différentielle.

$$\begin{aligned}
L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}&=\Delta V_0\cos(\omega t)\\
L\frac{d^2\left(K_1\cos(\omega t)+K_2\sin(\omega t)\right)}{dt^2}+R\frac{d\left(K_1\cos(\omega t)+K_2\sin(\omega t)\right)}{dt}&\\
+\frac{K_1\cos(\omega t)+K_2\sin(\omega t)}{C}&=\Delta V_0\cos(\omega t)\\
\omega^2L\left(-K_1\cos(\omega t)-K_2\sin(\omega t)\right)&\\
+\omega R\left(-K_1\sin(\omega t)+K_2\cos(\omega t)\right)&\\
+\frac{K_1\cos(\omega t)+K_2\sin(\omega t)}{C}&=\Delta V_0\cos(\omega t)
\end{aligned}$$

En égalisant les coefficients des cosinus de chaque côté, on arrive à

$$-\omega^2LK_1+\omega RK_2+\frac{K_1}{C}=\Delta V_0$$
$$\left(-\omega^2L+\tfrac{1}{C}\right)K_1+\omega RK_2=\Delta V_0$$

En égalisant les coefficients des sinus de chaque côté, on arrive à

$$-\omega^2LK_2-\omega RK_1+\frac{K_2}{C}=0$$
$$\left(-\omega^2L+\tfrac{1}{C}\right)K_2-\omega RK_1=0$$

Nos deux équations sont donc

$$\left(-\omega^2 L + \tfrac{1}{C}\right) K_1 + \omega R K_2 = \Delta V_0$$
$$\left(-\omega^2 L + \tfrac{1}{C}\right) K_2 - \omega R K_1 = 0$$

Selon la deuxième équation, on a

$$\left(-\omega^2 L + \tfrac{1}{C}\right) K_2 = \omega R K_1$$
$$K_2 = \frac{\omega R}{-\omega^2 L + \frac{1}{C}} K_1$$

En remplaçant dans la première équation, on a

$$\left(-\omega^2 L + \tfrac{1}{C}\right) K_1 + \omega R \frac{\omega R}{-\omega^2 L + \frac{1}{C}} K_1 = \Delta V_0$$
$$\left(-\omega^2 L + \tfrac{1}{C}\right)^2 K_1 + \left(\omega R\right)^2 K_1 = \Delta V_0 \left(-\omega^2 L + \tfrac{1}{C}\right)$$
$$K_1 = \frac{\Delta V_0 \left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)}{\left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)^2 + \left(\omega R\right)^2}$$

De là, on trouve

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{\omega R}{-\omega^2 L + \frac{1}{C}} K_1 \\ &= \frac{\omega R}{-\omega^2 L + \frac{1}{C}} \frac{\Delta V_0 \left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)}{\left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)^2 + \left(\omega R\right)^2} \\ &= \frac{\Delta V_0 \omega R}{\left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)^2 + \left(\omega R\right)^2} \end{aligned}$$

Toutefois, on a maintenant une solution sous la forme

$$Q_{nh} = K_1 \cos\left(\omega t\right) + K_2 \sin\left(\omega t\right)$$

Mais il serait bien mieux d'avoir une solution sous la forme

$$Q_{nh} = Q_0 \sin\left(\omega t + \phi\right)$$

On a vu précédemment qu'on obtient alors

$$Q_{nh} = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}\,\sin\left(\omega t + \phi\right)$$

Le courant, qui est la dérivée de la charge, est alors

$$I = \omega\sqrt{K_1^2 + K_2^2}\,\cos\left(\omega t + \phi\right)$$

L'amplitude du courant est alors

$$I_0 = \omega\sqrt{K_1^2 + K_2^2}$$

Avec les valeurs de K_1 et K_2 trouvées précédemment, on a

$$I_0 = \omega\sqrt{\left(\frac{\Delta V_0\left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)}{\left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)^2 + \left(\omega R\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V_0 \omega R}{\left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)^2 + \left(\omega R\right)^2}\right)^2}$$

Ce qui donne

$$I_0 = \frac{\omega \Delta V_0}{\left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)^2 + \left(\omega R\right)^2}\sqrt{\left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)^2 + \left(\omega R\right)^2}$$

$$I_0 = \frac{\omega \Delta V_0}{\sqrt{\left(-\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)^2 + \left(\omega R\right)^2}}$$

$$I_0 = \frac{\Delta V_0}{\sqrt{\left(-\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2 + \left(R\right)^2}}$$

C'est en effet, la formule du courant dans ce genre circuit qu'on a vu en physique (on remarque que le diviseur est l'impédance de ce circuit.)

Méthode complexe pour y_{nh}

Voici une méthode qui simplifie un peu les calculs quand on doit trouver y_{nh} d'une équation linéaire à coefficients constants non homogène si $f(x)$ est un sinus ou un cosinus. Dans ce cas, on peut poser que

$$y_{nh} = Ae^{i\omega t} \quad \text{si } f(x) = C\sin\omega t \quad \text{ou si } f(x) = C\cos\omega t$$

Si on a un cosinus, on gardera uniquement la partie réelle de y_{nh} et si on a un sinus, on gardera uniquement la partie imaginaire de y_{nh}.

Voyons ce que ça donne pour notre exemple du circuit électrique. L'équation était

$$0,05H \cdot \frac{d^2Q}{dt^2} + 2\Omega \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{10^{-3}F} = 580V\cos\left(200s^{-1}t\right)$$

On va alors travailler avec

$$0,05H \cdot \frac{d^2Q}{dt^2} + 2\Omega \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{10^{-3}F} = 580Ve^{i200s^{-1}\cdot t}$$

On pose alors

$$Q_{nh} = Ae^{i200s^{-1}\cdot t}$$

En remplaçant dans l'équation, on a

$$-0,05H \cdot \left(200s^{-1}\right)^2 Ae^{i200s^{-1}\cdot t} + 2\Omega \cdot i\left(200s^{-1}\right)Ae^{i200s^{-1}\cdot t} + \frac{Ae^{i200s^{-1}\cdot t}}{10^{-3}F} = 580V \cdot e^{i200s^{-1}\cdot t}$$

On obtient alors

$$-0,05H\cdot\left(200s^{-1}\right)^2A+2\Omega\cdot i\left(200s^{-1}\right)A+\frac{A}{10^{-3}F}=580V$$
$$-2000\tfrac{1}{F}A+i400\tfrac{1}{F}A+1000\tfrac{1}{F}A=580V$$
$$-2000A+i400A+1000A=580C$$
$$-200A+i40A+100A=58C$$
$$\left(-100+40i\right)A=58C$$
$$A=\frac{58C}{-100+40i}$$

On peut alors écrire

$$A=\frac{58C}{-100+40i}\cdot\frac{-100-40i}{-100-40i}$$
$$A=\frac{\left(-5800-2320i\right)C}{100^2+40^2}$$
$$A=\left(-0,5-0,2i\right)C$$

La solution est donc

$$\begin{aligned}Q_{nh}&=Ae^{i200s^{-1}\cdot t}\\&=\left(-0,5-0,2i\right)C\cdot e^{i200s^{-1}\cdot t}\end{aligned}$$

La partie réelle de cette solution est

$$\begin{aligned}Q_{nh}&=\mathrm{Re}\left(\left(-0,5-0,2i\right)C\cdot\left(\cos\left(200s^{-1}t\right)+i\sin\left(200s^{-1}t\right)\right)\right)\\&=\mathrm{Re}\left(-0,5\cdot\cos\left(200s^{-1}t\right)-i0,2\cos\left(200s^{-1}t\right)-i0,5\sin\left(200s^{-1}t\right)+0,2\sin\left(200s^{-1}t\right)\right)C\\&=-0,5C\cdot\cos\left(200s^{-1}t\right)+0,2C\cdot\sin\left(200s^{-1}t\right)\end{aligned}$$

C'est la même solution que celle obtenue précédemment.

7. Équation linéaire d'ordre n à coefficients constants

Une équation linéaire d'ordre *n* à coefficients constants est une équation ayant la forme suivante.

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-1}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_2\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 = f(x)$$

où les $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ sont des nombres.

Si $f(x) = 0$, alors on a une équation homogène. Si $f(x) \neq 0$, alors on a une équation non homogène.

L'opérateur différentiel

Un opérateur transforme une équation en une autre équation. C'est différent d'une fonction, qui transforme un nombre en un autre nombre.

En fait, la dérivée est un opérateur. Elle transforme une fonction (x^2 par exemple) et une autre fonction ($2x$).

Cet opérateur est l'opérateur différentiel. On peut noter cet opérateur D. On a alors

$$Dx^2 = 2x$$
$$D\sin x = \cos x$$

On peut appliquer l'opérateur 2 fois pour faire la deuxième dérivée

$$D^2x^5 = 20x^3$$
$$D^2 \sin x = -\sin x$$

ou encore plus de fois si on veut

$$D^3x^5 = 60x^2$$
$$D^4x^5 = 60x$$
$$D^5x^5 = 60$$

On peut construire d'autres opérateurs à partir de l'opérateur D. Par exemple, on pourrait avoir un opérateur

$$S = D^2 - 2D + 3$$

Si on applique cet opérateur à la fonction x^3, on a

$$\begin{aligned} Sx^3 &= D^2x^3 - 2Dx^3 + 3x^3 \\ &= 6x - 2 \cdot 2x^2 + 3x^3 \\ &= 6x - 4x^2 + 3x^3 \end{aligned}$$

C'est encore un opérateur puisqu'on a transformé une fonction (x^3) en une autre fonction ($6x - 4x^2 + 3x^3$).

Avec cette notation, on peut écrire nos équations différentielles avec l'opérateur D. Par exemple, l'équation

$$y''' + 2y'' + 3y' - y = 0$$

devient

$$\left(D^3 + 2D^2 + 3D - 1\right) y = 0$$

Résolution d'une équation différentielle avec les opérateurs

<u>Équation linéaire homogène</u>

On a une équation différentielle linéaire homogène.

$$\left(a_n D_n + a_{n-1} D^{n-1} + a_{n-2} D^{n-2} + \ldots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0\right) y = 0$$

Tout ce qu'il y a entre parenthèses est un polynôme de D. On peut alors factoriser ce polynôme pour arriver à

$$\left((D - r_1)^{n_1} (D - r_2)^{n_2} (D - r_3)^{n_3} \ldots (D - r_k)^{n_k}\right) y = 0$$

On a alors les équations suivantes.

$$\begin{aligned}
&(D-r_1)^{n_1}\ y=0\\
&(D-r_2)^{n_2}\ y=0\\
&\vdots\\
&(D-r_k)^{n_k}\ y=0
\end{aligned}$$

Cela permet donc de transformer l'équation linéaire de degré n en équations de degré inférieur (1 ou 2), qu'on pourra résoudre.

Par exemple, si on a l'équation

$$y''+y'-6y=0$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}
(D^2+D-6)\,y&=0\\
(D+3)(D-2)\,y&=0
\end{aligned}$$

Cela nous mène donc aux deux équations suivantes.

$$\begin{aligned}
(D+3)\,y&=0\\
(D-2)\,y&=0
\end{aligned}$$

Maintenant, cela nous amène à résoudre des équations du type

$$(D-r)^n\ y=0$$

Pour y arriver, on va utiliser la propriété suivante.

$$D^n e^{-rx} f(x)=e^{-rx}(D-r)^n\ f(x)$$

Démonstration

Cela se démontre en montrant que chaque fois qu'on applique l'opérateur D, on voit apparaitre l'opérateur $D - r$.

$$\begin{aligned} D^n e^{-rx} f(x) &= D^{n-1}\left(De^{-rx} f(x)\right) \\ &= D^{n-1}\left(D\left(e^{-rx}\right) f(x) + e^{-rx} Df(x)\right) \\ &= D^{n-1}\left(-re^{-rx} f(x) + e^{-rx} Df(x)\right) \\ &= D^{n-1}\left(e^{-rx}(D-r) f(x)\right) \end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur n fois, l'opérateur apparaitra n fois et on aura

$$D^n e^{-rx} f(x) = e^{-rx}(D-r)^n f(x)$$

C'est cette propriété qui va nous permettre de résoudre. On avait

$$(D-r)^n y = 0$$

Si on multiplie par e^{-rx}, on a

$$e^{-rx}(D-r)^n y = 0$$

Or, c'est exactement le terme de droite de ce qu'on a avec notre propriété (sauf que $f(x)$ est appelé y). L'équation devient donc

$$(D-r)^n y = 0 \quad \rightarrow \quad D^n\left(e^{-rx} y\right) = 0$$

Si on intègre n fois, on arrive à

$$e^{-rx} y = K_{n-1}x^{n-1} + K_{n-2}x^{n-2} + \ldots K_1 x + K_0$$

où les K sont des constantes d'intégration. La solution est donc

$$y = e^{rx}\left(K_{n-1}x^{n-1} + K_{n-2}x^{n-2} + \dots K_1 x + K_0\right)$$

Si on fait cela pour chacune des parties ayant la forme

$$\left(D-r\right)^n y = 0$$

On obtient plusieurs solutions. La solution de l'équation différentielle est la somme de toutes ces solutions.

Solution de l'équation linéaire d'ordre n à coefficients constants homogène

On commence par factoriser l'équation

$$\left(a_n D_n + a_{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}D^{n-2} + \dots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0\right) y = 0$$

Pour obtenir

$$\left(\left(D-r_1\right)^{n_1}\left(D-r_2\right)^{n_2}\left(D-r_3\right)^{n_3}\dots\left(D-r_k\right)^{n_k}\right) y = 0$$

La solution de chacune de ces parties

$$\left(D-r_1\right)^{n_1} y = 0$$

est

$$y_1 = e^{r_1 x}\left(K_{n-1}x^{n-1} + K_{n-2}x^{n-2} + \dots K_1 x + K_0\right)$$

La solution de l'équation initiale est la somme de ces solutions.

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_k$$

Dans cette méthode, l'étape difficile est la factorisation. Pas toujours facile de factoriser un polynôme de degré n.

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$$

Cette équation nous donne

$$\left(D^3 - 2D^2 - D + 2\right) y = 0$$

Tentons de factoriser

$$\begin{gathered}
\left(D^3 - D - 2D^2 + 2\right) y = 0 \\
\left(D\left(D^2 - 1\right) - 2\left(D^2 - 1\right)\right) y = 0 \\
\left(D - 2\right)\left(D^2 - 1\right) y = 0 \\
\left(D - 2\right)\left(D - 1\right)\left(D + 1\right) y = 0
\end{gathered}$$

Les trois racines sont donc 2, 1 et -1. La solution de chacune de ces parties est

$$\begin{aligned}
y_1 &= e^{2x}(A) \\
y_2 &= e^{x}(B) \\
y_3 &= e^{-x}(C)
\end{aligned}$$

La solution de l'équation est donc

$$y = Ae^{2x} + Be^{x} + Ce^{-x}$$

____

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$\frac{d^5y}{dx^5} - 3\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Cette équation nous donne

$$\left(D^5-3D^4+3D^3-D^2\right)y=0$$

Tentons de factoriser

$$\left(D^3-3D^2+3D-1\right)D^2y=0$$
$$\left(D-1\right)^3D^2y=0$$

Les deux racines sont donc 1 et 0. La solution de chacune de ces parties est

$$y_1=e^x\left(A_2x^2+A_1x+A_0\right)$$
$$y_2=e^0\left(B_1x+B_0\right)$$

La solution de l'équation est donc

$$y=e^x\left(A_2x^2+A_1x+A_0\right)+B_1x+B_0$$

____

Il se pourrait qu'une ou plusieurs racines soient un nombre complexe. Dans ce cas, on utilise $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ pour transformer la solution. Dans ce cas, on aura toujours deux racines qui seront des complexes conjuguées.

$$\left(D-(\alpha+i\beta)\right)^n\left(D-(\alpha-i\beta)\right)^n$$

Les solutions ont alors

$$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}P_{n-1}\left(x\right)$$
$$y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}Q_{n-1}\left(x\right)$$

où $P_{n-1}\left(x\right)$ et $Q_{n-1}\left(x\right)$ sont des polynômes de degré $n-1$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= e^{(\alpha+i\beta)x} P_{n-1}(x) + e^{(\alpha-i\beta)x} Q_{n-1}(x) \\ &= e^{\alpha x} e^{i\beta x} P_{n-1}(x) + e^{\alpha x} e^{-i\beta x} Q_{n-1}(x) \\ &= e^{\alpha x} (\cos\beta x + i\sin\beta x) P_{n-1}(x) + e^{\alpha x} (\cos\beta x + i\sin\beta x) Q_{n-1}(x) \\ &= e^{\alpha x} \cos\beta x \left(P_{n-1}(x) + Q_{n-1}(x) \right) + e^{\alpha x} \sin\beta x \left(iP_{n-1}(x) - iQ_{n-1}(x) \right) \end{aligned}$$

Mais $P_{n-1}(x) + Q_{n-1}(x)$ et $iP_{n-1}(x) - iQ_{n-1}(x)$ sont aussi des polynômes de degré $n - 1$. Si on appelle ces polynômes $R_{n-1}(x)$ et $S_{n-1}(x)$, alors la solution devient

$$y_1 + y_2 = e^{\alpha x} \cos(\beta x) \cdot R_{n-1}(x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x) \cdot S_{n-1}(x)$$

Solution si les racines sont des nombres complexes

Si on a deux racines de la forme

$$\left(D - (\alpha + i\beta)\right)^n \left(D - (\alpha - i\beta)\right)^n$$

Alors la solution de cette partie est

$$y_1 + y_2 = e^{\alpha x} \cos(\beta x) \cdot R_{n-1}(x) + e^{\alpha x} \sin(\beta x) \cdot S_{n-1}(x)$$

où $R_{n-1}(x)$ et $S_{n-1}(x)$ sont des polynômes de degré n - 1

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$y''' - 2y'' + 2y' = 0$$

Cette équation nous donne

$$\left(D^3 - 2D^2 + 2D\right) y = 0$$

Tentons de factoriser

$$\left(D^2-2D+2\right)Dy=0$$
$$\left(D-(1+i)\right)\left(D-(1-i)\right)Dy=0$$

Les trois racines sont donc 0, 1 + i et 1 - i. La solution de chacune de ces parties est

$$y_1=Ae^0$$
$$y_2+y_3=Be^x\cos x+Ce^x\sin x$$

La solution est donc

$$y=A+Be^x\cos x+Ce^x\sin x$$

____

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$y^{(7)}-18y^{(5)}+81y^{(3)}=0$$

Cette équation nous donne

$$\left(D^7+18D^5+81D^3\right)y=0$$

Tentons de factoriser

$$D^3\left(D^4+18D^2+81\right)y=0$$
$$D^3\left(D^2+9\right)^2y=0$$
$$D^3\left(D+3i\right)^2\left(D-3i\right)^2y=0$$

Les trois racines sont donc 0, 3i et-3i. La solution de chacune de ces parties est

$$y_1=e^0\left(A_2x^2+A_1x+A_0\right)$$
$$y_2+y_3=\left(B_1x+B_0\right)\cos 3x+\left(C_1x+C_0\right)\sin 3x$$

La solution de l'équation est donc

$$y = A_2x^2 + A_1x + A_0 + \left(B_1x + B_0\right)\cos 3x + \left(C_1x + C_0\right)\sin 3x$$

Équation linéaire non homogène

Si l'équation est non homogène, alors la solution de l'équation sera

$$y = y_h + y_{nh}$$

Pour simplifier, on va utiliser l'opérateur L pour représenter toute l'équation différentielle.

$$L = a_nD_n + a_{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}D^{n-2} + \ldots + a_2D^2 + a_1D + a_0$$

où les $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ sont des nombres.

L'équation différentielle est alors

$$L\left(y_h + y_{nh}\right) = f\left(x\right)$$
$$L\left(y_h\right) + L\left(y_{nh}\right) = f\left(x\right)$$

Mais puisque $L\left(y_h\right) = 0$ (c'est l'équation homogène), on a

$$Ly_{nh} = f\left(x\right)$$

On aura alors

$$y_{nh} = L^{-1}f\left(x\right)$$

où L^{-1} est l'opérateur inverse.

C'est bien beau, mais c'est quoi un opérateur inverse ?

Si l'opérateur est l'opérateur D, alors D^{-1} est l'opérateur qui fait l'opération inverse de ce que fait D. Cela veut dire que si on applique à la suite l'opérateur D et D^{-1}, alors la fonction ne devrait pas changer. Par exemple, on doit avoir

$$D^{-1}Dx^2 = x^2$$

Mais comme $Dx^2 = 2x$, on a

$$D^{-1}2x = x^2$$

Il semble bien que cet opérateur fait l'intégrale de la fonction. Comme D dérive la fonction, alors l'opérateur inverse D^{-1} est un opérateur qui fait l'intégrale de la fonction.

On pourrait montrer que l'opérateur D^{-1} possède les mêmes propriétés que D. Entre autres, la propriété

$$D^n e^{-rx} f(x) = e^{-rx}(D-r)^n f(x)$$

fonctionne aussi pour l'opérateur inverse.

$$D^{-n} e^{-rx} f(x) = e^{-rx}(D-r)^{-n} f(x)$$

Cette propriété va nous permettre d'obtenir y_{nh}. On a alors

$$\left((D-r_1)^{n_1}(D-r_2)^{n_2}(D-r_3)^{n_3}\ldots(D-r_k)^{n_k}\right)y_{nh} = f(x)$$
$$y_{nh} = (D-r_k)^{-n_k}\ldots(D-r_3)^{-n_3}(D-r_2)^{-n_2}(D-r_1)^{-n_1} f(x)$$

Le premier opérateur donne

$$(D-r_1)^{-n_1} f(x) = e^{r_1x}e^{-r_1x}(D-r_1)^{-n_1} f(x)$$

En utilisant la propriété

$$D^{-n} e^{-rx} f(x) = e^{-rx}(D-r)^{-n} f(x)$$

On arrive à

Opérateur inverse appliqué à $f(x)$

$$(D-r_k)^{-n_k} f(x) = e^{r_k x} D^{-n_k} e^{-r_k x} f(x)$$

On obtient alors la solution en intégrant n_k fois. On applique alors l'opérateur suivant en appliquant la même règle.

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$y'' - 4y' + 3y = 10e^{-2x}$$

Cette équation nous donne

$$(D^2 - 4D + 3)\, y = 10e^{-2x}$$

Commençons par trouver y_h.

$$(D^2 - 4D + 3)\, y_h = 0$$

En factorisant, on obtient

$$(D-3)(D-1)\, y_h = 0$$

Les trois racines sont donc 1 et 3. La solution de chacune de ces parties est

$$y_1 = Ae^{x}$$
$$y_2 = Be^{3x}$$

La solution de l'équation homogène est donc

$$y_h = Ae^{x} + Be^{3x}$$

Il faut maintenant s'attaquer à y_{nh}. On a alors

$$(D-3)(D-1)\,y_{nh} = 10e^{-2x}$$

On doit donc avoir

$$y_{nh} = (D-1)^{-1}(D-3)^{-1}10e^{-2x}$$

Commençons par le premier opérateur qui s'applique sur la fonction

$$(D-3)^{-1}10e^{-2x}$$

Selon notre propriété

$$(D-r_k)^{-n_k} f = e^{r_k x} D^{-n_k} e^{-r_k x} f$$

On obtient

$$\begin{aligned}(D-3)^{-1}10e^{-2x} &= e^{3x}D^{-1}e^{-3x}10e^{-2x}\\ &= e^{3x}D^{-1}10e^{-5x}\\ &= e^{3x}\int 10e^{-5x}dx\\ &= e^{3x}\frac{10}{5}e^{-5x}\\ &= 2e^{-2x}\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}y_{nh} &= (D-1)^{-1}(D-3)^{-1}10e^{-2x}\\ &= (D-1)^{-1}2e^{-2x}\end{aligned}$$

On peut ensuite appliquer le deuxième opérateur.

$$\begin{aligned}(D-1)^{-1}2e^{-2x} &= e^{x}D^{-1}e^{-x}2e^{-2x}\\ &= e^{x}D^{-1}2e^{-3x}\\ &= e^{x}\int 2e^{-3x}dx\\ &= e^{x}\frac{2}{3}e^{-3x}\\ &= \frac{2}{3}e^{-2x}\end{aligned}$$

C'est notre y_{nh}. Comme vous pouvez le constater, on ne s'occupe pas des constantes d'intégration en calculant y_{nh}.

La solution de l'équation est donc

$$y = Ae^{x} + Be^{3x} + \frac{2}{3}e^{-2x}$$

____

Voici une petite propriété intéressante. Si on a

$$D^{n}e^{\alpha x} = \alpha^{n}e^{\alpha x}$$

Cela implique que

$$(D-r)^{n}e^{\alpha x} = (\alpha - r)^{n}e^{\alpha x}$$

Ainsi, quand notre $f(x)$ est une exponentielle, on peut trouver la solution très rapidement. On a alors

$$\begin{aligned}y_{nh} &= (D-1)^{-1}(D-3)^{-1}10e^{-2x}\\ &= (-2-1)^{-1}(-2-3)^{-1}10e^{-2x}\\ &= \frac{10}{-3\cdot -5}e^{-2x}\\ &= \frac{2}{3}e^{-2x}\end{aligned}$$

(Malheureusement, ça ne fonctionne pas si l'exposant de l'exponentielle est le même exposant qu'une exponentielle dans la partie homogène. Dans ce cas, on aura une division par zéro avec cette méthode.)

Exemple

Quelle est la solution générale de l'équation suivante ?

$$y'' - 2y' - 15y = 5x^2$$

Cette équation nous donne

$$\left(D^2 - 2D + 15\right) y = 5x^2$$

Commençons par trouver y_h.

$$\left(D^2 - 2D + 15\right) y_h = 0$$

La factorisation donne

$$(D-5)(D+3)\, y_h = 0$$

Les trois racines sont donc 5 et -3. La solution de chacune de ces parties est

$$y_1 = Ae^{5x}$$
$$y_2 = Be^{-3x}$$

La solution de l'équation homogène est donc

$$y_h = Ae^{5x} + Be^{-3x}$$

Il faut maintenant s'attaquer à y_{nh}. On a alors

$$(D-5)(D+3)\, y_{nh} = 5x^2$$

On a alors

$$y_{nh} = (D+3)^{-1}(D-5)^{-1}5x^2$$

Commençons par le premier opérateur qui s'applique sur la fonction

$$(D-5)^{-1}5x^2$$

On a

$$\begin{aligned}(D-5)^{-1}5x^2 &= e^{5x}D^{-1}e^{-5x}5x^2 \\ &= e^{5x}\int 5x^2e^{-5x}dx \\ &= e^{5x}\left(\frac{-2}{25}-\frac{2x}{5}-x^2\right)e^{-5x} \\ &= \frac{-2}{25}-\frac{2x}{5}-x^2\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}y_{nh} &= (D+3)^{-1}(D-5)^{-1}5x^2 \\ &= (D+3)^{-1}\left(\frac{-2}{25}-\frac{2x}{5}-x^2\right)\end{aligned}$$

On peut ensuite appliquer le deuxième opérateur

$$\begin{aligned}(D+3)^{-1}\left(\frac{-2}{25}-\frac{2x}{5}-x^2\right) &= e^{-3x}D^{-1}e^{3x}\left(\frac{-2}{25}-\frac{2x}{5}-x^2\right) \\ &= e^{-3x}\int e^{3x}\left(\frac{-2}{25}-\frac{2x}{5}-x^2\right)dx \\ &= e^{-3x}\left(\frac{-38}{675}+\frac{4x}{45}-\frac{x^2}{3}\right)e^{3x} \\ &= \frac{-38}{675}+\frac{4x}{45}-\frac{x^2}{3}\end{aligned}$$

C'est notre y_{nh}. La solution de l'équation est donc

$$y = Ae^{5x} + Be^{-3x} + \frac{-38}{675} + \frac{4x}{45} - \frac{x^2}{3}$$

____

Notez aussi qu'on peut faire la série suivante.

$$\begin{aligned}(D+r)^{-1} &= \frac{1}{D+r} \\ &= \frac{1}{r} - \frac{D}{r^2} + \frac{D^2}{r^3} - \frac{D^3}{r^4} + \dots\end{aligned}$$

Puisque c'est une série infinie, ça s'applique assez bien quand $f(x)$ est un polynôme puisque la série se terminera à un certain moment. Voyons si ça marche en prenant le y_{nh} de notre dernier exemple.

$$y_{nh} = (D+3)^{-1}(D-5)^{-1}5x^2$$

Le premier opérateur donne

$$\begin{aligned}(D-5)^{-1}5x^2 &= \left(\frac{1}{-5} - \frac{D}{25} + \frac{D^2}{-125}\right)5x^2 \\ &= \frac{5x^2}{-5} - \frac{10x}{25} + \frac{10}{-125} \\ &= -x^2 - \frac{2x}{5} - \frac{2}{25}\end{aligned}$$

Le deuxième opérateur donne

$$\begin{aligned}(D+3)^{-1}\left(-x^2 - \frac{2x}{5} - \frac{2}{25}\right) &= \left(\frac{1}{3} - \frac{D}{9} + \frac{D}{27}\right)\left(-x^2 - \frac{2x}{5} - \frac{2}{25}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(-x^2 - \frac{2x}{5} - \frac{2}{25}\right) - \frac{D}{9}\left(-x^2 - \frac{2x}{5} - \frac{2}{25}\right) + \frac{D}{27}\left(-x^2 - \frac{2x}{5} - \frac{2}{25}\right) \\ &= \left(\frac{-x^2}{3} - \frac{2x}{15} - \frac{2}{75}\right) + \left(\frac{2x}{9} + \frac{2}{45}\right) + \left(\frac{-2}{27}\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{-x^2}{3}+\left(\frac{-2}{15}+\frac{2}{9}\right)x+\left(\frac{-2}{75}+\frac{2}{45}-\frac{2}{27}\right)$$
$$=\frac{-x^2}{3}+\frac{4x}{45}+\frac{-38}{675}$$

Cool…On calcule une intégrale en faisant des dérivées !

8. Résolution d'équations différentielles avec des séries

Pour trouver la solution d'une équation différentielle, on peut aussi tenter la méthode des séries. Avec cette méthode, on suppose que la solution aura la forme suivante.

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

Il ne restera qu'à trouver les coefficients de cette équation. Il y aura quelques coefficients qu'on ne pourra pas trouver. C'est parce que ceux-ci correspondent aux constantes d'intégration. Le nombre de coefficients qu'on ne peut pas trouver est toujours égal à l'ordre de l'équation.

On va faire un petit test pour voir comment fonctionne cette méthode et aussi pour voir si elle fonctionne. On va donc utiliser cette méthode pour résoudre l'équation suivante.

$$y'-y=0$$

En prenant les méthodes qu'on a vues précédemment, on peut facilement trouver que la solution de cette équation différentielle à variable séparable est $y = Ae^x$. Voyons ce que donne la méthode des séries. Si

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots$$

alors

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\ldots$$

En remplaçant dans l'équation, on a

$$y' - y = 0$$
$$\left(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \dots\right) + \dots - \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots\right) = 0$$
$$\left(a_1 - a_0\right) + \left(2a_2 - a_1\right)x + \left(3a_3 - a_2\right)x^2 + \left(4a_4 - a_3\right)x^3 + \left(5a_5 - a_4\right)x^4 + \dots = 0$$

Les coefficients du polynôme doivent être les mêmes de chaque côté de l'équation. Comme tous les coefficients de droite sont nuls, tous les coefficients du polynôme de gauche doivent aussi être nuls. On a donc

$$\begin{gathered} a_1 - a_0 = 0 \\ 2a_2 - a_1 = 0 \\ 3a_3 - a_2 = 0 \\ 4a_4 - a_3 = 0 \\ 5a_5 - a_4 = 0 \\ \vdots \end{gathered}$$

La première équation nous donne

$$a_1 = a_0$$

La deuxième équation donne

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}$$

La troisième équation donne

$$a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{2 \cdot 3}$$

La quatrième équation donne

$$a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

La cinquième équation donne

$$a_5 = \frac{a_4}{5} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

On commence à voir la régularité. La solution est donc

$$y = a_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \right)$$

Or, cette série est la série d'une fonction exponentielle. La solution est donc

$$y = a_0 e^x$$

C'est bien la solution de cette équation !

Évidemment, la solution n'est valable que sur l'intervalle de convergence de la série. Dans le cas de la série de la fonction exponentielle, l'intervalle de convergence est entre -∞ et ∞.

Exemple

En utilisant la méthode des séries, trouvez la solution générale de l'équation suivante.

$$y' = 2xy$$

Si la solution est une série, on a

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots$$

Alors

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + \ldots$$

En remplaçant dans l'équation, on a

$$y' = 2xy$$
$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + \ldots = 2x\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \ldots\right)$$
$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + \ldots = 2a_0x + 2a_1x^2 + 2a_2x^3 + 2a_3x^4 + 2a_4x^5 + 2a_5x^6 \ldots$$

Les coefficients du polynôme doivent être les mêmes de chaque côté de l'équation.
On a donc

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ 2a_2 &= 2a_0 \\ 3a_3 &= 2a_1 \\ 4a_4 &= 2a_2 \\ 5a_5 &= 2a_3 \\ 6a_6 &= 2a_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

La première équation nous donne

$$a_1 = 0$$

La deuxième équation donne

$$a_2 = a_0$$

La troisième équation donne

$$a_3 = \frac{2a_1}{3} = 0$$

La quatrième équation donne

$$a_4 = \frac{2a_2}{4} = \frac{a_0}{2}$$

La cinquième équation donne

$$a_5 = \frac{2a_3}{5} = 0$$

La sixième équation donne

$$a_6 = \frac{2a_4}{6} = \frac{a_0}{2 \cdot 3}$$

On commence à voir la régularité. La solution est donc

$$y = a_0 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2 \cdot 3} + \frac{x^8}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^{10}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \right)$$

____

Notez que cette série est la série de la fonction

$$y = a_0 e^{x^2}$$

C'est la solution qu'on aurait trouvée en considérant cette équation comme une équation à variable séparable.

Exemple

En utilisant la méthode des séries, trouvez la solution générale de l'équation suivante.

$$y'' + y = 0$$

Si la solution est une série, on a

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + \ldots$$

Alors

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + 7a_7 x^6 + \ldots$$
$$y'' = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + 4 \cdot 5a_5 x^3 + 5 \cdot 6a_6 x^4 + 6 \cdot 7a_7 x^5 + 7 \cdot 8a_8 x^6 + \ldots$$

En remplaçant dans l'équation, on a

$$\begin{gathered}
y'' + y = 0 \\
\left(2a_2 + 2\cdot 3a_3x + 3\cdot 4a_4x^2 + 4\cdot 5a_5x^3 + 5\cdot 6a_6x^4 + 6\cdot 7a_7x^5 + 7\cdot 8a_8x^6 + \ldots\right) \\
\qquad - \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \ldots\right) = 0
\end{gathered}$$

Les coefficients du polynôme doivent être les mêmes de chaque côté de l'équation. On a donc

$$\begin{aligned}
2a_2 &= -a_0 \\
2\cdot 3a_3 &= -a_1 \\
3\cdot 4a_4 &= -a_2 \\
4\cdot 5a_5 &= -a_3 \\
5\cdot 6a_6 &= -a_4 \\
6\cdot 7a_7 &= -a_5 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

La première équation nous donne

$$a_2 = \frac{-a_0}{2}$$

La deuxième équation donne

$$a_3 = \frac{-a_1}{2\cdot 3}$$

La troisième équation donne

$$a_4 = \frac{-a_2}{3\cdot 4} = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 4}$$

La quatrième équation donne

$$a_5 = \frac{-a_2}{4\cdot 5} = \frac{a_1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

La cinquième équation donne

$$a_6 = \frac{-a_4}{5\cdot 6} = \frac{-a_0}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

La sixième équation donne

$$a_7 = \frac{a_5}{6\cdot 7} = \frac{-a_1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$$

On commence à voir la régularité. La solution est donc

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)$$

Notez que cette série est la série de la fonction

$$y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

C’est la solution qu’on aurait trouvée en considérant cette équation comme une équation linéaire d’ordre 2.

Notez aussi qu’on a maintenant deux coefficients indéterminés (a_0 et a_1) qui jouent le rôle de constante d’intégration. C’est ce qui va arriver avec une équation d’ordre 2.

Dans les exemples précédents, on a fait la solution d’équations qu’on aurait pu résoudre autrement. Cependant, il y a certaines équations qui résistent à toutes les techniques de résolution vues précédemment. Dans ce cas, on n’a pas le choix : il faut utiliser la méthode des séries.

C’est ce qui se produit avec certaines équations qui reviennent dans plusieurs situations. Parmi ces équations assez communes, on a l’équation de Legendre.

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + n\left(n+1\right) y = 0$$

Cette équation apparait, entre autres, dans le calcul de la forme des orbitales de l'atome d'hydrogène.

Exemple

En utilisant la méthode des séries, trouvez la solution générale de l'équation le Legendre pour $n = 3$.

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+12y=0$$

Si la solution est une série $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + \ldots$, alors

$$\begin{aligned}
y' &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + 7a_7 x^6 + \ldots \\
y'' &= 2a_2 + 2\cdot 3a_3 x + 3\cdot 4a_4 x^2 + 4\cdot 5a_5 x^3 + 5\cdot 6a_6 x^4 + 6\cdot 7a_7 x^5 + 7\cdot 8a_8 x^6 + \ldots
\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation, on a

$$\begin{aligned}
&\left(1-x^2\right)y''-2xy'+12y=0 \\
&\left(1-x^2\right)\left(2a_2 + 2\cdot 3a_3 x + 3\cdot 4a_4 x^2 + 4\cdot 5a_5 x^3 + 5\cdot 6a_6 x^4 + 6\cdot 7a_7 x^5 + 7\cdot 8a_8 x^6 + \ldots\right) \\
&\quad -2x\left(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + 7a_7 x^6 + \ldots\right) \\
&\quad +12\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + \ldots\right) = 0 \\
&\left(2a_2 + 2\cdot 3a_3 x + 3\cdot 4a_4 x^2 + 4\cdot 5a_5 x^3 + 5\cdot 6a_6 x^4 + 6\cdot 7a_7 x^5 + 7\cdot 8a_8 x^6 + \ldots\right) \\
&\quad -\left(2a_2 x^2 + 2\cdot 3a_3 x^3 + 3\cdot 4a_4 x^4 + 4\cdot 5a_5 x^5 + 5\cdot 6a_6 x^6 + \ldots\right) \\
&\quad -\left(2a_1 x + 4a_2 x^2 + 6a_3 x^3 + 8a_4 x^4 + 10a_5 x^5 + 12a_6 x^6 + \ldots\right) \\
&\quad +\left(12a_0 + 12a_1 x + 12a_2 x^2 + 12a_3 x^3 + 12a_4 x^4 + 12a_5 x^5 + 12a_6 x^6 + \ldots\right) = 0 \\
&\left(2a_2 + 12a_0\right) + \left(2\cdot 3a_3 - 2a_1 + 12a_1\right)x + \left(3\cdot 4a_4 - 2a_2 - 4a_2 + 12a_2\right)x^2 \\
&\quad + \left(4\cdot 5a_5 - 2\cdot 3a_3 - 6a_3 + 12a_3\right)x^3 + \left(5\cdot 6a_6 - 3\cdot 4a_4 - 8a_4 + 12a_4\right)x^4 \\
&\quad + \left(6\cdot 7a_7 - 4\cdot 5a_5 - 10a_5 + 12a_5\right)x^5 + \left(7\cdot 8a_8 - 5\cdot 6a_6 - 12a_6 + 12a_6\right)x^6 + \ldots = 0 \\
&\left(2a_2 + 12a_0\right) + \left(6a_3 + 10a_1\right)x + \left(12a_4 + 6a_2\right)x^2 + \left(20a_5\right)x^3 + \left(30a_6 - 8a_4\right)x^4 \\
&\quad + \left(42a_7 - 18a_5\right)x^5 + \left(56a_8 - 30a_6\right)x^6 = 0
\end{aligned}$$

Les coefficients du polynôme doivent être les mêmes de chaque côté de l'équation. On a donc

$$\begin{gathered}2a_2+12a_0=0\\6a_3+10a_1=0\\12a_4+6a_2=0\\20a_5=0\\30a_6-8a_4=0\\42a_7-18a_5=0\\56a_8-30a_6=0\\\vdots\end{gathered}$$

La première équation nous donne

$$a_2=-6a_0$$

La deuxième équation donne

$$a_3=-\frac{5a_1}{3}$$

La troisième équation donne

$$a_4=-\frac{a_2}{2}=3a_0$$

La quatrième équation donne

$$a_5=0$$

La cinquième équation donne

$$a_6=\frac{4a_4}{15}=\frac{4a_0}{5}$$

La sixième équation donne

$$a_7=\frac{9a_5}{21}=0$$

La septième équation donne

$$a_8 = \frac{15a_6}{28} = \frac{3a_0}{7}$$

On commence à voir la régularité. La solution est donc

$$y = a_0\left(1 - 6x^2 + 3x^4 + \frac{4}{5}x^6 + \frac{3}{7}x^8 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{5x^3}{3}\right)$$

____

Les polynômes obtenus convergent pour -1 < x < 1.

La deuxième partie de la solution est un polynôme qui a un nombre fini de termes. Ce polynôme est un *polynôme de Legendre de première espèce pour* $n = 3$, noté $P_3(x)$. En fait, ce qu'on a obtenu est un multiple de $P_3(x)$ puisqu'on ajuste les polynômes pour qu'ils aient une valeur de 1 à $x = 1$. Le polynôme est donc $P_3(x) = ½(5x^3 - 3x)$. C'est souvent cette partie qui est intéressante dans les applications.

La première partie de la solution a un nombre infini de termes. Cette partie est un multiple de la *fonction de Legendre de deuxième espèce pour* $n = 3$, notée $Q_3(x)$.

En fait, il y a plusieurs fonctions qui sont définies comme étant des solutions d'une équation différentielle. En voici quelques-unes.

$$\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + n\left(n+1\right)y = 0$$

$$\rightarrow \text{Fonctions de Legendre } P_n\left(x\right) \text{ et } Q_n\left(x\right)$$

$$\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + \left(n\left(n+1\right) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0$$

$$\rightarrow \text{Fonctions de Legendre associées } P_n^m\left(x\right) \text{ et } Q_n^m\left(x\right)$$

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - n^2\right)y = 0 \quad n \geq 0$$

$$\rightarrow \text{Fonctions de Bessel } J_n\left(x\right) \text{ et } Y_n\left(x\right)$$

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0 \quad n \geq 0$$

$\rightarrow$ Fonctions de Bessel modifiées $I_n(x)$ et $K_n(x)$

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

$\rightarrow$ Polynômes d'Hermite $H_n(x)$

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

$\rightarrow$ Polynômes de Laguerre $L_n(x)$

$$xy'' + (m+1-x)y' + (n-m)y = 0$$

$\rightarrow$ Polynômes de Laguerre associés $L_n^m(x)$

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0 \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

$\rightarrow$ Polynômes de Tchebychev $T_n(x)$ et $U_n(x)$

$$x(1-x)y'' + (c-(a+b+1)x)y' - aby = 0$$

$\rightarrow$ Fonctions hypergéométriques $F(a,b;c;x)$