Solutionnaire du chapitre 5

1.1 La première intégrale donne

$$\begin{aligned}\int_0^2\int_{-1}^3 xy\,dx\,dy &= \int_0^2\left[\tfrac{1}{2}x^2y\right]_{-1}^3 dy\\ &= \int_0^2\left(\left[\tfrac{1}{2}9y\right]-\left[\tfrac{1}{2}y\right]\right)dy\\ &= \int_0^2 4y\,dy\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}\int_0^2 4y\,dy &= \left[2y^2\right]_0^2\\ &= \left[2\cdot 4\right]-\left[2\cdot 0\right]\\ &= 8\end{aligned}$$

1.2 La première intégrale donne

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1\int_{-y}^y\left(2x^2+3y\right)dx\,dy &= \int_{-1}^1\left[\tfrac{2}{3}x^3+3xy\right]_{-y}^y dy\\ &= \int_{-1}^1\left(\left[\tfrac{2}{3}y^3+3yy\right]-\left[-\tfrac{2}{3}y^3-3yy\right]\right)dy\\ &= \int_{-1}^1\left(\tfrac{4}{3}y^3+6y^2\right)dy\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1\left(\tfrac{4}{3}y^3+6y^2\right)dy &= \left[\tfrac{1}{3}y^4+2y^3\right]_{-1}^1\\ &= \left(\left[\tfrac{1}{3}(1)^4+2(1)^3\right]-\left[\tfrac{1}{3}(-1)^4+2(-1)^3\right]\right)\\ &= \left(\left[\tfrac{1}{3}+2^3\right]-\left[\tfrac{1}{3}-2\right]\right)\\ &= 4\end{aligned}$$

1.3 La première intégrale donne

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \int_0^x \frac{\sin x}{x} dydx &= \int_0^\pi \left[\frac{\sin x}{x} y \right]_0^x dx \\ &= \int_0^\pi \left(\left[\frac{\sin x}{x} x \right] - \left[\frac{\sin x}{x} 0 \right] \right) dx \\ &= \int_0^\pi \sin x dx\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin x dx &= [-\cos x]_0^\pi \\ &= -\cos \pi - -\cos 0 \\ &= 2\end{aligned}$$

1.4 La première intégrale donne

$$\begin{aligned}\int_0^4 \int_0^y x\sqrt{x^2 + y^2} dxdy &= \int_0^4 \left[\frac{\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^y dy \\ &= \int_0^4 \left[\tfrac{1}{3}\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^y dy \\ &= \int_0^4 \left(\left[\tfrac{1}{3}\left(y^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} \right] - \left[\tfrac{1}{3}\left(0^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} \right] \right) dy \\ &= \int_0^4 \left(\left[\tfrac{1}{3}\left(2y^2\right)^{\frac{3}{2}} \right] - \left[\tfrac{1}{3}\left(y^2\right)^{\frac{3}{2}} \right] \right) dy \\ &= \tfrac{1}{3} \int_0^4 \left(2^{\frac{3}{2}} y^3 - y^3 \right) dy \\ &= \frac{2^{\frac{3}{2}} - 1}{3} \int_0^4 y^3 dy\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}\frac{2^{\frac{3}{2}}-1}{3}\int_0^4 y^3 dy &= \frac{2^{\frac{3}{2}}-1}{3}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^4\\ &= \frac{2^{\frac{3}{2}}-1}{3}\left(\left[\frac{4^4}{4}\right]-\left[\frac{0^4}{4}\right]\right)\\ &= \frac{2^{\frac{3}{2}}-1}{3}\cdot 4^3\\ &= \frac{128\sqrt{2}-64}{3}\approx 39{,}006\end{aligned}$$

1.5 La première intégrale donne

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{x-1}^{1-x^2}\left(x^2+y^2\right)dydx &= \int_0^1\left[x^2y+\tfrac{1}{3}y^3\right]_{x-1}^{1-x^2}dx\\ &= \int_0^1\left(\left[x^2\left(1-x^2\right)+\tfrac{1}{3}\left(1-x^2\right)^3\right]-\left[x^2\left(x-1\right)+\tfrac{1}{3}\left(x-1\right)^3\right]\right)dx\\ &= \int_0^1\left(\left[x^2-x^4+\tfrac{1}{3}\left(1-3x^2+3x^4-x^6\right)\right]-\left[x^3-x^2+\tfrac{1}{3}\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\right]\right)dx\\ &= \int_0^1\left(-\tfrac{1}{3}x^6+\left(-1+1\right)x^4+\left(-1-\tfrac{1}{3}\right)x^3+\left(1-1+1+1\right)x^2-x+\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}\right)\right)dx\\ &= \int_0^1\left(-\tfrac{1}{3}x^6-\tfrac{4}{3}x^3+2x^2-x+\tfrac{2}{3}\right)dx\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(-\tfrac{1}{3}x^6-\tfrac{4}{3}x^3+2x^2-x+\tfrac{2}{3}\right)dx &= \left[-\tfrac{1}{21}x^7-\tfrac{1}{3}x^4+\tfrac{2}{3}x^3-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{2}{3}x\right]_0^1\\ &= \left[-\tfrac{1}{21}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}\right]-\left[0\right]\\ &= \tfrac{19}{42}\end{aligned}$$

1.6 La première intégrale donne

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos y} x^3 \sin y\,dx\,dy &= \int_0^{\pi/4}\left[\tfrac{1}{4}x^4 \sin y\right]_0^{\cos y} dy\\ &= \int_0^{\pi/4}\left[\tfrac{1}{4}x^4 \sin y\right]_0^{\cos y} dy\\ &= \int_0^{\pi/4}\left(\left[\tfrac{1}{4}(\cos y)^4 \sin y\right]-[0]\right)dy\\ &= \tfrac{1}{4}\int_0^{\pi/4}(\cos y)^4 \sin y\,dy\end{aligned}$$

Pour faire la deuxième intégrale, on pose

$$\begin{aligned}u &= \cos y\\ du &= -\sin y\,dy\end{aligned}$$

La 2[e] intégrale est donc

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\int_0^{\pi/4}(\cos y)^4 \sin y\,dy &= -\tfrac{1}{4}\int_1^{\sqrt{2}/2} u^4\,du\\ &= -\tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{5}u^5\right]_1^{\sqrt{2}/2}\\ &= -\tfrac{1}{4}\left(\left[\tfrac{1}{5}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^5\right]-\left[\tfrac{1}{5}\right]\right)\\ &= \tfrac{1}{20}-\tfrac{4\sqrt{2}}{640}\\ &= \tfrac{1}{20}-\tfrac{\sqrt{2}}{160}\approx 0,04116\end{aligned}$$

1.7 La première intégrale donne

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dy\,dx &= \int_0^1\left[\frac{y}{\sqrt{x^2+1}}\right]_0^x dx\\ &= \int_0^1\left(\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]-[0]\right)dx\\ &= \int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx\end{aligned}$$

Pour faire la deuxième intégrale, on pose

$$\begin{aligned}u &= x^2+1\\ du &= 2x\end{aligned}$$

La 2[e] intégrale est donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{u}}du \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 u^{-1/2}du \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right]_1^2 \\ &= \sqrt{2}-1\end{aligned}$$

1.8 La première intégrale donne

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^y \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dxdy &= \int_0^1 [\operatorname{arsinh} x]_0^y dy \\ &= \int_0^1 \left([\operatorname{arsinh} y]-[0]\right)dy \\ &= \int_0^1 \operatorname{arsinh} y dy\end{aligned}$$

La 2e intégrale est

$$\begin{aligned}\int_0^1 \operatorname{arsinh} y dy &= \left[y \operatorname{arsinh} y - \sqrt{y^2+1}\right]_0^1 \\ &= \left[1\operatorname{arsinh}(1)-\sqrt{1^2+1}\right]-\left[0-\sqrt{0^2+1}\right] \\ &= \operatorname{arsinh}(1)-\sqrt{2}+1 \\ &\approx 0,46716\end{aligned}$$

1.9 La première intégrale donne

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^x\int_0^{xy} 182xy^2z^3dzdydx &= \int_0^1\int_0^x \left[\tfrac{91}{2}xy^2z^4\right]_0^{xy} dycx \\ &= \int_0^1\int_0^x \left(\left[\tfrac{91}{2}xy^2(xy)^4\right]-[0]\right)dydx \\ &= \int_0^1\int_0^x \tfrac{91}{2}x^5y^6dydx\end{aligned}$$

La 2e intégrale est

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^x \tfrac{91}{2}x^5y^6dydx &= \int_0^1\left[\tfrac{13}{2}x^5y^7\right]_0^x dx\\ &= \int_0^1\left(\left[\tfrac{13}{2}x^5x^7\right]-[0]\right)dx\\ &= \int_0^1 \tfrac{13}{2}x^{12}dx\end{aligned}$$

La 3e intégrale est

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tfrac{13}{2}x^{12}dx &= \left[\tfrac{1}{2}x^{13}\right]_0^1\\ &= \tfrac{1}{2}=0\\ &= \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

1.10 La première intégrale donne

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{2z^2}\int_y^z(4x-2y-z)\,dxdydz &= \int_0^1\int_0^{2z^2}\left[2x^2-2xy-xz\right]_y^z dydz\\ &= \int_0^1\int_0^{2z^2}\left(\left[2z^2-2zy-z^2\right]-\left[2y^2-2y^2-yz\right]\right)dydz\\ &= \int_0^1\int_0^{2z^2}\left(z^2-yz\right)dydz\end{aligned}$$

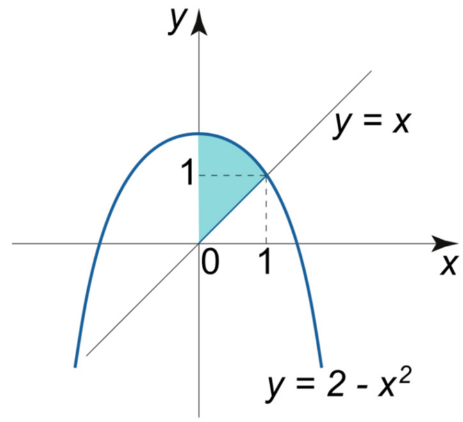
La 2e intégrale est

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{2z^2}\left(z^2-yz\right)dydz &= \int_0^1\left[z^2y-\tfrac{1}{2}y^2z\right]_0^{2z^2}dz\\ &= \int_0^1\left(\left[z^2 2z^2-\tfrac{1}{2}\left(2z^2\right)^2z\right]-[0]\right)dz\\ &= \int_0^1\left(2z^4-2z^5\right)dz\end{aligned}$$

La 3e intégrale est

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(2z^4-2z^5\right)dz &= \left[\tfrac{2}{5}z^5-\tfrac{2}{6}z^6\right]_0^1\\ &= \left[\tfrac{2}{5}1^5-\tfrac{2}{6}1^6\right]-[0]\\ &= \tfrac{2}{5}-\tfrac{1}{3}\\ &= \tfrac{1}{15}\end{aligned}$$

2.1 On va intégrer en y en premier.



En y, on va de $y = x$ à $y = 2 - x^2$.

En x, on va de 0 à 1.

On a donc

$$\iint (x - y)\,dA = \int_0^1 \int_x^{2-x^2} (x - y)\,dydx$$

La première intégrale est

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_x^{2-x^2} (x - y)\,dydx &= \int_0^1 \left[xy - \tfrac{1}{2} y^2 \right]_x^{2-x^2} dx \\
&= \int_0^1 \left(\left[x\left(2 - x^2\right) - \tfrac{1}{2}\left(2 - x^2\right)^2 \right] - \left[x^2 - \tfrac{1}{2} x^2 \right] \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\left[2x - x^3 - \tfrac{1}{2}\left(4 - 4x^2 + x^4\right) \right] - \left[\tfrac{1}{2} x^2 \right] \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(-\tfrac{1}{2} x^4 - x^3 + \left(2 - \tfrac{1}{2}\right) x^2 + 2x - 2 \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(-\tfrac{1}{2} x^4 - x^3 + \tfrac{3}{2} x^2 + 2x - 2 \right) dx
\end{aligned}$$

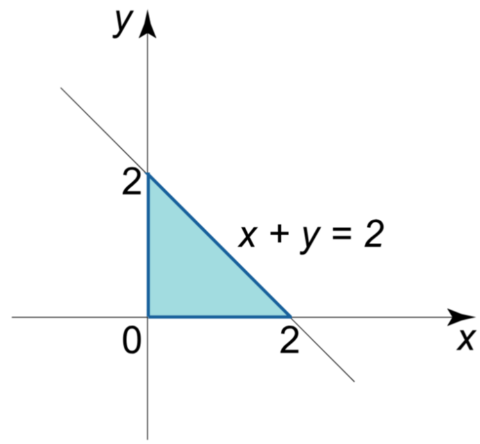
La deuxième intégrale est

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(-\tfrac{1}{2} x^4 - x^3 + \tfrac{3}{2} x^2 + 2x - 2 \right) dx &= \left[-\tfrac{1}{10} x^5 - \tfrac{1}{4} x^4 + \tfrac{1}{2} x^3 + x^2 - 2x \right]_0^1 \\
&= \left[-\tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} + 1 - 2 \right] - [0] \\
&= -\tfrac{17}{20}
\end{aligned}$$

On pourrait aussi intégrer en x en premier, mais ce serait plus long, car il faudrait séparer la région d'intégration en deux.

$$\iint (x - y)\,dA = \int_0^1 \int_0^y (x - y)\,dxdy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-y}} (x - y)\,dxdy$$

2.2 *Première possibilité* : on va intégrer en *y* en premier.



En *y*, on va de 0 à $y = 2 - x$.

En *x*, on va de 0 à 2.

On a donc

$$\iint (x+y)\,dA = \int_0^2 \int_0^{2-x} (x+y)\,dydx$$

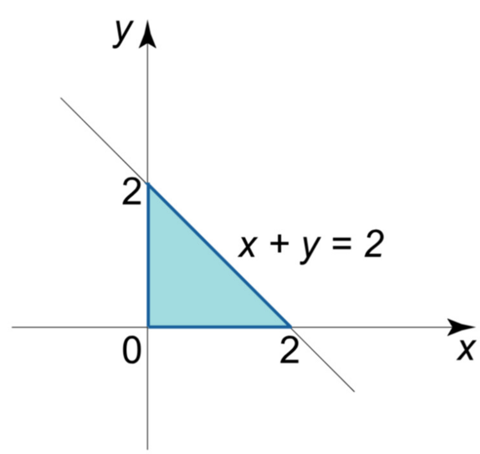
La première intégrale est

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_0^{2-x} (x+y)\,dydx &= \int_0^2 \left[xy + \tfrac{1}{2} y^2 \right]_0^{2-x} dx \\ &= \int_0^2 \left(\left[x(2-x) + \tfrac{1}{2}(2-x)^2 \right] - [0] \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(2x - x^2 + \tfrac{1}{2}\left(4 - 4x + x^2\right) \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(-\tfrac{1}{2} x^2 + 2 \right) dx\end{aligned}$$

La deuxième intégrale est

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(-\tfrac{1}{2} x^2 + 2 \right) dx &= \left[-\tfrac{1}{6} x^3 + 2x \right]_0^2 \\ &= \left[-\tfrac{1}{6} 2^3 + 2 \cdot 2 \right] - [0] \\ &= \tfrac{8}{3}\end{aligned}$$

Deuxième possibilité : on va intégrer en *x* en premier



En *x*, on va de 0 à $x = 2 - y$.

En *y*, on va de 0 à 2.

On a donc

$$\iint (x+y)\,dA = \int_0^2 \int_0^{2-y} (x+y)\,dxdy$$

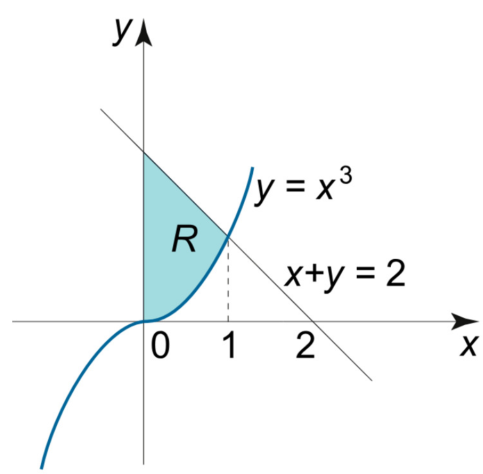
La première intégrale est

$$\int_0^2\int_0^{2-y}(x+y)\,dxdy = \int_0^2\left[\tfrac{1}{2}x^2+xy\right]_0^{2-y}dy$$
$$= \int_0^2\left(\left[+\tfrac{1}{2}(2-y)^2+y(2-y)\right]-[0]\right)dy$$
$$= \int_0^2\left(\tfrac{1}{2}\left(4-4y+y^2\right)+2y-y^2\right)dy$$
$$= \int_0^2\left(-\tfrac{1}{2}y^2+2\right)dy$$

La deuxième intégrale est

$$\int_0^2\left(-\tfrac{1}{2}y^2+2\right)dy = \left[-\tfrac{1}{6}y^3+2x\right]_0^2$$
$$= \left[-\tfrac{1}{6}2^3+2\cdot 2\right]-[0]$$
$$= \tfrac{8}{3}$$

2.3 On va intégrer en y en premier.



En y, on va de $y = x^3$ à $y = 2-x$.

En x, on va de 0 à 1.

On a donc

$$\iint x\,dA = \int_0^1\int_{x^3}^{2-x} x\,dydx$$

La première intégrale est

$$\int_0^1\int_{x^3}^{2-x} x\,dydx = \int_0^1[xy]_{x^3}^{2-x}dx$$
$$= \int_0^1\left(\left[x(2-x)\right]-\left[x\cdot x^3\right]\right)dx$$
$$= \int_0^1\left(2x-x^2-x^4\right)dx$$

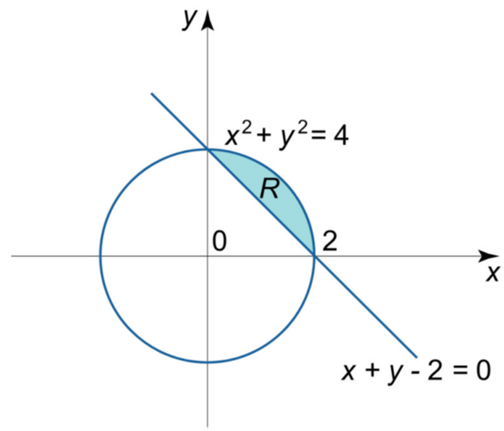
La deuxième intégrale est

$$\int_0^1\left(2x-x^2-x^4\right)dx = \left[x^2-\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{5}x^5\right]_0^1$$
$$= \left[1-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}\right]-[0]$$
$$= \tfrac{7}{15}$$

On pourrait aussi intégrer en x en premier, mais ce serait plus long, car il faudrait séparer la région d'intégration en deux.

$$\iint x dA = \int_0^1 \int_0^{\sqrt[3]{y}} x dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} x dx dy$$

2.4 *Première possibilité* : on va intégrer en y en premier.



En y, on va de $y = 2 - x$ à $y = \sqrt{4 - x^2}$.

En x, on va de 0 à 2.

On a donc

$$\iint x^2 y dA = \int_0^2 \int_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y dy dx$$

La première intégrale est

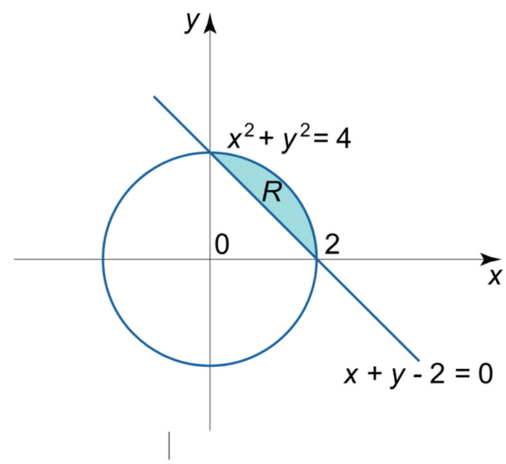
$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y dy dx &= \int_0^2 \left[\tfrac{1}{2} x^2 y^2\right]_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \int_0^2 \left(\left[\tfrac{1}{2} x^2 \left(4 - x^2\right)\right] - \left[\tfrac{1}{2} x^2 \left(2 - x\right)^2\right]\right) dx \\
&= \int_0^2 \left(\left[\tfrac{1}{2} x^2 \left(4 - x^2\right)\right] - \left[\tfrac{1}{2} x^2 \left(4 - 4x + x^2\right)\right]\right) dx \\
&= \int_0^2 \left(\left[2x^2 - \tfrac{1}{2} x^4\right] - \left[2x^2 - 2x^3 + \tfrac{1}{2} x^4\right]\right) dx \\
&= \int_0^2 \left(-x^4 + 2x^3\right) dx
\end{aligned}$$

La deuxième intégrale est

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \left(-x^4 + 2x^3\right) dx &= \left[-\tfrac{1}{5} x^5 + \tfrac{1}{2} x^4\right]_0^2 \\
&= \left[-\tfrac{1}{5} 2^5 + \tfrac{1}{2} 2^4\right] - [0] \\
&= \tfrac{8}{5}
\end{aligned}$$

Deuxième possibilité : on va intégrer en x en premier

En x, on va de $x = 2 - y$ à $x = \sqrt{4 - y^2}$.



En y, on va de 0 à 2.

On a donc

$$\iint x^2 y dA = \int_0^2 \int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} x^2 y dx dy$$

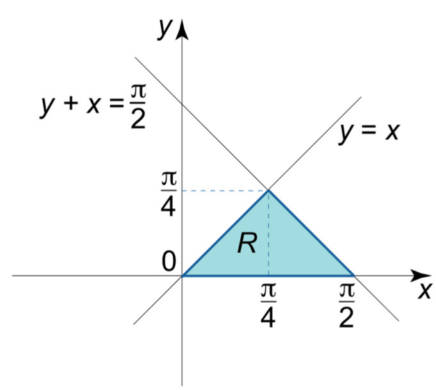
La première intégrale mène à

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} x^2 y dx dy &= \int_0^2 \left[\tfrac{1}{3} x^3 y\right]_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} dy \\ &= \int_0^2 \left(\left[\tfrac{1}{3}\left(4 - y^2\right)^{3/2} y\right] - \left[\tfrac{1}{3}(2-y)^3\right]\right) dy\end{aligned}$$

Déjà, on voit que les intégrales sont plus difficiles à faire. Ce n'est donc pas la meilleure solution.

2.5 On va intégrer en x en premier.

En x, on va de $x = y$ à $x - \frac{\pi}{2} - y$.



En y, on va de 0 à $\pi/4$.

On a donc

$$\iint \sin(x+y) dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_y^{\frac{\pi}{2}-y} \sin(x+y) dx dy$$

La première intégrale est

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_y^{\frac{\pi}{2}-y} \sin(x+y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[-\cos(x+y)\right]_y^{\frac{\pi}{2}-y} dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\left[-\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - y + y\right)\right] - \left[-\cos(y+y)\right]\right) dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + \cos(2y)\right) dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2y) dy\end{aligned}$$

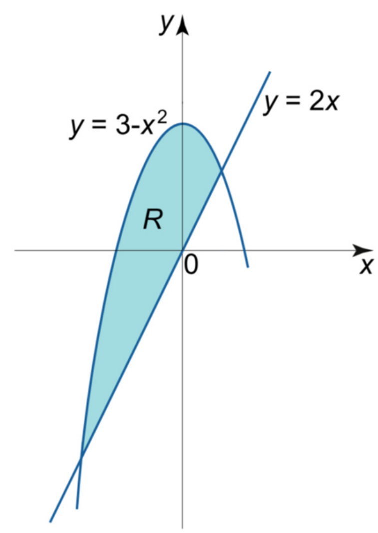
La deuxième intégrale est

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2y)\,dy &= \left[\tfrac{1}{2}\sin(2y)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left[\tfrac{1}{2}\sin\left(2\tfrac{\pi}{4}\right)\right] - [0] \\ &= \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

On pourrait aussi intégrer en y en premier, mais ce serait plus long, car il faudrait séparer la région d'intégration en deux.

$$\iint \sin(x+y)\,dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{x} \sin(x+y)\,dydx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \sin(x+y)\,dydx$$

2.6 On va intégrer en y en premier.



En y, on va de $y = 2x$ à $y = 3 - x^2$.

Pour trouver les bornes en x, il faut trouver les points de croisement de ces fonctions. Aux croisements, on a

$$2x = 3 - x^2$$

Cette équation nous donne

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ (x+3)(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

Les points de croisement sont donc -3 et 1. Ainsi, on va de -3 à 1 en x

On a donc

$$\iint y\,dA = \int_{-3}^{1}\int_{2x}^{3-x^2} y\,dydx$$

La première intégrale est

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{1}\int_{2x}^{3-x^2} y\,dy\,dx &= \int_{-3}^{1}\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{2x}^{3-x^2} dx\\ &= \int_{-3}^{1}\left(\left[\tfrac{1}{2}\left(3-x^2\right)^2\right]-\left[\tfrac{1}{2}\left(2x\right)^2\right]\right)dx\\ &= \int_{-3}^{1}\left(\left[\tfrac{1}{2}\left(9-6x^2+x^4\right)\right]-\left[2x^2\right]\right)dx\\ &= \int_{-3}^{1}\left(\tfrac{1}{2}x^4-5x^2+\tfrac{9}{2}\right)dx\end{aligned}$$

La deuxième intégrale est

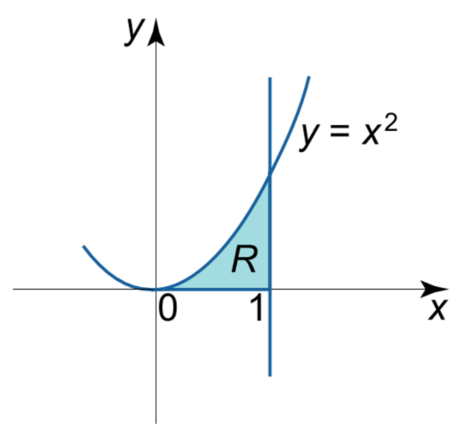
$$\begin{aligned}\int_{-3}^{1}\left(\tfrac{1}{2}x^4-5x^2+\tfrac{9}{2}\right)dx &= \left[\tfrac{1}{10}x^5-\tfrac{5}{3}x^3+\tfrac{9}{2}x\right]_{-3}^{1}\\ &= \left[\tfrac{1}{10}-\tfrac{5}{3}+\tfrac{9}{2}\right]-\left[\tfrac{1}{10}(-3)^5-\tfrac{5}{3}(-3)^3+\tfrac{9}{2}(-3)\right]\\ &= \left[\tfrac{44}{15}\right]-\left[-\tfrac{243}{10}+45-\tfrac{27}{2}\right]\\ &= \left[\tfrac{44}{15}\right]-\left[\tfrac{36}{5}\right]\\ &= -\tfrac{64}{15}\end{aligned}$$

On pourrait aussi intégrer en x en premier, mais ce serait plus long, car il faudrait séparer la région d'intégration en deux.

$$\iint y\,dA = \int_{-6}^{2}\int_{-\sqrt{3-y}}^{\frac{y}{2}} y\,dy\,dx + \int_{2}^{3}\int_{-\sqrt{3-y}}^{\sqrt{3-y}} y\,dy\,dx$$

(En plus, les intégrales sont nettement moins faciles dans ce cas.)

2.7 *<u>Première possibilité</u>* : on va intégrer en y en premier.



En y, on va de 0 à $y = x^2$.

En x, on va de 0 à 1.

On a donc

$$\iint x\sin(y)\,dA = \int_0^1\int_0^{x^2} x\sin(y)\,dy\,dx$$

La première intégrale est

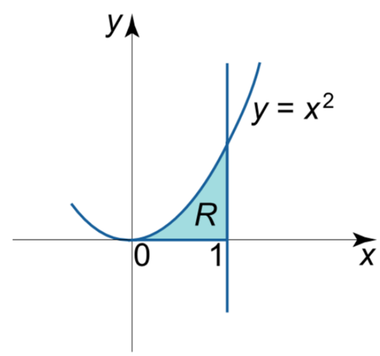
$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{x^2} x\sin(y)\,dydx &= \int_0^1\left[-x\cos(y)\right]_0^{x^2} dx \\ &= \int_0^1\left(\left[-x\cos\left(x^2\right)\right]-\left[-x\right]\right)dx \\ &= \int_0^1\left(x-x\cos\left(x^2\right)\right)dx\end{aligned}$$

La deuxième intégrale est

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(x-x\cos\left(x^2\right)\right)dx &= \int_0^1 xdx-\int_0^1 x\cos\left(x^2\right)dx \\ &= \int_0^1 xdx-\tfrac{1}{2}\int_0^1\cos(u)\,du \\ &= \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1-\tfrac{1}{2}\left[\sin u\right]_0^1 \\ &= \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sin 1 \\ &\approx 0{,}07926\end{aligned}$$

Deuxième possibilité : on va intégrer en x en premier

En x, on va de $x=\sqrt{y}$ à $x=1$.



En y, on va de 0 à 1.

On a donc

$$\iint x\sin y\,dA = \int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 x\sin\,dxdy$$

La première intégrale est

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 x\sin y\,dxdy &= \int_0^1\left[\tfrac{1}{2}x^2\sin y\right]_{\sqrt{y}}^1 dy \\ &= \int_0^1\left(\left[\tfrac{1}{2}\sin y\right]-\left[\tfrac{1}{2}y\sin y\right]\right)dy \\ &= \int_0^1\left(\tfrac{1}{2}\sin y-\tfrac{1}{2}y\sin y\right)dy\end{aligned}$$

La deuxième intégrale est

$$\int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}\sin y - \tfrac{1}{2} y \sin y\right) dy = \left[-\tfrac{1}{2}\cos y - \tfrac{1}{2}\left(\sin y - y\cos y\right)\right]_0^1$$
$$= \left[-\tfrac{1}{2}\cos 1 - \tfrac{1}{2}\left(\sin 1 - \cos 1\right)\right] - \left[-\tfrac{1}{2}\cos 0 - \tfrac{1}{2}\left(\sin 0 - 0\cos 0\right)\right]$$
$$= \left[-\tfrac{1}{2}\sin 1\right] - \left[-\tfrac{1}{2}\right]$$
$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sin 1$$

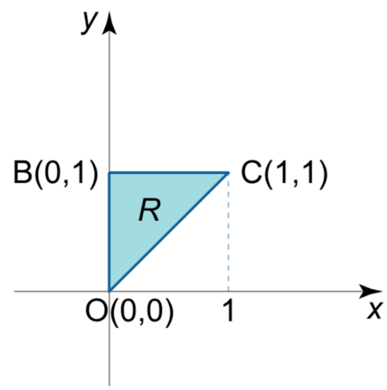
2.8 *Première possibilité* : on va intégrer en *y* en premier.

En *y*, on va de $y = x$ à 1.

En *x*, on va de 0 à 1.

On a donc

$$\iint e^x dA = \int_0^1 \int_x^1 e^x dydx$$



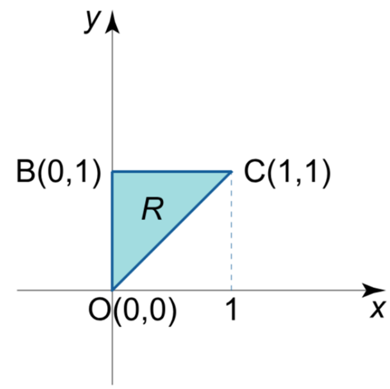
La première intégrale est

$$\int_0^1 \int_x^1 e^x dydx = \int_0^1 \left[ye^x\right]_x^1 dx$$
$$= \int_0^1 \left(\left[e^x\right] - \left[xe^x\right]\right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(e^x - xe^x\right) dx$$

La deuxième intégrale est

$$\int_0^1 \left(e^x - xe^x\right) dx = \left[e^x - e^x\left(x-1\right)\right]_0^1$$
$$= \left[e^1 - e^1\left(1-1\right)\right] - \left[e^0 - e^0\left(0-1\right)\right]$$
$$= \left[e^1\right] - \left[1 - 1\left(0-1\right)\right]$$
$$= e - 2$$
$$\approx 0,71828$$

Deuxième possibilité : on va intégrer en *x* en premier



En x, on va de 0 à $x = y$.

En y, on va de 0 à 1.

On a donc

$$\iint e^x dA = \int_0^1 \int_0^y e^x dxdy$$

La première intégrale est

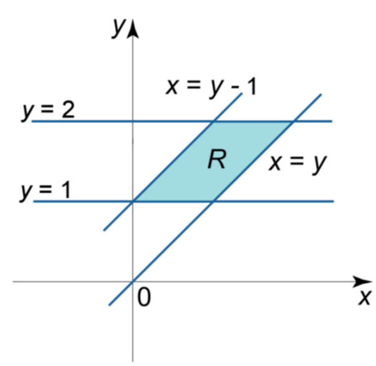
$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^y e^x dxdy &= \int_0^1 \left[e^x\right]_0^y dy \\ &= \int_0^1 \left(e^y - e^0\right) dy \\ &= \int_0^1 \left(e^y - 1\right) dy\end{aligned}$$

La deuxième intégrale est

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(e^y - 1\right) dy &= \left[e^y - y\right]_0^1 \\ &= \left[e^1 - 1\right] - \left[e^0 - 0\right] \\ &= \left[e - 1\right] - \left[1\right] \\ &= e - 2\end{aligned}$$

(On constate que c'était un peu plus facile en intégrant en x en premier.)

2.9 On va intégrer en x en premier.



En x, on va de $x = y - 1$ à $x = y$.

En y, on va de 1 à 2.

On a donc

$$\iint (x + y) dA = \int_1^2 \int_{y-1}^y (x + y) dxdy$$

La première intégrale est

$$\begin{aligned}
\int_1^2\int_{y-1}^{y}(x+y)\,dxdy &= \int_1^2\left[\tfrac{1}{2}x^2+xy\right]_{y-1}^{y}dy \\
&= \int_1^2\left(\left[\tfrac{1}{2}y^2+yy\right]-\left[\tfrac{1}{2}(y-1)^2+(y-1)\,y\right]\right)dy \\
&= \int_1^2\left(\left[\tfrac{1}{2}y^2+y^2\right]-\left[\tfrac{1}{2}(y^2-2y+1)+y^2-y\right]\right)dy \\
&= \int_1^2\left(\left[\tfrac{1}{2}y^2+y^2\right]-\left[\tfrac{1}{2}y^2-y+\tfrac{1}{2}+y^2-y\right]\right)dy \\
&= \int_1^2-\left(-y+\tfrac{1}{2}-y\right)dy \\
&= \int_1^2\left(2y-\tfrac{1}{2}\right)dy
\end{aligned}$$

La deuxième intégrale est

$$\begin{aligned}
\int_1^2\left(2y-\tfrac{1}{2}\right)dy &= \left[y^2-\tfrac{1}{2}y\right]_1^2 \\
&= \left[2^2-\tfrac{1}{2}2\right]-\left[1-\tfrac{1}{2}\right] \\
&= 3-\tfrac{1}{2} \\
&= \tfrac{5}{2}
\end{aligned}$$

On pourrait aussi intégrer en y en premier, mais ce serait plus long, car il faudrait séparer la région d'intégration en deux.

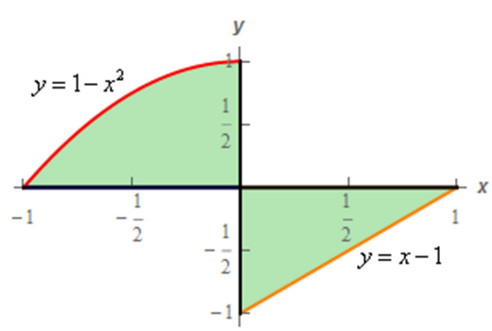
$$\iint(x+y)\,dA = \int_0^1\int_1^{x+1}(x+y)\,dydx+\int_1^2\int_x^2(x+y)\,dydx$$

2.10 On va intégrer en y en premier. (Ici, peu importe l'ordre d'intégration, il faut séparer la région d'intégration en 2)

<u>*Partie de gauche*</u>

En y, on va de 0 à $1 - x^2$.

En x, on va de -1 à 0.



<u>*Partie de droite*</u>

En y, on va de x - 1 à 0.

En x, on va de 0 à 1.
On a donc

$$\iint (12x-3)\,dA = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1-x^2}(12x-3)\,dydx + \int_{0}^{1}\int_{x-1}^{0}(12x-3)\,dydx$$

Les intégrales en y donnent

$$\begin{aligned}\iint (12x-3)\,dA &= \int_{-1}^{0}[12xy-3y]_{0}^{1-x^2}\,dx + \int_{0}^{1}[12xy-3y]_{x-1}^{0}\,dx\\ &= \int_{-1}^{0}\left(\left[12x\left(1-x^2\right)-3\left(1-x^2\right)\right]-[0]\right)dx + \int_{0}^{1}\left([0]-\left[12x(x-1)-3(x-1)\right]\right)_{x-1}^{0}\,dx\\ &= \int_{-1}^{0}\left(12x-12x^3-3+3x^2\right)dx - \int_{0}^{1}\left(12x^2-12x-3x+3\right)dx\\ &= \int_{-1}^{0}\left(12x-12x^3-3+3x^2\right)dx - \int_{0}^{1}\left(12x^2-15x+3\right)dx\end{aligned}$$

Les intégrales en x donnent

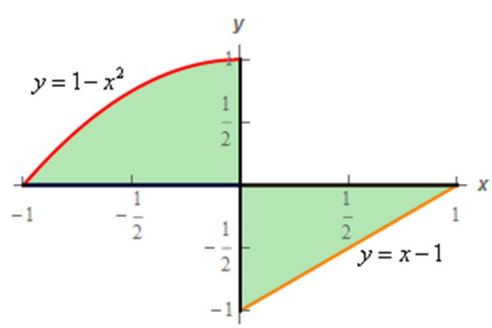
$$\begin{aligned}\iint (12x-3)\,dA &= \int_{-1}^{0}\left(12x-12x^3-3+3x^2\right)dx - \int_{0}^{1}\left(12x^2-15x+3\right)dx\\ &= \left[6x^2-3x^4-3x+x^3\right]_{-1}^{0} - \left[4x^3-\tfrac{15}{2}x^2+3x\right]_{0}^{1}\\ &= \left([0]-[6-3+3-1]\right)-\left(\left[4-\tfrac{15}{2}+3\right]-[0]\right)\\ &= -5--\tfrac{1}{2}\\ &= -\tfrac{9}{2}\end{aligned}$$

On pourrait aussi intégrer en x en premier.

<u>*Partie du bas*</u>

En x, on va de 0 à $y + 1$.

En y, on va de -1 à 0.



<u>*Partie du haut*</u>

En x, on va de $-\sqrt{1-y}$ à 0.

En y, on va de 0 à 1.

On a donc

$$\iint (12x-3)\,dA = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{y+1}(12x-3)\,dxdy + \int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y}}^{0}(12x-3)\,dxdy$$

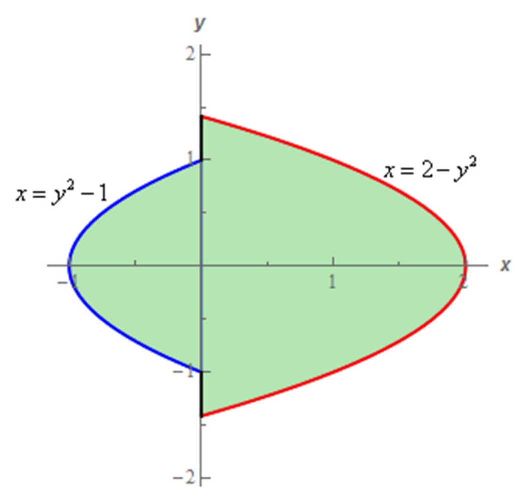
Les intégrales en x donnent

$$\begin{aligned}\iint (12x-3)\,dA &= \int_{-1}^{0}\left[6x^2-3x\right]_0^{y+1} dy + \int_0^1\left[6x^2-3x\right]_{-\sqrt{1-y}}^{0} dy\\ &= \int_{-1}^{0}\left(\left[6(y+1)^2-3(y+1)\right]-[0]\right)dy + \int_0^1\left([0]-\left[6(1-y)+3\sqrt{1-y}\right]\right)dy\\ &= \int_{-1}^{0}\left(6y^2+12y+6-3y-3\right)dy - \int_0^1\left(6-6y+3\sqrt{1-y}\right)dy\\ &= \int_{-1}^{0}\left(6y^2+9y+3\right)dy - \int_0^1\left(6-6y+3\sqrt{1-y}\right)dy\end{aligned}$$

Les intégrales en y donnent

$$\begin{aligned}\iint (12x-3)\,dA &= \left[2y^3+\tfrac{9}{2}y^2+3y\right]_{-1}^{0} - \left[6y-3y^2-2(1-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1\\ &= \left([0]-\left[-2+\tfrac{9}{2}-3\right]\right)-\left([6-3]-[-2]\right)\\ &= \tfrac{1}{2}-5\\ &= -\tfrac{9}{2}\end{aligned}$$

2.11 On va intégrer en x en premier (les équations des limites de la zone d'intégration suggèrent fortement que c'est ce qu'il faut faire. (Ici, peu importe l'ordre d'intégration, il faut séparer la région d'intégration en 2.)



<u>*Partie de gauche*</u>

En x, on va de y^2 - 1 à 0.

En y, on va de -1 à 1.

<u>*Partie de droite*</u>

En x, on va de 0 à $2 - y^2$.

En y, on va de $-\sqrt{2}$ à $\sqrt{2}$.

On a donc

$$\iint\left(6y^2+10yx^4\right)dA=\int_{-1}^{1}\int_{y^2-1}^{0}\left(6y^2+10yx^4\right)dxdy+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{2-y^2}\left(6y^2+10yx^4\right)dxdy$$

Les intégrales en *x* donnent

$$\begin{aligned}
\iint\left(6y^2+10yx^4\right)dA &= \int_{-1}^{1}\left[6y^2x+2yx^5\right]_{y^2-1}^{0}dy+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left[6y^2x+2yx^5\right]_{0}^{2-y^2}dy\\
&= \int_{-1}^{1}\left([0]-\left[6y^2\left(y^2-1\right)+2y\left(y^2-1\right)^5\right]\right)dy+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\left[6y^2\left(2-y^2\right)+2y\left(2-y^2\right)^5\right]-[0]\right)dy\\
&= -\int_{-1}^{1}\left[6y^2\left(y^2-1\right)+2y\left(y^2-1\right)^5\right]dy+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(6y^2\left(2-y^2\right)+2y\left(2-y^2\right)^5\right)dy
\end{aligned}$$

On va faire les intégrales en *y* une à la fois. La première donne

$$\begin{aligned}
-\int_{-1}^{1}\left[6y^2\left(y^2-1\right)+2y\left(y^2-1\right)^5\right]dy &= -\int_{-1}^{1}\left[6y^4-6y^2+2y\left(y^2-1\right)^5\right]dy\\
&= -\int_{-1}^{1}\left[6y^4-6y^2\right]dy+\int_{-1}^{1}2y\left(y^2-1\right)^5dy\\
&= -\int_{-1}^{1}\left[6y^4-6y^2\right]dy+\int_{0}^{0}u^5du\\
&= -\left[\tfrac{6}{5}y^5-2y^3\right]_{-1}^{1}+0\\
&= -\left(\tfrac{6}{5}-2\right)+\left(-\tfrac{6}{5}+2\right)\\
&= -\tfrac{12}{5}+4\\
&= \tfrac{8}{5}
\end{aligned}$$

On va faire les intégrales en *y* une à la fois. La deuxième donne

$$\begin{aligned}
\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(6y^2\left(2-y^2\right)+2y\left(2-y^2\right)^5\right)dy &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(12y^2-6y^4+2y\left(2-y^2\right)^5\right)dy\\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(12y^2-6y^4\right)dy+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}2y\left(2-y^2\right)^5dy\\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(12y^2-6y^4\right)dy-\int_{0}^{0}u^5du\\
&= \left[4y^3-\tfrac{6}{5}y^5\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\\
&= \left[4\cdot 2^{3/2}-\tfrac{6}{5}\cdot 2^{5/2}\right]-\left[-4\cdot 2^{3/2}+\tfrac{6}{5}\cdot 2^{5/2}\right]\\
&= 8\cdot 2^{3/2}-\tfrac{12}{5}\cdot 2^{5/2}\\
&= \sqrt{2}\left(8\cdot 2-\tfrac{12}{5}\cdot 4\right)\\
&= \tfrac{32}{5}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\iint\left(6y^2+10yx^4\right)dA=\tfrac{8}{5}+\tfrac{32}{5}\sqrt{2}$$

On peut aussi intégrer en x en premier.

Partie de gauche

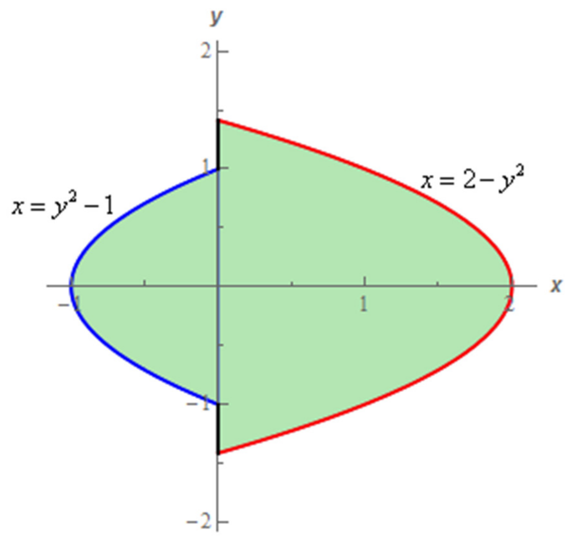
En y, on va de $-\sqrt{x+1}$ à $\sqrt{x+1}$.

En x, on va de -1 à 0.

Partie de droite

En y, on va de $-\sqrt{2-x}$ à $\sqrt{2-x}$.

En x, on va de 0 à 2.



On a donc

$$\iint\left(6y^2+10yx^4\right)dA=\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}}\left(6y^2+10yx^4\right)dydx+\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{2-x}}^{\sqrt{2-x}}\left(6y^2+10yx^4\right)dydx$$

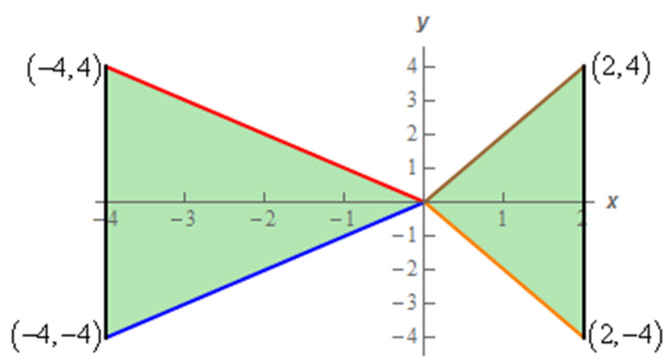
Les intégrales en y donnent

$$\begin{aligned}\iint\left(6y^2+10yx^4\right)dA&=\int_{-1}^{0}\left[2y^3+5y^2x^4\right]_{-\sqrt{x\_1}}^{\sqrt{x+1}}dx+\int_{0}^{2}\left[2y^3+5y^2x^4\right]_{-\sqrt{2-x}}^{\sqrt{2-x}}dx\\&=\int_{-1}^{0}\left(\left[2\sqrt{x+1}^3+5(x+1)x^4\right]-\left[-2\sqrt{x+1}^3+5(x+1)x^4\right]\right)dx\\&\quad+\int_{0}^{2}\left(\left[2\sqrt{2-x}^3+5(2-x)x^4\right]-\left[-2\sqrt{2-x}^3+5(2-x)x^4\right]\right)dx\\&=\int_{-1}^{0}4\sqrt{x+1}^3dx+\int_{0}^{2}4\sqrt{2-x}^3dx\\&=\int_{-1}^{0}4(x+1)^{3/2}dx+\int_{0}^{2}4(2-x)^{3/2}dx\end{aligned}$$

Les intégrales en y donnent

$$\begin{aligned}\iint\left(6y^2+10yx^4\right)dA &= \int_0^1 4u^{3/2}du-\int_2^0 4u^{3/2}du \\ &= \left[4\cdot\tfrac{2}{5}u^{5/2}\right]_0^1-\left[4\cdot\tfrac{2}{5}u^{5/2}\right]_2^0 \\ &= \tfrac{8}{5}+\tfrac{8}{5}\cdot 2^{5/2} \\ &= \tfrac{8}{5}+\tfrac{32}{5}\cdot\sqrt{2}\end{aligned}$$

2.12 On va intégrer en y en premier. (En intégrant en x en premier, il faudrait séparer la région en 4 parties.)



Partie de gauche

En y, on va de $y = x$ à $y = -x$

En x, on va de -4 à 0.

Partie de droite

En y, on va de $y = 2x$ à $y = -2x$

En x, on va de 0 à 2.

On a donc

$$\iint\left(xy-y^2\right)dA=\int_{-4}^{0}\int_{x}^{-x}\left(xy-y^2\right)dydx+\int_0^2\int_{-2x}^{2x}\left(xy-y^2\right)dydx$$

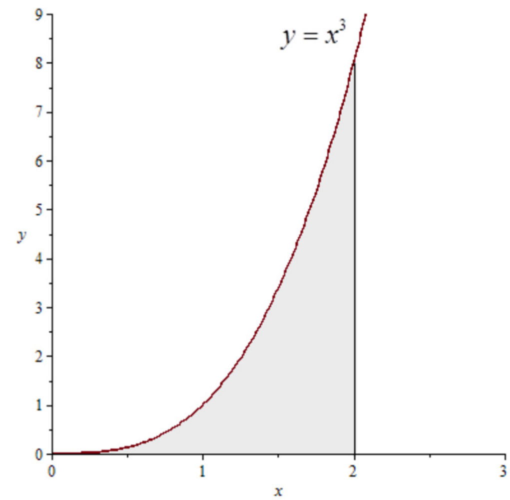
Les intégrales en y donnent

$$\begin{aligned}\iint\left(xy-y^2\right)dA &= \int_{-4}^{0}\left[\tfrac{1}{2}xy^2-\tfrac{1}{3}y^3\right]_x^{-x}dx+\int_0^2\left[\tfrac{1}{2}xy^2-\tfrac{1}{3}y^3\right]_{-2x}^{2x}dx \\ &= \int_{-4}^{0}\left(\left[\tfrac{1}{2}x\cdot x^2+\tfrac{1}{3}x^3\right]-\left[\tfrac{1}{2}x\cdot x^2-\tfrac{1}{3}x^3\right]\right)dx+\int_0^2\left(\left[\tfrac{1}{2}x\cdot 4x^2-\tfrac{1}{3}8x^3\right]-\left[\tfrac{1}{2}x\cdot 4x^2+\tfrac{1}{3}8x^3\right]\right)dx \\ &= \int_{-4}^{0}\tfrac{2}{3}x^3dx-\int_0^2\tfrac{16}{3}x^3dx\end{aligned}$$

Les intégrales en x donnent

$$\begin{aligned}\iint\left(xy-y^2\right)dA &= \left[\tfrac{1}{6}x^4\right]_{-4}^{0}-\left[\tfrac{4}{3}x^4\right]_{0}^{2}\\ &= \left([0]-\left[\tfrac{128}{3}\right]\right)-\left(\left[\tfrac{64}{3}\right]-[0]\right)\\ &= -64\end{aligned}$$

2.13 a) Selon les bornes, la région d'intégration va de 0 à 8 entre les courbes $x = y^{1/3}$ et $x = 2$. La région d'intégration ressemble donc à cela.



Si on change l'ordre, on a

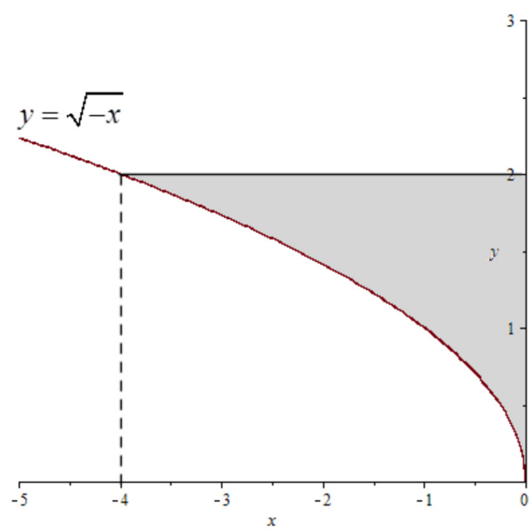
En y, on va de 0 à $y = x^3$

En x, on va de 0 à 2.

L'intégrale est donc

$$\int_0^2\int_0^{x^3}\frac{y}{x^7+1}dydx$$

b) Selon les bornes la région d'intégration va de -4 à 0 entre les courbes $y=\sqrt{-x}$ et $y = 2$. La région d'intégration ressemble donc à cela.



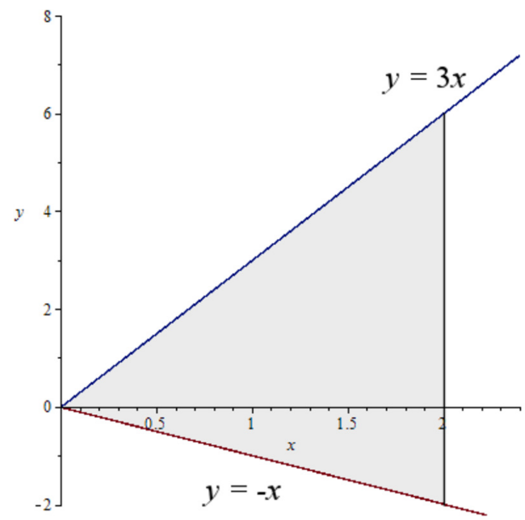
En x, on va de $x = -y^2$ à $x = 0$

En y, on va de 0 à 2.

L'intégrale est donc

$$\int_0^2 \int_{-y^2}^0 x^{-2/3}\sqrt{y^{5/3}+1}\,dxdy$$

c) Selon les bornes la région d'intégration va de 0 à 2 entre les courbes $y = -x$ et $y = 3x$. La région d'intégration ressemble donc à cela.



En intégrant en x en premier, il va falloir séparer cette région en 2 parties.

Partie du bas

En x, on va de $x = -y$ à $y = 2$

En y, on va de -2 à 0.

Partie du haut

En x, on va de $x = y/3$ à $y = 2$

En y, on va de 0 à 6.

L'intégrale est donc

$$\int_{-2}^0 \int_{-y}^2 \left(5y^2x^3+2\right)dxdy + \int_0^6 \int_{y/3}^2 \left(5y^2x^3+2\right)dxdy$$

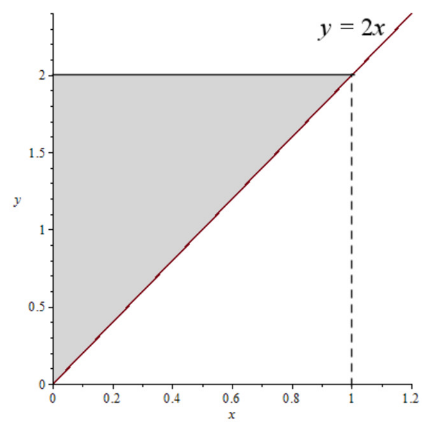
2.14 Si on tente de faire cette intégrale

$$\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2} dydx$$

on a un problème en partant, puisqu'il n'y a pas de solution simple à l'intégrale en y. (Il y en a une, mais c'est une fonction que vous ne connaissez pas.)

On va donc tenter de changer l'ordre d'intégration pour voir si on arrive à une version qu'on peut résoudre.

Selon les bornes la région d'intégration va de 0 à 1 entre les courbes $y = 2x$ et $y = 2$. La région d'intégration ressemble donc à cela.



En x, on va de $x = 0$ à $x = y/2$

En y, on va de 0 à 2.

L'intégrale est donc

$$\int_0^2 \int_0^{y/2} e^{y^2} dxdy$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_0^{y/2} e^{y^2} dxdy &= \int_0^2 \left[e^{y^2} x \right]_0^{y/2} dy \\ &= \tfrac{1}{2} \int_0^2 e^{y^2} ydy\end{aligned}$$

On peut alors faire cette intégrale en posant

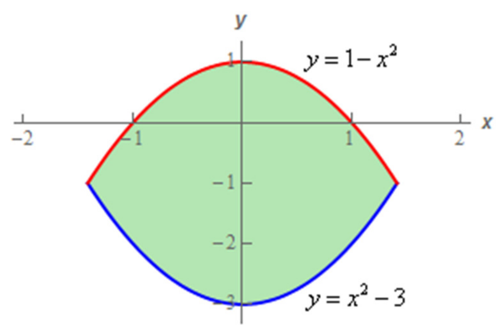
$$\begin{aligned}u &= y^2 \\ du &= 2ydy\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_0^2 e^{y^2} y\,dy &= \tfrac{1}{4}\int_0^2 e^{y^2} 2y\,dy \\ &= \tfrac{1}{4}\int_0^4 e^{u}\,du \\ &= \tfrac{1}{4}\left[e^{u}\right]_0^4 \\ &= \tfrac{1}{4}\left[e^{4}-1\right] \\ &\approx 13,3995\end{aligned}$$

3.1 La forme de la région suggère fortement d'intégrer en y en premier.

En y, on va de $y = x^2 - 3$ à $y = 1 - x^2$.



En x, on va d'un point de croisement des fonctions à l'autre.

Ces points de croisements sont

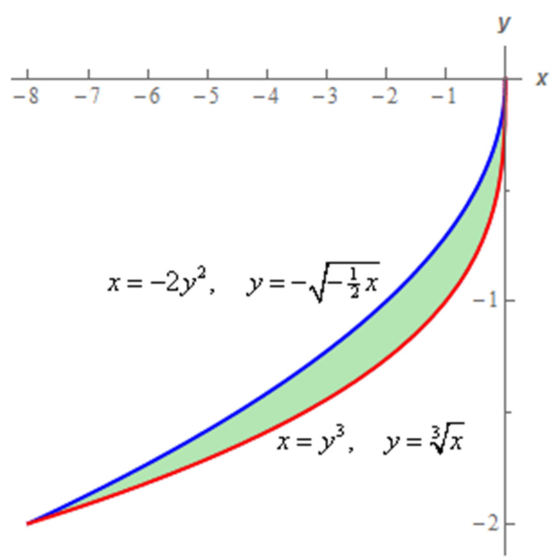
$$\begin{aligned}1 - x^2 &= x^2 - 3 \\ 4 &= 2x^2 \\ 2 &= x^2 \\ x &= \pm\sqrt{2}\end{aligned}$$

En x, on va donc de $-\sqrt{2}$ à $\sqrt{2}$.

L'aire est donc

$$
\begin{aligned}
A &= \iint dA \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{x^2-3}^{1-x^2} dydx \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[y \right]_{x^2-3}^{1-x^2} dx \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\left[1-x^2 \right] - \left[x^2-3 \right] \right) dx \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(4-2x^2 \right) dx \\
&= \left[4x - \tfrac{2}{3}x^3 \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\
&= \left[4\sqrt{2} - \tfrac{2}{3}\sqrt{2}^3 \right] - \left[-4\sqrt{2} + \tfrac{2}{3}\sqrt{2}^3 \right] \\
&= 8\sqrt{2} - \tfrac{4}{3}\sqrt{2}^3 \\
&= \left(8 - \tfrac{8}{3} \right)\sqrt{2} \\
&= \tfrac{16}{3}\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

3.2 Première possibilité : intégrer en y en premier



En y, on va de $y=\sqrt[3]{x}$ à $y=-\sqrt{-\frac{1}{2}x}$.

En x, on va d'un point de croisement des fonctions à l'autre.

Ces points de croisements sont

$$
\begin{gathered}
\sqrt{-\tfrac{1}{2}x} = \sqrt[3]{x} \\
\left(\sqrt{-\tfrac{1}{2}x}\right)^6 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^6 \\
-\tfrac{1}{8}x^3 = x^2 \\
x=-8 \quad \text{et} \quad x=0
\end{gathered}
$$

En x, on va donc de -8 à 0.

L'aire est donc

$$\begin{aligned}A &= \iint dA \\ &= \int_{-8}^{0}\int_{\sqrt[3]{x}}^{-\sqrt{-\frac{1}{2}x}} dydx \\ &= \int_{-8}^{0}\left[y\right]_{\sqrt[3]{x}}^{-\sqrt{-\frac{1}{2}x}} dx \\ &= \int_{-8}^{0}\left(-\sqrt{-\tfrac{1}{2}x}-\sqrt[3]{x}\right)dx \\ &= \left[\tfrac{4}{3}\left(-\tfrac{1}{2}x\right)^{3/2}-\tfrac{3}{4}x^{4/3}\right]_{-8}^{0} \\ &= [0]-\left[\tfrac{4}{3}(4)^{3/2}-\tfrac{3}{4}(-8)^{4/3}\right] \\ &= \tfrac{-4}{3}(4)^{3/2}+\tfrac{3}{4}(-8)^{4/3} \\ &= -\tfrac{4}{3}\cdot 8+\tfrac{3}{4}\cdot 16 \\ &= \tfrac{4}{3}\end{aligned}$$

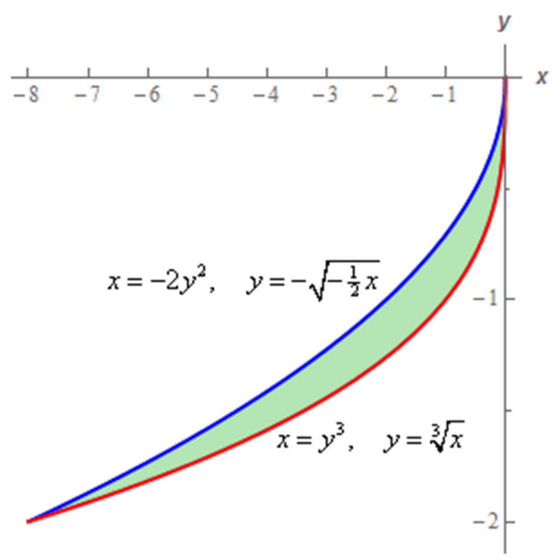
Deuxième possibilité : on va intégrer en x en premier

En x, on va de $x = -2y^2$ à $x = y^3$.

En y, on va de -2 à 0.

(Puisqu'on sait que le point de croisement est à x = -8, donc à y = -2.)

L'aire est donc



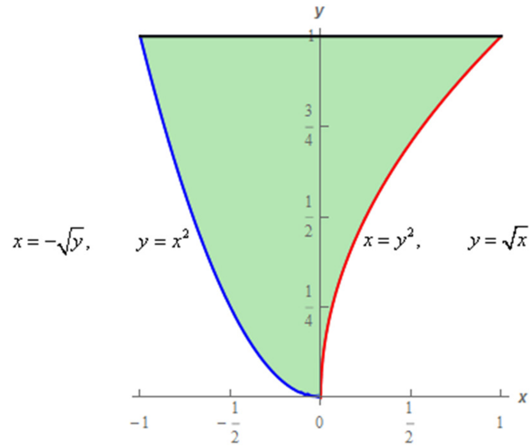
$$\begin{aligned}A &= \int_{-2}^{0}\int_{-2y^2}^{y^3} dxdy \\ &= \int_{-2}^{0}\left[x\right]_{-2y^2}^{y^3} dy \\ &= \int_{-2}^{0}\left(y^3+2y^2\right)dy \\ &= \left[\tfrac{1}{4}y^4+\tfrac{2}{3}y^3\right]_{-2}^{0} \\ &= [0]-\left[\tfrac{1}{4}\cdot 16-\tfrac{2}{3}\cdot 8\right] \\ &= \tfrac{4}{3}\end{aligned}$$

3.3 La forme de la région suggère fortement d'intégrer en x en premier.

En x, on va de $x=-\sqrt{y}$ à $x=y^2$.

En y, on va de 0 à 1.

L'aire est donc



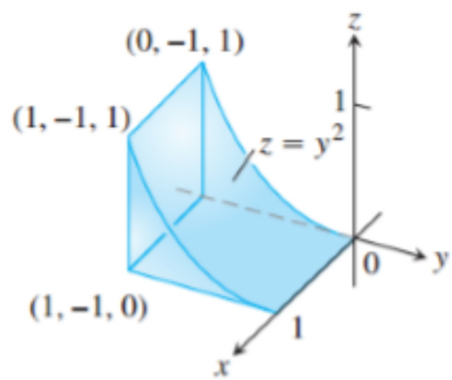
$$\begin{aligned} A &= \iint dA \\ &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{y^2} dxdy \\ &= \int_0^1 [x]_{-\sqrt{y}}^{y^2} dy \\ &= \int_0^1 \left(y^2+\sqrt{y}\right) dy \\ &= \left[\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{2}{3}y^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \left[\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\right]-[0] \\ &= 1 \end{aligned}$$

4.1 *<u>Première possibilité :</u>* On va intégrer en y en premier

En y, on va de -1 à 0.

En x, on va de 0 à 1.

Le volume est donc



$$\begin{aligned} V &= \iint y^2 dA \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^0 y^2 dydx \end{aligned}$$

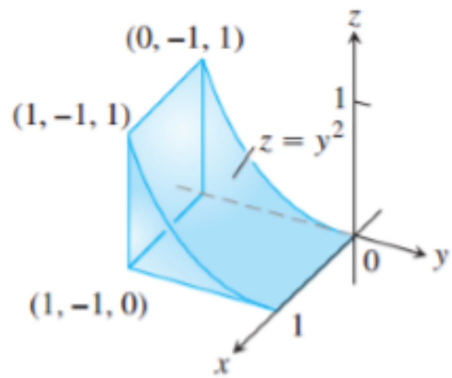
On a donc

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{3}y^3\right]_{-1}^0 dx \\ &= \int_0^1 \left(0-\tfrac{1}{3}(-1)^3\right) dx \\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{3} dx \\ &= \left[\frac{x}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Deuxième possibilité : on va intégrer en x en premier.

En x, on va de 0 à 1.

En y, on va de -1 à 0.



Le volume est donc

$$\begin{aligned} V &= \iint y^2 dA \\ &= \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} y^2 dxdy \end{aligned}$$

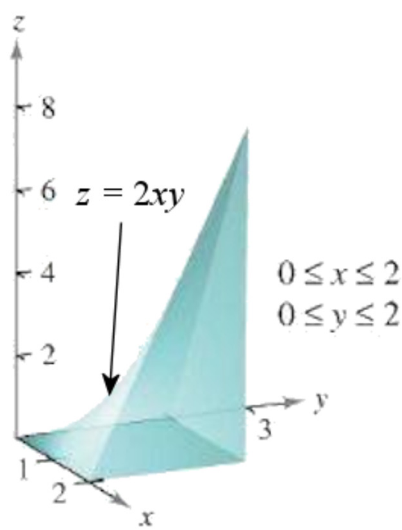
On a donc

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{0}\left[y^2x\right]_0^1 dy \\ &= \int_{-1}^{0}\left[y^2-0\right]dy \\ &= \int_{-1}^{0} y^2 dy \\ &= \left[\tfrac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{0} \\ &= 0-\tfrac{1}{3}(-1)^3 \\ &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

4.2 *Première possibilité* : on va intégrer en y en premier.

En y, on va de 0 à 2.

En x, on va de 0 à 2.



Le volume est donc

$$\begin{aligned} V &= \iint 2xydA \\ &= \int_{0}^{2}\int_{0}^{2} 2xydydx \end{aligned}$$

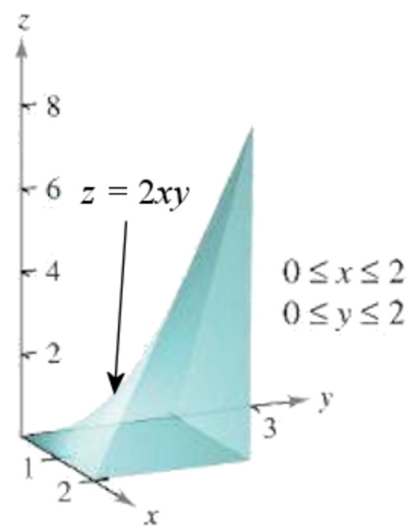
On a donc

$$\begin{aligned}\iint 2xydA &= \int_0^2 \int_0^2 2xydydx \\ &= \int_0^2 \left[xy^2 \right]_0^2 dx \\ &= \int_0^2 (x \cdot 4 - x \cdot 0)\, dx \\ &= \int_0^2 4xdx \\ &= \left[2x^2 \right]_0^2 \\ &= 2 \cdot 4 - 2 \cdot 0 \\ &= 8\end{aligned}$$

<u>*Deuxième possibilité*</u> : on va intégrer en x en premier.

En x, on va de 0 à 2.

En y, on va de 0 à 2.



Le volume est donc

$$\begin{aligned}V &= \iint 2xydA \\ &= \int_0^2 \int_0^2 2xydxdy\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}V &= \int_0^2 \left[x^2 y \right]_0^2 dy \\ &= \int_0^2 (4 \cdot y - 0 \cdot 0)\, dx \\ &= \int_0^2 4ydy \\ &= \left[2y^2 \right]_0^2 \\ &= 2 \cdot 4 - 2 \cdot 0 \\ &= 8\end{aligned}$$

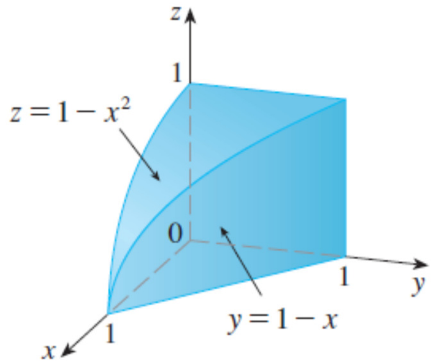
4.3 <u>*Première possibilité*</u> : on va intégrer en y en premier.

En y, on va de 0 à 1 - x

En x, on va de 0 à 1.

Le volume est donc

$$\begin{aligned} V &= \iint \left(1-x^2\right) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(1-x^2\right) dydx \end{aligned}$$



On a donc

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \left[y\left(1-x^2\right)\right]_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left(\left[(1-x)\left(1-x^2\right)\right]-[0]\right) dx \\ &= \int_0^1 (1-x)\left(1-x^2\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(1-x-x^2+x^3\right) dx \\ &= \left[x-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{4}x^4\right]_0^1 \\ &= \left[1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right]-[0] \\ &= \tfrac{5}{12} \end{aligned}$$

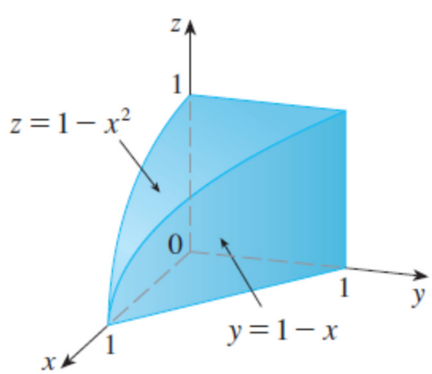
<u>Deuxième possibilité</u> : on va intégrer en x en premier.

En y, on va de 0 à 1 - y

En x, on va de 0 à 1.

Le volume est donc

$$\begin{aligned} V &= \iint \left(1-x^2\right) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \left(1-x^2\right) dxdy \end{aligned}$$



On a donc

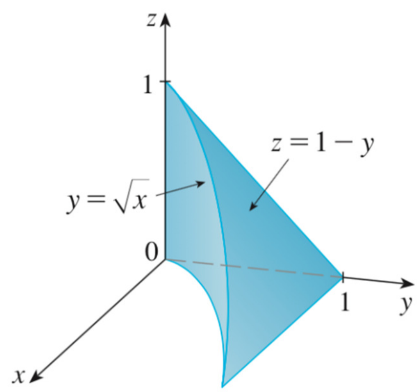
$$V=\int_0^1\left[x-\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{1-y}dy$$
$$=\int_0^1\left(\left[(1-y)-\tfrac{1}{3}(1-y)^3\right]-[0]\right)dy$$
$$=\int_0^1\left((1-y)-\tfrac{1}{3}(1-y)^3\right)dy$$
$$=\int_0^1\left((1-y)-\tfrac{1}{3}\left(1-3y+3y^2-y^3\right)\right)dy$$
$$=\int_0^1\left(\tfrac{2}{3}-y^2+\tfrac{1}{3}y^3\right)dy$$
$$=\left[\tfrac{2}{3}y-\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{1}{12}y^4\right]_0^1$$
$$=\left[\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{12}\right]-[0]$$
$$=\tfrac{5}{12}$$

4.4 <u>*Première possibilité*</u> : on va intégrer en *y* en premier.

En *y*, on va de $\sqrt{x}$ à 1.

En *x*, on va de 0 à 1.

Le volume est donc



$$V=\iint(1-y)\,dA$$
$$=\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1(1-y)\,dydx$$

On a donc

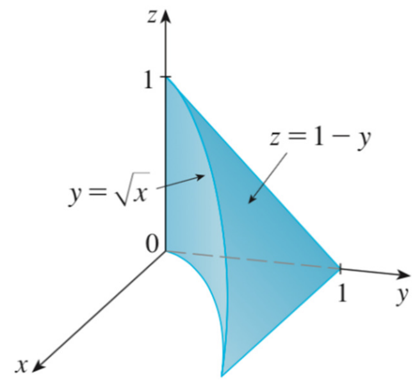
$$V=\int_0^1\left[y-\tfrac{1}{2}y^2\right]_{\sqrt{x}}^1dx$$
$$=\int_0^1\left(\left[1-\tfrac{1}{2}\right]-\left[\sqrt{x}-\tfrac{1}{2}x\right]\right)dx$$
$$=\int_0^1\left(\tfrac{1}{2}x-\sqrt{x}+\tfrac{1}{2}\right)dx$$
$$=\left[\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{2}{3}x^{3/2}+\tfrac{1}{2}x\right]_0^1$$
$$=\left[\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{2}{3}x^{3/2}+\tfrac{1}{2}x\right]-[0]$$
$$=\tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{2}$$
$$=\tfrac{1}{12}$$

<u>Deuxième possibilité</u> : on va intégrer en x en premier.

En x, on va de 0 à y^2.

En y, on va de 0 à 1.

Le volume est donc



$$\begin{aligned} V &= \iint (1-y)\,dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{y^2} (1-y)\,dx\,dy \end{aligned}$$

On a donc

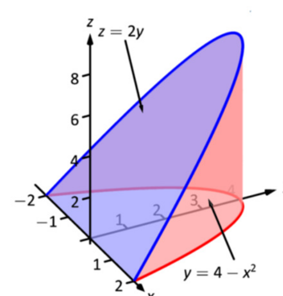
$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \left[x - xy\right]_0^{y^2} dy \\ &= \int_0^1 \left(\left[y^2 - y^2 y\right] - [0]\right) dy \\ &= \int_0^1 \left(y^2 - y^3\right) dy \\ &= \left[\tfrac{1}{3} y^3 - \tfrac{1}{4} y^4\right]_0^1 \\ &= \left[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right] - [0] \\ &= \tfrac{1}{12} \end{aligned}$$

4.5 *<u>Première possibilité</u>* : on va intégrer en y en premier.

En y, on va de 0 à $4 - x^2$.

En x, on va de -2 à 2.

Le volume est donc



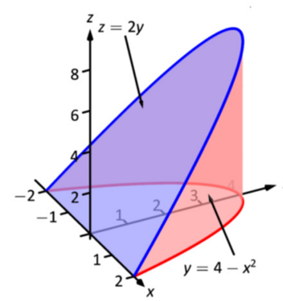
$$\begin{aligned} V &= \iint 2y\,dA \\ &= \int_{-2}^{2} \int_0^{4-x^2} 2y\,dy\,dx \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}V &= \int_{-2}^{2}\left[y^2\right]_0^{4-x^2} dx\\ &= \int_{-2}^{2}\left(\left[\left(4-x^2\right)^2\right]-[0]\right)dx\\ &= \int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)^2 dx\\ &= \int_{-2}^{2}\left(16-8x^2+x^4\right)dx\\ &= \left[16x-\tfrac{8}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5\right]_{-2}^{2}\\ &= \left[16\cdot 2-\tfrac{8}{3}(2)^3+\tfrac{1}{5}(2)^5\right]-\left[16\cdot -2-\tfrac{8}{3}(-2)^3+\tfrac{1}{5}(-2)^5\right]\\ &= \tfrac{256}{15}--\tfrac{256}{15}\\ &= \tfrac{512}{15}\end{aligned}$$

<u>Deuxième possibilité</u> : on va intégrer en x en premier.

En x, on va de $-\sqrt{4-y}$ à $\sqrt{4-y}$



En x, on va de 0 à 4.

Le volume est donc

$$\begin{aligned}V &= \iint 2y\,dA\\ &= \int_0^4\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} 2y\,dx\,dy\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}V &= \int_0^4\left[2xy\right]_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} dy\\ &= \int_0^4\left(\left[2y\sqrt{4-y}\right]-\left[-2y\sqrt{4-y}\right]\right)dy\\ &= \int_0^4 4y\sqrt{4-y}\,dy\\ &= \left[\frac{-8(8+3y)}{15}(4-y)^{3/2}\right]_0^4\\ &= [0]-\left[\frac{-8(8)}{15}(4)^{3/2}\right]\\ &= \frac{512}{15}\end{aligned}$$

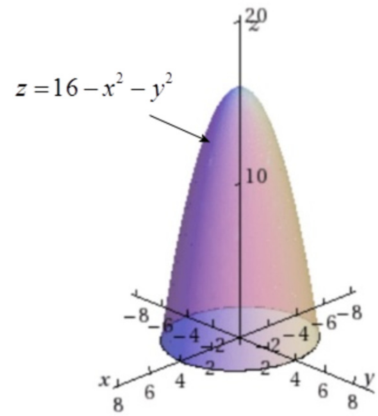
4.6 Pour trouver les limites de la région d'intégration, il faut connaitre l'équation de la courbe tracée par la surface sur le plan *xy*. Sur ce plan, on a $z = 0$. On a donc

$$0 = 16 - x^2 - y^2$$
$$x^2 + y^2 = 16$$

C'est un cercle de rayon 4.

Première possibilité : intégrer en y en premier

En y, on va de $-\sqrt{16-x^2}$ à $\sqrt{16-x^2}$



En x, on va de -4 à 4.

Le volume est donc

$$\begin{aligned} V &= \iint \left(16 - x^2 - y^2\right) dA \\ &= \int_{-4}^{4} \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \left(16 - x^2 - y^2\right) dy dx \end{aligned}$$

La première intégrale donne

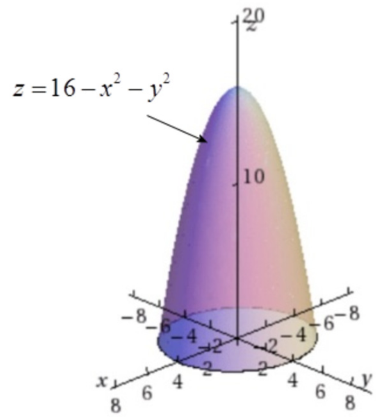
$$\begin{aligned} V &= \int_{-4}^{4} \left[16y - x^2 y - \tfrac{1}{3} y^3\right]_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dx \\ &= \int_{-4}^{4} \left(\left[16\sqrt{16-x^2} - x^2\sqrt{16-x^2} - \tfrac{1}{3}\left(16-x^2\right)^{3/2}\right] - \left[16\sqrt{16-x^2} - x^2\sqrt{16-x^2} - \tfrac{1}{3}\left(16-x^2\right)^{3/2}\right]\right) dx \\ &= \int_{-4}^{4} \left(32\sqrt{16-x^2} - 2x^2\sqrt{16-x^2} - \tfrac{2}{3}\left(16-x^2\right)^{3/2}\right) dx \end{aligned}$$

La deuxième intégrale (fait avec wolfram) donne

$$\begin{aligned} V &= \left[-\tfrac{1}{3} x\sqrt{16-x^2}\left(x^4 - 40\right) + 128 \arcsin \tfrac{x}{4}\right]_{-4}^{4} \\ &= \left[0 + 128 \arcsin 1\right] - \left[0 + 128 \arcsin(-1)\right] \\ &= 128 \arcsin 1 - 128 \arcsin(-1) \\ &= 128 \tfrac{\pi}{2} - 128 \cdot \left(-\tfrac{\pi}{2}\right) \\ &= 128\pi \end{aligned}$$

__Deuxième possibilité : intégrer en x en premier__

En *x*, on va de $-\sqrt{16-y^2}$ à $\sqrt{16-y^2}$



En *y*, on va de -4 à 4.

Le volume est donc

$$\begin{aligned}V &= \iint \left(16 - x^2 - y^2\right) dA \\ &= \int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} \left(16 - x^2 - y^2\right) dxdy\end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}V &= \int_{-4}^{4}\left[16x - \tfrac{1}{3}x^3 - y^2x\right]_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} dy \\ &= \int_{-4}^{4}\left(\left[16\sqrt{16-y^2} - \tfrac{1}{3}\left(16-y^2\right)^{3/2} - y^2\sqrt{16-y^2}\right] - \left[16\sqrt{16-y^2} - \tfrac{1}{3}\left(16-y^2\right)^{3/2} - y^2\sqrt{16-y^2}\right]\right) dx \\ &= \int_{-4}^{4}\left(32\sqrt{16-y^2} - \tfrac{2}{3}\left(16-y^2\right)^{3/2} - 2y^2\sqrt{16-y^2}\right) dy\end{aligned}$$

La deuxième intégrale (fait avec wolfram) donne

$$\begin{aligned}V &= \left[-\tfrac{1}{3}y\sqrt{16-y^2}\left(y^4 - 40\right) + 128\arcsin\tfrac{y}{4}\right]_{-4}^{4} \\ &= \left[0 + 128\arcsin 1\right] - \left[0 + 128\arcsin\left(-1\right)\right] \\ &= 128\arcsin 1 - 128\arcsin\left(-1\right) \\ &= 128\tfrac{\pi}{2} - 128\cdot\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) \\ &= 128\pi\end{aligned}$$

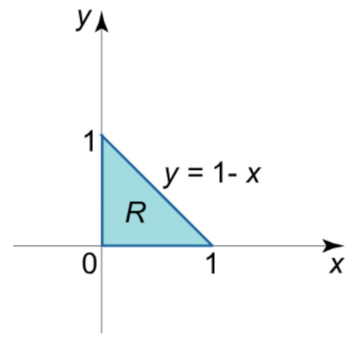
5.1 *__Première possibilité__* : on va intégrer en *y* en premier.

En *y*, on va de 0 à 1 m – *x*.

En *x*, on va de 0 à 1 m.

On va calculer la masse en premier

La masse est donc



$$\begin{aligned} M &= \iint \sigma dA \\ &= \iint 6\tfrac{kg}{m^4} xydA \\ &= \int_0^{1m}\int_0^{1m-x} 6\tfrac{kg}{m^4} xydydx \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} M &= 3\tfrac{kg}{m^4}\int_0^{1m}\left[xy^2\right]_0^{1m-x} dx \\ &= 3\tfrac{kg}{m^4}\int_0^{1m}\left(\left[x(1m-x)^2\right]-[0]\right)dx \\ &= 3\tfrac{kg}{m^4}\int_0^{1m}\left(x(1m-x)^2\right)dx \\ &= 3\tfrac{kg}{m^4}\int_0^{1m}\left(x\left(1m^2-2m\cdot x+x^2\right)\right)dx \\ &= 3\tfrac{kg}{m^4}\int_0^{1m}\left(1m^2x-2m\cdot x^2+x^3\right)dx \\ &= 3\tfrac{kg}{m^4}\left[\tfrac{1}{2}m^2x^2-\tfrac{2}{3}m\cdot x^3+\tfrac{1}{4}x^4\right]_0^{1m} \\ &= 3\tfrac{kg}{m^4}\left[\tfrac{1}{2}m^2(1m)^2-\tfrac{2}{3}m\cdot(1m)^3+\tfrac{1}{4}(1m)^4\right]-[0] \\ &= 3\tfrac{kg}{m^4}\left(\tfrac{1}{2}m^4-\tfrac{2}{3}m^4+\tfrac{1}{4}m^4\right) \\ &= 0,25kg \end{aligned}$$

La position en x du centre de masse est

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{M}\iint \sigma xdA \\ &= \frac{1}{0,25kg}\iint 6\tfrac{kg}{m^4} x^2 ydA \\ &= 24\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}\int_0^{1m-x} x^2 ydydx \end{aligned}$$

Cette intégrale vaut

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= 12\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}\left[x^2y^2\right]_0^{1m-x}dx \\
&= 12\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}\left(\left[x^2\left(1m-x\right)^2\right]-\left[0\right]\right)dx \\
&= 12\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}x^2\left(1m-x\right)^2dx \\
&= 12\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}x^2\left(1m^2-2m\cdot x+x^2\right)dx \\
&= 12\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}\left(1m^2\cdot x^2-2m\cdot x^3+x^4\right)dx \\
&= 12\tfrac{1}{m^4}\left[\tfrac{1}{3}m^2\cdot x^3-\tfrac{1}{2}m\cdot x^4+\tfrac{1}{5}x^5\right]_0^{1m} \\
&= 12\tfrac{1}{m^4}\left(\left[\tfrac{1}{3}m^2\cdot\left(1m\right)^3-\tfrac{1}{2}m\cdot\left(1m\right)^4+\tfrac{1}{5}\left(1m\right)^5\right]-\left[0\right]\right) \\
&= 12\tfrac{1}{m^4}\left(\tfrac{1}{3}m^5-\tfrac{1}{2}m^5+\tfrac{1}{5}m^5\right) \\
&= 4m-6m+\tfrac{12}{5}m \\
&= 0,4m
\end{aligned}$$

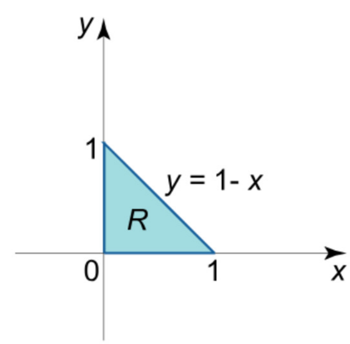
La position en *y* du centre de masse est

$$\begin{aligned}
y_{cm} &= \frac{1}{M}\iint\sigma y dA \\
&= \frac{1}{0,25kg}\iint 6\tfrac{kg}{m^4}xy^2dA \\
&= 24\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}\int_0^{1m-x}xy^2dydx
\end{aligned}$$

Cette intégrale vaut

$$\begin{aligned}
y_{cm} &= 8\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}\left[xy^3\right]_0^{1m-x} dx \\
&= 8\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}\left(\left[x(1m-x)^3\right]-[0]\right)dx \\
&= 8\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m} x(1m-x)^3\, dx \\
&= 8\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m} x\left(1m^3-3m^2\cdot x+3m\cdot x^2-x^3\right)dx \\
&= 8\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}\left(1m^3\cdot x-3m^2\cdot x^2+3m\cdot x^3-x^4\right)dx \\
&= 8\tfrac{1}{m^4}\left[\tfrac{1}{2}m^3\cdot x^2-1m^2\cdot x^3+\tfrac{3}{4}m\cdot x^4-\tfrac{1}{5}x^5\right]_0^{1m} \\
&= 8\tfrac{1}{m^4}\left(\left[\tfrac{1}{2}m^3\cdot(1m)^2-1m^2\cdot(1m)^3+\tfrac{3}{4}m\cdot(1m)^4-\tfrac{1}{5}(1m)^5\right]-[0]\right) \\
&= 8\tfrac{1}{m^4}\left(\tfrac{1}{2}m^5-1m^5+\tfrac{3}{4}m^5-\tfrac{1}{5}m^5\right) \\
&= 4m-8m+6m-\tfrac{8}{5}m \\
&= 0,4m
\end{aligned}$$

<u>*Deuxième possibilité*</u> : on va intégrer en x en premier.



En x, on va de 0 à 1 m – y.

En y, on va de 0 à 1 m.

On va calculer la masse en premier

La masse est donc

$$\begin{aligned}
M &= \iint \sigma dA \\
&= \iint 6\tfrac{kg}{m^4} xydA \\
&= \int_0^{1m}\int_0^{1m-y} 6\tfrac{kg}{m^4} xydxdy
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
M &= 3\tfrac{kg}{m^4}\int_0^{1m}\left[x^2 y\right]_0^{1m-y} dy \\
&= 3\tfrac{kg}{m^4}\int_0^{1m}\left(\left[(1m-y)^2\, y\right]-\left[0\right]\right)dy \\
&= 3\tfrac{kg}{m^4}\int_0^{1m}\left((1m-y)^2\, y\right)dy \\
&= 3\tfrac{kg}{m^4}\int_0^{1m}\left(\left(1m^2-2m\cdot y+y^2\right)y\right)dy \\
&= 3\tfrac{kg}{m^4}\int_0^{1m}\left(1m^2 y-2m\cdot y^2+y^3\right)dy \\
&= 3\tfrac{kg}{m^4}\left[\tfrac{1}{2}m^2\cdot y^2-\tfrac{2}{3}m\cdot y^3+\tfrac{1}{4}y^4\right]_0^{1m} \\
&= 3\tfrac{kg}{m^4}\left[\tfrac{1}{2}m^2\cdot(1m)^2-\tfrac{2}{3}m\cdot(1m)^3+\tfrac{1}{4}(1m)^4\right]-\left[0\right] \\
&= 3\tfrac{kg}{m^4}\left(\tfrac{1}{2}m^4-\tfrac{2}{3}m^4+\tfrac{1}{4}m^4\right) \\
&= 0,25kg
\end{aligned}$$

La position en x du centre de masse est

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \frac{1}{M}\iint \sigma x dA \\
&= \frac{1}{0,25kg}\iint 6\tfrac{kg}{m^4}x^2 y dA \\
&= 24\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}\int_0^{1m-y} x^2 y dx dy
\end{aligned}$$

Cette intégrale vaut

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= 8\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}\left[x^3 y\right]_0^{1m-y} dy \\
&= 8\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}\left(\left[(1m-y)^3\ y\right]-[0]\right)dy \\
&= 8\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}(1m-y)^3\ ydy \\
&= 8\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}\left(1m^3-3m^2\cdot y+3m\cdot y^2-y^3\right)ydy \\
&= 8\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}\left(1m^3\cdot y-3m^2\cdot y^2+3m\cdot y^3-y^4\right)dy \\
&= 8\tfrac{1}{m^4}\left[\tfrac{1}{2}m^3\cdot y^2-1m^2\cdot y^3+\tfrac{3}{4}m\cdot y^4-\tfrac{1}{5}y^5\right]_0^{1m} \\
&= 8\tfrac{1}{m^4}\left(\left[\tfrac{1}{2}m^3\cdot(1m)^2-1m^2\cdot(1m)^3+\tfrac{3}{4}m\cdot(1m)^4-\tfrac{1}{5}(1m)^5\right]-[0]\right) \\
&= 8\tfrac{1}{m^4}\left(\tfrac{1}{2}m^5-1m^5+\tfrac{3}{4}m^5-\tfrac{1}{5}m^5\right) \\
&= 4m-8m+6m-\tfrac{8}{5}m \\
&= 0,4m
\end{aligned}$$

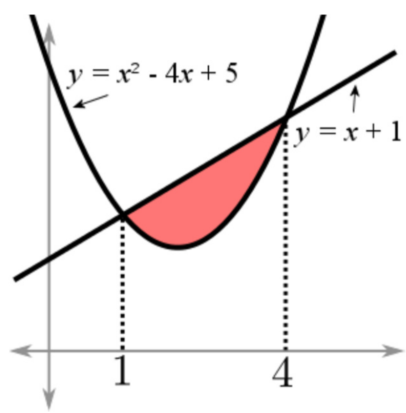
La position en y du centre de masse est

$$\begin{aligned}
y_{cm} &= \frac{1}{M}\iint \sigma y dA \\
&= \frac{1}{0,25kg}\iint 6\tfrac{kg}{m^4}xy^2 dA \\
&= 24\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}\int_0^{1m-y} xy^2 dxdy
\end{aligned}$$

Cette intégrale vaut

$$\begin{aligned}
y_{cm} &= 12\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}\left[x^2y^2\right]_0^{1m-y}dy \\
&= 12\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}\left(\left[(1m-y)^2\ y^2\right]-[0]\right)dy \\
&= 12\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}(1m-y)^2\ y^2dy \\
&= 12\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}x^2\left(1m^2-2m\cdot y+y^2\right)dy \\
&= 12\tfrac{1}{m^4}\int_0^{1m}\left(1m^2\cdot y^2-2m\cdot y^3+y^4\right)dy \\
&= 12\tfrac{1}{m^4}\left[\tfrac{1}{3}m^2\cdot y^3-\tfrac{1}{2}m\cdot y^4+\tfrac{1}{5}y^5\right]_0^{1m} \\
&= 12\tfrac{1}{m^4}\left(\left[\tfrac{1}{3}m^2\cdot(1m)^3-\tfrac{1}{2}m\cdot(1m)^4+\tfrac{1}{5}(1m)^5\right]-[0]\right) \\
&= 12\tfrac{1}{m^4}\left(\tfrac{1}{3}m^5-\tfrac{1}{2}m^5+\tfrac{1}{5}m^5\right) \\
&= 4m-6m+\tfrac{12}{5}m \\
&= 0,4m
\end{aligned}$$

5.2 a) Ici, on va intégrer en y en premier. On va aussi laisser tomber les unités pour alléger la solution.



En y, on va de $x^2 - 4x + 5$ à $x + 1$.

En x, on va de 1 à 4.

On va calculer la masse en premier

La masse est donc

$$\begin{aligned}
M &= \iint \sigma dA \\
&= \iint 2dA \\
&= \int_1^4\int_{x^2-4x+5}^{x+1}2dydx
\end{aligned}$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
M &= \int_1^4 \left[2y\right]_{x^2-4x+5}^{x+1} dx \\
&= \int_1^4 \left(\left[2(x+1)\right]-\left[2\left(x^2-4x+5\right)\right]\right) dx \\
&= \int_1^4 \left(2x+2-2x^2+8x-10\right) dx \\
&= \int_1^4 \left(-2x^2+10x-8\right) dx \\
&= \left[-\tfrac{2}{3}x^3+5x^2-8x\right]_1^4 \\
&= \left[-\tfrac{2}{3}64+5\cdot 16-8\cdot 4\right]-\left[-\tfrac{2}{3}+5-8\right] \\
&= \left[\tfrac{16}{3}\right]-\left[-\tfrac{11}{3}\right] \\
&= 9
\end{aligned}
$$

La masse est donc de 9 kg.

La position en x du centre de masse est

$$
\begin{aligned}
x_{cm} &= \frac{1}{M}\iint \sigma x dA \\
&= \frac{1}{9}\iint 2x dA \\
&= \tfrac{2}{9}\int_1^4 \int_{x^2-4x+5}^{x+1} x dy dx
\end{aligned}
$$

Cette intégrale vaut

$$
\begin{aligned}
x_{cm} &= \tfrac{2}{9}\int_1^4 \left[xy\right]_{x^2-4x+5}^{x+1} dx \\
&= \tfrac{2}{9}\int_1^4 \left(\left[x(x+1)\right]-\left[x\left(x^2-4x+5\right)\right]\right) dx \\
&= \tfrac{2}{9}\int_1^4 \left(x^2+x-x^3+4x^2-5x\right) dx \\
&= \tfrac{2}{9}\int_1^4 \left(-x^3+5x^2-4x\right) dx \\
&= \tfrac{2}{9}\left[-\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{5}{3}x^3-2x^2\right]_1^4 \\
&= \tfrac{2}{9}\left(\left[-\tfrac{1}{4}\cdot 256+\tfrac{5}{3}\cdot 64-2\cdot 16\right]-\left[-\tfrac{1}{4}+\tfrac{5}{3}-2\right]\right) \\
&= \tfrac{2}{9}\left(\left[\tfrac{32}{3}\right]-\left[-\tfrac{7}{12}\right]\right) \\
&= \tfrac{5}{2}
\end{aligned}
$$

La position en y du centre de masse est donc

$$
\begin{aligned}
y_{cm} &= \frac{1}{M}\iint \sigma y dA \\
&= \frac{1}{9}\iint 2 y dA \\
&= \tfrac{2}{9}\int_1^4 \int_{x^2-4x+5}^{x+1} y dy dx
\end{aligned}
$$

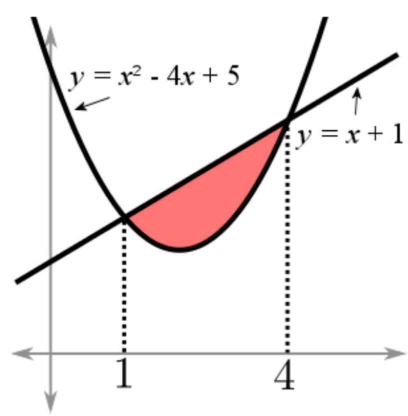
Cette intégrale vaut

$$
\begin{aligned}
y_{cm} &= \tfrac{1}{9}\int_1^4 \left[y^2 \right]_{x^2-4x+5}^{x+1} dx \\
&= \tfrac{1}{9}\int_1^4 \left(\left[(x+1)^2 \right] - \left[\left(x^2-4x+5 \right)^2 \right] \right) dx \\
&= \tfrac{1}{9}\int_1^4 \left(\left(x^2+2x+1 \right) - \left(x^4+16x^2+25-8x^3+10x^2-40x \right) \right) dx \\
&= \tfrac{1}{9}\int_1^4 \left(-x^4+8x^3-25x^2+42x-24 \right) dx \\
&= \tfrac{1}{9}\left[-\tfrac{1}{5}x^5+2x^4-\tfrac{25}{3}x^3+21x^2-24x \right]_1^4 \\
&= \tfrac{1}{9}\left(\left[-\tfrac{1}{5}\cdot 1024+2\cdot 256-\tfrac{25}{3}\cdot 64+21\cdot 16-24\cdot 4 \right] - \left[-\tfrac{1}{5}+2-\tfrac{25}{3}+21-24 \right] \right) \\
&= \tfrac{1}{9}\left(\left[\tfrac{208}{15} \right] - \left[-\tfrac{143}{15} \right] \right) \\
&= \tfrac{13}{5}
\end{aligned}
$$

b) Ici, on va intégrer en y en premier. On va aussi laisser tomber les unités pour alléger la solution.

En y, on va de $x^2 - 4x + 5$ à $x + 1$.

En x, on va de 1 à 4.



On va calculer la masse en premier

La masse est donc

$$
\begin{aligned}
M &= \iint \sigma dA \\
&= \iint 2 dA \\
&= \int_1^4 \int_{x^2-4x+5}^{x+1} 4x dy dx
\end{aligned}
$$

On a donc

$$\begin{aligned}
M &= \int_1^4 \left[4xy\right]_{x^2-4x+5}^{x+1} dx \\
&= \int_1^4 \left(\left[4x(x+1)\right]-\left[4x\left(x^2-4x+5\right)\right]\right) dx \\
&= \int_1^4 \left(4x^2+4x-4x^3+16x^2-20x\right) dx \\
&= \int_1^4 \left(-4x^3+20x^2-16x\right) dx \\
&= \left[-x^4+\tfrac{20}{3}x^3-8x^2\right]_1^4 \\
&= \left[-256+\tfrac{20}{3}64-8\cdot 16\right]-\left[-1+\tfrac{20}{3}-8\right] \\
&= \left[\tfrac{128}{3}\right]-\left[-\tfrac{7}{3}\right] \\
&= 45
\end{aligned}$$

La masse est donc de 45 kg.

La position en x du centre de masse est

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \frac{1}{M}\iint \sigma x dA \\
&= \frac{1}{45}\iint 4x \cdot x dA \\
&= \tfrac{4}{45}\int_1^4 \int_{x^2-4x+5}^{x+1} x^2 dy dx
\end{aligned}$$

Cette intégrale vaut

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \tfrac{4}{45}\int_1^4 \left[x^2 y\right]_{x^2-4x+5}^{x+1} dx \\
&= \tfrac{4}{45}\int_1^4 \left(\left[x^2(x+1)\right]-\left[x^2\left(x^2-4x+5\right)\right]\right) dx \\
&= \tfrac{4}{45}\int_1^4 \left(x^3+x^2-x^4+4x^3-5x^2\right) dx \\
&= \tfrac{4}{45}\int_1^4 \left(-x^4+5x^3-4x^2\right) dx \\
&= \tfrac{4}{45}\left[-\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{5}{4}x^4-\tfrac{4}{3}x^3\right]_1^4 \\
&= \tfrac{4}{45}\left(\left[-\tfrac{1}{5}\cdot 1024+\tfrac{5}{4}\cdot 256-\tfrac{4}{3}\cdot 64\right]-\left[-\tfrac{1}{5}+\tfrac{5}{4}-\tfrac{4}{3}\right]\right) \\
&= \tfrac{4}{45}\left(\left[\tfrac{448}{15}\right]-\left[-\tfrac{17}{60}\right]\right) \\
&= \tfrac{67}{25}
\end{aligned}$$

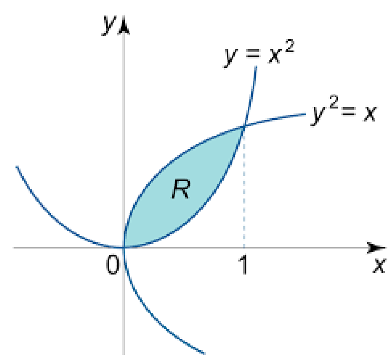
La position en y du centre de masse est donc

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{1}{M}\iint \sigma y dA \\ &= \frac{1}{45}\iint 4xydA \\ &= \tfrac{4}{45}\int_1^4 \int_{x^2-4x+5}^{x+1} xydydx \end{aligned}$$

Cette intégrale vaut

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \tfrac{2}{45}\int_1^4 x\left[y^2\right]_{x^2-4x+5}^{x+1} dx \\ &= \tfrac{2}{45}\int_1^4 \left(\left[x(x+1)^2\right]-\left[x\left(x^2-4x+5\right)^2\right]\right)dx \\ &= \tfrac{2}{45}\int_1^4 \left(\left(x^3+2x^2+x\right)-\left(x^5+16x^3+25x-8x^4+10x^3-40x^2\right)\right)dx \\ &= \tfrac{2}{45}\int_1^4 \left(-x^5+8x^4-25x^3+42x^2-24x\right)dx \\ &= \tfrac{2}{45}\left[-\tfrac{1}{6}x^6+\tfrac{8}{5}x^5-\tfrac{25}{4}x^4+14x^3-12x^2\right]_1^4 \\ &= \tfrac{2}{45}\left(\left[-\tfrac{1}{6}\cdot 4096+\tfrac{8}{5}\cdot 1024-\tfrac{25}{4}\cdot 256+14\cdot 64-12\cdot 16\right]-\left[-\tfrac{1}{6}+\tfrac{8}{5}-\tfrac{25}{4}+14-12\right]\right) \\ &= \tfrac{2}{45}\left(\left[\tfrac{896}{15}\right]-\left[-\tfrac{169}{60}\right]\right) \\ &= \tfrac{139}{50} \end{aligned}$$

5.3 a) Ici, on va intégrer en y en premier. (On pourrait aussi intégrer en x en premier, le niveau de difficulté serait exactement le même.) On va aussi laisser tomber les unités pour alléger la solution.



En y, on va de x^2 à $\sqrt{x}$

En x, on va de 0 à 1.

On va calculer la masse en premier.

La masse est donc

$$\begin{aligned} M &= \iint \sigma dA \\ &= \iint 6dA \\ &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 6dydx \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 \left[6y\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 \left(6\sqrt{x} - 6x^2\right) dx \\ &= \left[4x^{3/2} - 2x^3\right]_0^1 \\ &= \left[4-2\right] - \left[0\right] \\ &= 2 \end{aligned}$$

La masse est donc de 2 kg.

La position en x du centre de masse est

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{M}\iint \sigma x dA \\ &= \frac{1}{2}\iint 6x dA \\ &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 3x dy dx \end{aligned}$$

Cette intégrale vaut

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \int_0^1 \left[3xy\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 \left(3x\sqrt{x} - 3x^3\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(3x^{3/2} - 3x^3\right) dx \\ &= \left[\tfrac{6}{5}x^{5/2} - \tfrac{3}{4}x^4\right]_0^1 \\ &= \left[\tfrac{6}{5} - \tfrac{3}{4}\right] - \left[0\right] \\ &= \tfrac{9}{20} \\ &= 0,45 \end{aligned}$$

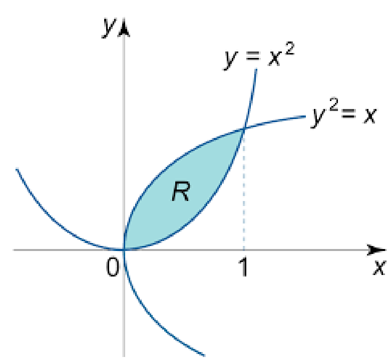
La position en y du centre de masse est donc

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{1}{M}\iint \sigma x dA \\ &= \frac{1}{2}\iint 6y dA \\ &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 3y dy dx \end{aligned}$$

Cette intégrale vaut

$$\begin{aligned}
y_{cm} &= \frac{1}{M}\iint \sigma x dA \\
&= \frac{1}{2}\iint 6 y dA \\
&= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 3 y dy dx \\
&= \int_0^1 \left[\tfrac{3}{2} y^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^1 \left(\tfrac{3}{2} x - \tfrac{3}{2} x^4\right) dx \\
&= \left[\tfrac{3}{4} x^2 - \tfrac{3}{10} x^5\right]_0^1 \\
&= \left[\tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{10}\right] - [0] \\
&= \tfrac{9}{20} \\
&= 0,45
\end{aligned}$$

b) Ici, on va intégrer en y en premier. (On pourrait aussi intégrer en x en premier, le niveau de difficulté serait exactement le même.) On va aussi laisser tomber les unités pour alléger la solution.



En y, on va de x^2 à $\sqrt{x}$

En x, on va de 0 à 1.

On va calculer la masse en premier.

La masse est donc

$$\begin{aligned}
M &= \iint \sigma dA \\
&= \iint \left(7x^2 + 7y^2\right) dA \\
&= 7\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2 + y^2\right) dy dx
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
M &= 7\int_0^1 \left[x^2 y + \tfrac{1}{3} y^3 \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\
&= 7\int_0^1 \left(\left[x^2 \sqrt{x} + \tfrac{1}{3} x^{3/2} \right] - \left[x^4 + \tfrac{1}{3} x^6 \right] \right) dx \\
&= 7\int_0^1 \left(x^{5/2} + \tfrac{1}{3} x^{3/2} - x^4 - \tfrac{1}{3} x^6 \right) dx \\
&= 7\left[\tfrac{2}{7} x^{7/2} + \tfrac{2}{15} x^{5/2} - \tfrac{1}{5} x^5 - \tfrac{1}{21} x^7 \right]_0^1 \\
&= 7\left(\left[\tfrac{2}{7} + \tfrac{2}{15} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{21} \right] - [0] \right) \\
&= \tfrac{6}{5} \\
&= 1,2
\end{aligned}$$

La masse est donc de 1,2 kg.

La position en x du centre de masse est

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \frac{1}{M} \iint \sigma x dA \\
&= \frac{1}{6/5} \iint \left(7x^2 + 7y^2 \right) x dA \\
&= \frac{35}{6} \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^3 + xy^2 \right) dy dx
\end{aligned}$$

Cette intégrale vaut

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \tfrac{35}{6} \int_0^1 \left[x^3 y + \tfrac{1}{3} xy^3 \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\
&= \tfrac{35}{6} \int_0^1 \left(\left[x^3 \sqrt{x} + \tfrac{1}{3} x^{5/2} \right] - \left[x^5 + \tfrac{1}{3} x^7 \right] \right) dx \\
&= \tfrac{35}{6} \int_0^1 \left(x^{7/2} + \tfrac{1}{3} x^{5/2} - x^5 - \tfrac{1}{3} x^7 \right) dx \\
&= \tfrac{35}{6} \left[\tfrac{2}{9} x^{9/2} + \tfrac{2}{21} x^{7/2} - \tfrac{1}{6} x^6 - \tfrac{1}{24} x^8 \right]_0^1 \\
&= \tfrac{35}{6} \left(\left[\tfrac{2}{9} + \tfrac{2}{21} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{24} \right] - [0] \right) \\
&= \tfrac{275}{432}
\end{aligned}$$

La position en y du centre de masse est donc

$$\begin{aligned}
y_{cm} &= \frac{1}{M}\iint \sigma x dA \\
&= \frac{1}{6/5}\iint \left(7x^2+7y^2\right) y dA \\
&= \frac{35}{6}\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2y+y^3\right) dydx
\end{aligned}$$

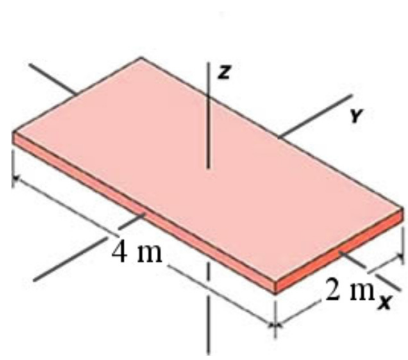
Cette intégrale vaut

$$\begin{aligned}
y_{cm} &= \tfrac{35}{6}\int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}x^2y^2+\tfrac{1}{4}y^4\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\
&= \tfrac{35}{6}\int_0^1 \left(\left[\tfrac{1}{2}x^2\cdot x+\tfrac{1}{4}x^2\right]-\left[\tfrac{1}{2}x^2\cdot x^4+\tfrac{1}{4}x^8\right]\right) dx \\
&= \tfrac{35}{6}\int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}x^3+\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{1}{2}x^6-\tfrac{1}{4}x^8\right) dx \\
&= \tfrac{35}{6}\left[\tfrac{1}{8}x^4+\tfrac{1}{12}x^3-\tfrac{1}{14}x^7-\tfrac{1}{36}x^9\right]_0^1 \\
&= \tfrac{35}{6}\left(\left[\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{12}-\tfrac{1}{14}-\tfrac{1}{36}\right]-[0]\right) \\
&= \tfrac{275}{432}
\end{aligned}$$

6.1 *Version 1 :* On va intégrer en y en premier.

En y, on va de -1 m à 1 m.

En x, on va de -2 m à 2 m.



Si l'axe de rotation est l'axe des x, le moment d'inertie est

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint \sigma y^2 dA \\
&= \iint 9\tfrac{kg}{m^4} x^2y^2 dA \\
&= \int_{-2m}^{2m}\int_{-1m}^{1m} 9\tfrac{kg}{m^4} x^2y^2 dydx
\end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}
I_x &= \int_{-2m}^{2m}\left[3\tfrac{kg}{m^4}x^2y^3\right]_{-1m}^{1m} dx \\
&= \int_{-2m}^{2m}\left(\left[3\tfrac{kg}{m^4}x^2(1m)^3\right]-\left[3\tfrac{kg}{m^4}x^2(-1m)^3\right]\right) dx \\
&= \int_{-2m}^{2m}\left(6\tfrac{kg}{m}x^2\right) dx
\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} I_x &= \left[2\tfrac{kg}{m} x^3 \right]_{-2m}^{2m} \\ &= \left[2\tfrac{kg}{m} (2m)^3 \right] - \left[2\tfrac{kg}{m} (-2m)^3 \right] \\ &= 32kgm^2 \end{aligned}$$

Si l'axe de rotation est l'axe des y, le moment d'inertie est

$$\begin{aligned} I_y &= \iint \sigma x^2 dA \\ &= \iint 9\tfrac{kg}{m^4} x^2 x^2 dA \\ &= \int_{-2m}^{2m} \int_{-1m}^{1m} 9\tfrac{kg}{m^4} x^4 dydx \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} I_y &= \int_{-2m}^{2m} \left[9\tfrac{kg}{m^4} x^4 y \right]_{-1m}^{1m} dx \\ &= \int_{-2m}^{2m} \left(\left[9\tfrac{kg}{m^4} x^4 (1m) \right] - \left[9\tfrac{kg}{m^4} x^5 (-1m) \right] \right) dx \\ &= \int_{-2m}^{2m} \left(18\tfrac{kg}{m^3} x^4 \right) dx \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} I_y &= \left[\tfrac{18}{5} \tfrac{kg}{m^3} x^5 \right]_{-2m}^{2m} \\ &= \left[\tfrac{18}{5} \tfrac{kg}{m^3} (2m)^5 \right] - \left[\tfrac{6}{5} \tfrac{kg}{m^3} (-2m)^5 \right] \\ &= \tfrac{1152}{5} kgm^2 \\ &= 230,4kgm^2 \end{aligned}$$

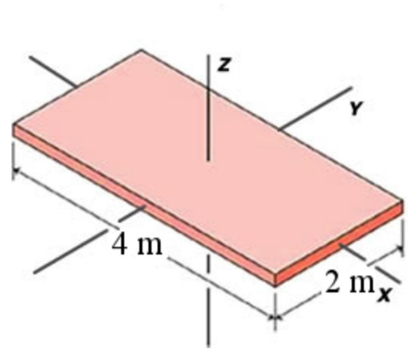
Si l'axe de rotation est l'axe des z, le moment d'inertie est

$$\begin{aligned}
I_z &= \iint \sigma\left(x^2+y^2\right)dA \\
&= \iint \sigma x^2 dA + \iint \sigma y^2 dA \\
&= I_x + I_y \\
&= 32kgm^2 + 230,4kgm^2 \\
&= 262,4kgm^2
\end{aligned}$$

<u>*Version 2 :*</u> On va intégrer en *x* en premier.

En *x*, on va de -2 m à 2 m.

En *y*, on va de -1 m à 1 m.



Si l'axe de rotation est l'axe des *x*, le moment d'inertie est

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint \sigma y^2 dA \\
&= \iint 9\tfrac{kg}{m^4} x^2 y^2 dA \\
&= \int_{-1m}^{1m}\int_{-2m}^{2m} 9\tfrac{kg}{m^4} x^2 y^2 dxdy
\end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}
I_x &= \int_{-1m}^{1m}\left[3\tfrac{kg}{m^4} x^3 y^2\right]_{-2m}^{2m} dy \\
&= \int_{-2m}^{2m}\left(\left[3\tfrac{kg}{m^4}(2m)^3\, y^2\right]-\left[3\tfrac{kg}{m^4}(-2m)^3\, y^2\right]\right)dy \\
&= \int_{-1m}^{1m}\left(48\tfrac{kg}{m}\, y^2\right)dy
\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}
I_x &= \left[16\tfrac{kg}{m}\, y^3\right]_{-1m}^{1m} \\
&= \left[16\tfrac{kg}{m}(1m)^3\right]-\left[16\tfrac{kg}{m}(-1m)^3\right] \\
&= 32kgm^2
\end{aligned}$$

Si l'axe de rotation est l'axe des *y*, le moment d'inertie est

$$\begin{aligned}
I_y &= \iint \sigma x^2 dA \\
&= \iint 9\tfrac{kg}{m^4} x^2 x^2 dA \\
&= \int_{-1m}^{1m} \int_{-2m}^{2m} 9\tfrac{kg}{m^4} x^4 dxdy
\end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}
I_y &= \int_{-1m}^{1m} \left[\tfrac{9}{5}\tfrac{kg}{m^4} x^5 \right]_{-2m}^{2m} dy \\
&= \int_{-1m}^{1m} \left(\left[\tfrac{9}{5}\tfrac{kg}{m^4} (2m)^5 \right] - \left[\tfrac{9}{5}\tfrac{kg}{m^4} (-2m)^5 \right] \right) dy \\
&= \int_{-1m}^{1m} \left(\tfrac{576}{5} kgm \right) dy
\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}
I_y &= \left[\tfrac{576}{5} kgm \cdot y \right]_{-1m}^{1m} \\
&= \left[\tfrac{576}{5} kgm (1m) \right] - \left[\tfrac{576}{5} kgm (-1m) \right] \\
&= \tfrac{1152}{5} kgm^2 \\
&= 230,4 kgm^2
\end{aligned}$$

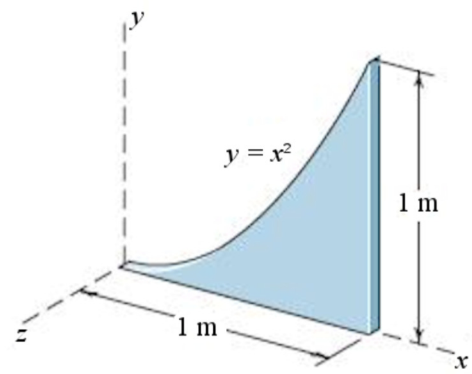
Si l'axe de rotation est l'axe des z, le moment d'inertie est

$$\begin{aligned}
I_z &= \iint \sigma \left(x^2 + y^2 \right) dA \\
&= \iint \sigma x^2 dA + \iint \sigma y^2 dA \\
&= I_x + I_y \\
&= 32kgm^2 + 230,4kgm^2 \\
&= 262,4kgm^2
\end{aligned}$$

6.2 *Version 1* : On va intégrer en y en premier. (On va laisser tomber les unités pour simplifier.)

En y, on va de 0 à x^2.

En x, on va de 0 à 1.



Si l'axe de rotation est l'axe des x, le moment d'inertie est

$$\begin{aligned} I_x &= \iint \sigma y^2 dA \\ &= \iint 42 y^2 dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{x^2} 42 y^2 dy dx \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^1 \left[14 y^3 \right]_0^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(\left[14 x^6 \right] - [0] \right) dx \\ &= \int_0^1 14 x^6 dx \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} I_x &= \left[2x^7 \right]_0^1 \\ &= [2 \cdot 1] - [0] \\ &= 2 \end{aligned}$$

Si l'axe de rotation est l'axe des y, le moment d'inertie est

$$\begin{aligned} I_y &= \iint \sigma x^2 dA \\ &= \iint 42 x^2 dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{x^2} 42 x^2 dy dx \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} I_y &= \int_0^1 \left[42 x^2 y \right]_0^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(\left[42 x^2 x^2 \right] - [0] \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(42 x^4 \right) dx \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} I_y &= \left[\tfrac{42}{5}x^5\right]_0^1 \\ &= \left[\tfrac{42}{5}(1)^5\right] - [0] \\ &= \tfrac{42}{5} \\ &= 8,4 \end{aligned}$$

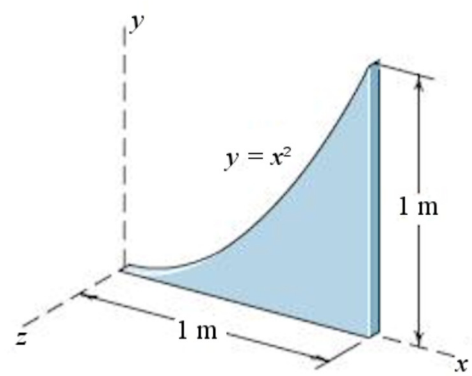
Si l'axe de rotation est l'axe des *z*, le moment d'inertie est

$$\begin{aligned} I_z &= \iint \sigma\left(x^2+y^2\right)dA \\ &= \iint \sigma x^2 dA + \iint \sigma y^2 dA \\ &= I_x + I_y \\ &= 2kgm^2 + 8,4kgm^2 \\ &= 10,4kgm^2 \end{aligned}$$

Version 2 : On va intégrer en *x* en premier. (On va laisser tomber les unités pour simplifier.)

En *x*, on va de $\sqrt{y}$ à 1.

En *y*, on va de 0 à 1.



Si l'axe de rotation est l'axe des *x*, le moment d'inertie est

$$\begin{aligned} I_x &= \iint \sigma y^2 dA \\ &= \iint 42y^2 dA \\ &= \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 42y^2 dx dy \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^1 \left[42y^2x\right]_{\sqrt{y}}^1 dy \\ &= \int_0^1 \left(\left[42y^2\right] - \left[42y^2\sqrt{y}\right]\right) dy \\ &= \int_0^1 \left(42y^2 - 42y^{5/2}\right) dy \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} I_x &= \left[14y^3 - 12y^{7/2}\right]_0^1 \\ &= [14-12]-[0] \\ &= 2 \end{aligned}$$

Si l'axe de rotation est l'axe des *y*, le moment d'inertie est

$$\begin{aligned} I_y &= \iint \sigma x^2 dA \\ &= \iint 42x^2 dA \\ &= \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 42x^2 dxdy \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} I_y &= \int_0^1 \left[14x^3\right]_{\sqrt{y}}^1 dy \\ &= \int_0^1 \left([14]-\left[14\sqrt{y}^3\right]\right) dy \\ &= \int_0^1 \left(14-14y^{3/2}\right) dy \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} I_y &= \left[14y - \tfrac{28}{5}y^{5/2}\right]_0^1 \\ &= \left[14-\tfrac{28}{5}\right]-[0] \\ &= \tfrac{42}{5} \\ &= 8,4 \end{aligned}$$

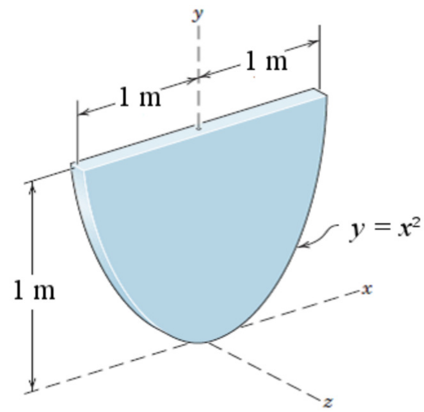
Si l'axe de rotation est l'axe des *z*, le moment d'inertie est

$$\begin{aligned} I_z &= \iint \sigma\left(x^2+y^2\right) dA \\ &= \iint \sigma x^2 dA + \iint \sigma y^2 dA \\ &= I_x + I_y \\ &= 2kgm^2 + 8,4kgm^2 \\ &= 10,4kgm^2 \end{aligned}$$

6.3 *Version 1* : On va intégrer en y en premier. (On va laisser tomber les unités pour simplifier.)

En y, on va de x^2 à 1.

En x, on va de -1 à 1.



Si l'axe de rotation est l'axe des x, le moment d'inertie est

$$\begin{aligned} I_x &= \iint \sigma y^2 dA \\ &= \iint 21 y^2 dA \\ &= \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} 21 y^2 dy dx \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{-1}^{1} \left[7y^3 \right]_{x^2}^{1} dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left([7] - \left[7x^6 \right] \right) dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left(7 - 7x^6 \right) dx \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} I_x &= \left[7x - x^7 \right]_{-1}^{1} \\ &= \left[7 \cdot 1 - 1^7 \right] - \left[7 \cdot (-1) - (-1)^7 \right] \\ &= 12 \end{aligned}$$

Si l'axe de rotation est l'axe des y, le moment d'inertie est

$$\begin{aligned} I_y &= \iint \sigma x^2 dA \\ &= \iint 21 x^2 dA \\ &= \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} 21 x^2 dy dx \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} I_y &= \int_{-1}^{1} \left[21x^2 y \right]_{x^2}^{1} dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\left[21x^2 \right] - \left[21x^4 \right] \right) dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left(21x^2 - 21x^4 \right) dx \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} I_y &= \left[7x^3 - \tfrac{21}{5} x^5 \right]_{-1}^{1} \\ &= \left[7(1)^3 - \tfrac{21}{5} \cdot (1)^5 \right] - \left[7(-1)^3 - \tfrac{21}{5} \cdot (-1)^5 \right] \\ &= \tfrac{28}{5} \\ &= 5,6 \end{aligned}$$

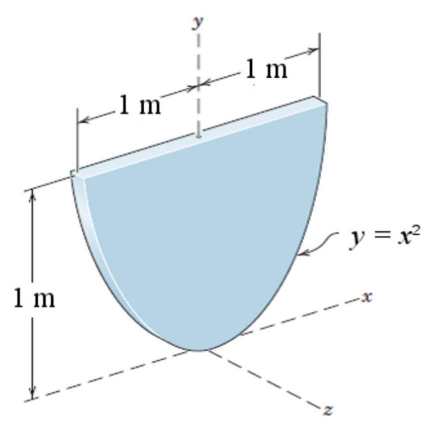
Si l'axe de rotation est l'axe des z, le moment d'inertie est

$$\begin{aligned} I_z &= \iint \sigma \left(x^2 + y^2 \right) dA \\ &= \iint \sigma x^2 dA + \iint \sigma y^2 dA \\ &= I_x + I_y \\ &= 12 kgm^2 + 5,6 kgm^2 \\ &= 17,6 kgm^2 \end{aligned}$$

<u>*Version 2*</u> : On va intégrer en x en premier. (On va laisser tomber les unités pour simplifier.)

En x, on va de $-\sqrt{y}$ à $\sqrt{y}$.

En y, on va de 0 à 1.



Si l'axe de rotation est l'axe des x, le moment d'inertie est

$$\begin{aligned} I_x &= \iint \sigma y^2 dA \\ &= \iint 21 y^2 dA \\ &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 21 y^2 dx dy \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}I_x &= \int_0^1 \left[21y^2x\right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^1 \left(\left[21y^2\sqrt{y}\right]-\left[-21y^2\sqrt{y}\right]\right)dy \\ &= \int_0^1 42y^{5/2}dy\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}I_x &= \left[12y^{7/2}\right]_0^1 \\ &= [12]-[0] \\ &= 12\end{aligned}$$

Si l'axe de rotation est l'axe des y, le moment d'inertie est

$$\begin{aligned}I_y &= \iint \sigma x^2 dA \\ &= \iint 21x^2 dA \\ &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 21x^2 dxdy\end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}I_y &= \int_0^1 \left[7x^3\right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^1 \left(\left[7\sqrt{y}^3\right]-\left[-7\sqrt{y}^3\right]\right)dy \\ &= \int_0^1 14y^{3/2}dy\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}I_y &= \left[\tfrac{28}{5}y^{5/2}\right]_0^1 \\ &= \left[\tfrac{28}{5}\right]-[0] \\ &= \tfrac{28}{5} \\ &= 5,6\end{aligned}$$

Si l'axe de rotation est l'axe des z, le moment d'inertie est

$$
\begin{aligned}
I_z &= \iint \sigma\left(x^2+y^2\right)dA \\
&= \iint \sigma x^2 dA + \iint \sigma y^2 dA \\
&= I_x + I_y \\
&= 12kgm^2 + 5,6kgm^2 \\
&= 17,6kgm^2
\end{aligned}
$$

7.1

$$
\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{1^2+1^2} \\
&= \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta &= \arctan\tfrac{1}{1} \\
&= \tfrac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

La solution est donc $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

7.2

$$
\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{(-3)^2+4^2} \\
&= 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta &= \arctan\tfrac{4}{-3} \\
&= 2,2143
\end{aligned}
$$

La solution est donc (5, 2,2143).

7.3

$$
\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{5^2+(-12)^2} \\
&= 13
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta &= \arctan\tfrac{-12}{5} \\
&= -1,176
\end{aligned}
$$

La solution est donc (13, -1,176).

7.4

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{(-20)^2 + (-21)^2} \\ &= 29\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan \tfrac{-21}{-20} \\ &= 3{,}9514\end{aligned}$$

La solution est donc (29, 3,9514).

7.5

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos\theta \\ &= 2\cos\tfrac{\pi}{3} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= \rho \sin\theta \\ &= 2\sin\tfrac{\pi}{3} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

La solution est donc $\left(1, \sqrt{3}\right)$.

7.6

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos\theta \\ &= 3\cos\tfrac{\pi}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= \rho \sin\theta \\ &= 3\sin\tfrac{\pi}{2} \\ &= 3\end{aligned}$$

La solution est donc (0, 3).

7.7

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ &= 1\cos\tfrac{-\pi}{3} \\ &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \rho\sin\theta \\ &= 1\sin\tfrac{-\pi}{3} \\ &= \tfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

La solution est donc $\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$.

7.8

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ &= 4\cos 0 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \rho\sin\theta \\ &= 4\sin 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

La solution est donc (4, 0).

7.9

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ \rho\cos\theta &= 3 \\ \rho &= \frac{3}{\cos\theta} \\ \rho &= 3\sec\theta \end{aligned}$$

7.10

$$\begin{aligned} y &= 2 \\ \rho\sin\theta &= 2 \\ \rho &= \frac{2}{\sin\theta} \\ \rho &= 2\csc\theta \end{aligned}$$

7.11

$$
\begin{gathered}
y=6x \\
\rho\sin\theta=6\rho\cos\theta \\
\sin\theta=6\cos\theta \\
\tan\theta=6 \\
\theta=1,4056
\end{gathered}
$$

7.12

$$
\begin{gathered}
y^2-x^2=4 \\
\rho^2\sin^2\theta-\rho^2\cos^2\theta=4 \\
\rho^2\left(\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)=4 \\
\rho^2=\frac{4}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}
\end{gathered}
$$

Ce serait une déjà une bonne réponse. On peut la simplifier un peu puisque

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$

On a donc

$$
\begin{gathered}
\rho^2=\frac{4}{\sin^2\theta-\cos^2\theta} \\
\rho^2=\frac{-4}{\cos 2\theta}
\end{gathered}
$$

7.13

$$
\begin{gathered}
(x-2)^2+y^2=4 \\
(\rho\cos\theta-2)^2+\rho^2\sin^2\theta=4 \\
\rho^2\cos^2\theta-4\rho\cos\theta+4+\rho^2\sin^2\theta=4 \\
\rho^2\cos^2\theta-4\rho\cos\theta+\rho^2\sin^2\theta=0 \\
\rho^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)-4\rho\cos\theta=0 \\
\rho^2-4\rho\cos\theta=0 \\
\rho^2=4\rho\cos\theta \\
\rho=4\cos\theta
\end{gathered}
$$

7.14 *Version 1*

$$x^2 + 4y^2 = 4$$
$$\rho^2 \cos^2\theta + 4\rho^2 \sin^2\theta = 4$$
$$\rho^2\left(\cos^2\theta + 4\sin^2\theta\right) = 4$$
$$\rho^2 = \frac{4}{\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}$$

Version 2

$$x^2 + 4y^2 = 4$$
$$\rho^2 \cos^2\theta + 4\rho^2 \sin^2\theta = 4$$
$$\rho^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + 3\rho^2\sin^2\theta = 4$$
$$\rho^2 + 3\rho^2\sin^2\theta = 4$$
$$\rho^2\left(1 + 3\sin^2\theta\right) = 4$$
$$\rho^2 = \frac{4}{1 + 3\sin^2\theta}$$

7.15

$$\theta = \tfrac{\pi}{4}$$
$$\arctan\tfrac{y}{x} = \tfrac{\pi}{4}$$
$$\tfrac{y}{x} = \tan\tfrac{\pi}{4}$$
$$\tfrac{y}{x} = 1$$
$$y = x$$

7.16

$$\rho = 3$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

7.17

$$\rho\cos\theta = 5$$
$$x = 5$$

7.18

$$\rho^2 \cos 2\theta = 1$$
$$\rho^2 \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = 1$$
$$\rho^2 \cos^2\theta - \rho^2 \sin^2\theta = 1$$
$$x^2 - y^2 = 1$$

7.19

$$\rho\left(\sin\theta + \rho\cos^2\theta\right) = 1$$
$$\rho\sin\theta + \rho^2\cos^2\theta = 1$$
$$y + x^2 = 1$$
$$y = 1 - x^2$$

7.20

$$\rho = a\cos\theta + b\sin\theta$$
$$\rho^2 = a\rho\cos\theta + b\rho\sin\theta$$
$$x^2 + y^2 = ax + by$$
$$x^2 - ax + y^2 - by = 0$$

On va maintenant compléter les carrés à gauche

$$x^2 - ax + \left(\tfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 - by + \left(\tfrac{b}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{b}{2}\right)^2$$
$$\left(x - \tfrac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{b}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{b}{2}\right)^2$$

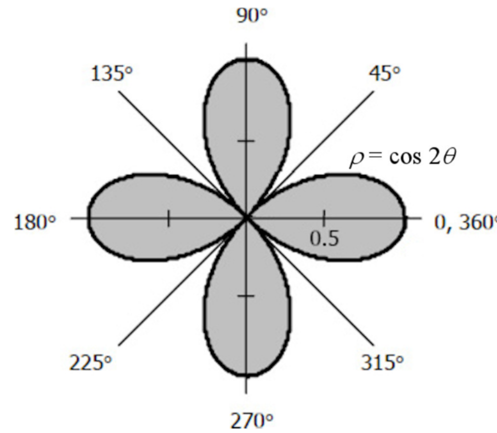
Ceci est l'équation d'un cercle dont le centre est à $\left(\tfrac{a}{2},\tfrac{b}{2}\right)$ et qui a un rayon de $r = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. C'est donc un cercle centré sur $\left(\tfrac{a}{2},\tfrac{b}{2}\right)$ et qui passe par l'origine.

7.27 L'aire est

$$A = \iint dA$$

On va calculer l'aire de la région entre 0 et 45°. Il ne restera qu'à multiplier par 8 pour obtenir l'aire totale.

On va intégrer en ρ en premier.



En ρ, on va de 0 à $\cos 2\theta$.

En θ, on va de 0 à π/4.

L'aire entre 0 et 45° est donc

$$\begin{aligned} A &= \iint dA \\ &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

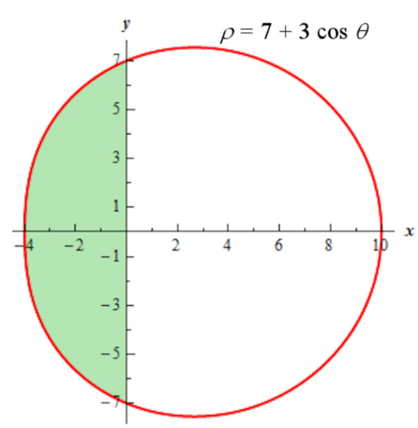
$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/4} \left[\tfrac{1}{2}\rho^2 \right]_0^{\cos 2\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \left(\left[\tfrac{1}{2}\cos^2 2\theta \right] - [0] \right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}\cos^2 2\theta d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} A &= \left[\tfrac{1}{8}\cos(2\theta)\sin(2\theta) + \tfrac{1}{4}\theta \right]_0^{\pi/4} \\ &= \left[\tfrac{1}{8}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + \tfrac{1}{4}\tfrac{\pi}{4} \right] - [0] \\ &= \tfrac{\pi}{16} \end{aligned}$$

Comme on doit multiplier par 8 pour obtenir l'aire totale, l'aire totale est de π/2.

7.28 L'aire est



$$A = \iint dA$$

On va intégrer en ρ en premier.

En ρ, on va de 0 à $7 + 3\cos\theta$.

En θ, on va de π/2 à 3π/2.

L'aire est donc

$$A = \iint dA$$
$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{2}^{7+3\sin\theta} \rho d\rho d\theta$$

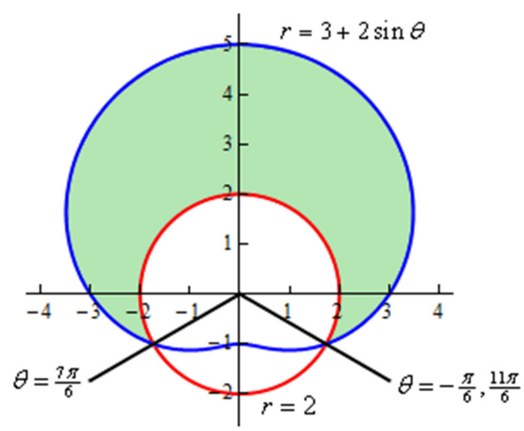
La première intégrale donne

$$A = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left[\tfrac{1}{2}\rho^2\right]_0^{7+3\cos\theta} d\theta$$
$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\left[\tfrac{1}{2}(7+3\cos\theta)^2\right] - [0]\right) d\theta$$
$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \tfrac{1}{2}(7+3\cos\theta)^2 \, d\theta$$

La deuxième intégrale donne

$$A = \left[\tfrac{107}{4}\theta + 21\sin\theta + \tfrac{9}{4}\cos\theta\sin\theta\right]_{\pi/2}^{3\pi/2}$$
$$= \left[\tfrac{107}{4}\tfrac{3\pi}{2} + 21\sin\tfrac{3\pi}{2} + \tfrac{9}{4}\cos\tfrac{3\pi}{2}\sin\tfrac{3\pi}{2}\right] - \left[\tfrac{107}{4}\tfrac{\pi}{2} + 21\sin\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{9}{4}\cos\tfrac{\pi}{2}\sin\tfrac{\pi}{2}\right]$$
$$= \left[\tfrac{107}{4}\tfrac{3\pi}{2} - 21\right] - \left[\tfrac{107}{4}\tfrac{\pi}{2} + 21\right]$$
$$= \tfrac{107\pi}{4} - 42$$
$$= 42{,}038$$

7.29 L'aire est



$$A = \iint dA$$

On va intégrer en ρ en premier.

En ρ, on va de 2 à $3+2\sin\theta$.

En θ, on va de -π/6 à 7π/6.

L'aire est donc

$$A = \iint dA$$
$$= \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \int_{2}^{3+2\sin\theta} \rho d\rho d\theta$$

La première intégrale donne

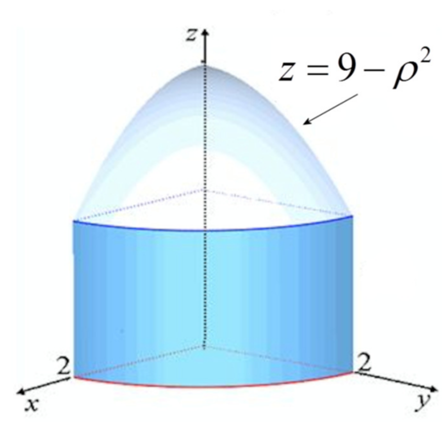
$$\begin{aligned} A &= \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \left[\tfrac{1}{2}\rho^2\right]_2^{3+2\sin\theta} d\theta \\ &= \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \left(\left[\tfrac{1}{2}(3+2\sin\theta)^2\right]-[2]\right) d\theta \\ &= \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \left(\tfrac{1}{2}(3+2\sin\theta)^2-2\right) d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} A &= \left[\tfrac{11}{2}\theta-6\cos\theta-\cos\theta\sin\theta-2\theta\right]_{-\pi/6}^{7\pi/6} \\ &= \left[\tfrac{7}{2}\theta-6\cos\theta-\cos\theta\sin\theta\right]_{-\pi/6}^{7\pi/6} \\ &= \left[\tfrac{7}{2}\tfrac{7\pi}{6}-6\cos\tfrac{7\pi}{6}-\cos\tfrac{7\pi}{6}\sin\tfrac{7\pi}{6}\right]-\left[\tfrac{7}{2}\tfrac{-\pi}{6}-6\cos\tfrac{-\pi}{6}-\cos\tfrac{-\pi}{6}\sin\tfrac{-\pi}{6}\right] \\ &= \left[\tfrac{49\pi}{12}-6\tfrac{-\sqrt{3}}{2}-\tfrac{-\sqrt{3}}{2}\tfrac{-1}{2}\right]-\left[\tfrac{-7\pi}{12}-6\tfrac{\sqrt{3}}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\tfrac{-1}{2}\right] \\ &= \left[\tfrac{49\pi}{12}+3\sqrt{3}-\tfrac{\sqrt{3}}{4}\right]-\left[\tfrac{-7\pi}{12}-3\sqrt{3}+\tfrac{\sqrt{3}}{4}\right] \\ &= \tfrac{14\pi}{3}+6\sqrt{3}-\tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \tfrac{14\pi}{3}+\tfrac{11}{2}\sqrt{3} \\ &= 24{,}187 \end{aligned}$$

7.30 Le volume est

$$\begin{aligned} V &= \iint z\,dA \\ &= \iint \left(9-\rho^2\right) dA \end{aligned}$$



On va intégrer en ρ en premier.

En ρ, on va de 0 à 2.

En θ, on va de 0 à π/2.

Le volume est donc

$$\begin{aligned} V &= \iint \left(9-\rho^2\right) dA \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 \left(9-\rho^2\right) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 \left(9\rho-\rho^3\right) d\rho d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

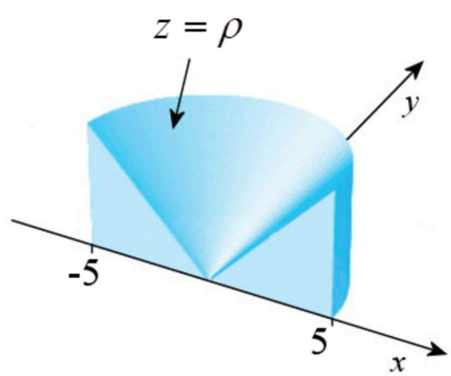
$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/2} \left[\tfrac{9}{2}\rho^2 - \tfrac{1}{4}\rho^4\right]_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\left[\tfrac{9}{2}\cdot 4 - \tfrac{1}{4}\cdot 16\right] - [0]\right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} 14 d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} V &= [14\theta]_0^{\pi/2} \\ &= [7\pi]-[0] \\ &= 7\pi \end{aligned}$$

7.31 Le volume est

$$\begin{aligned} V &= \iint z dA \\ &= \iint \rho dA \end{aligned}$$



On va intégrer en ρ en premier.

En ρ, on va de 0 à 5.

En θ, on va de 0 à π.

Le volume est donc

$$\begin{aligned} V &= \iint \rho dA \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^5 \rho\cdot\rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^5 \rho^2 d\rho d\theta \end{aligned}$$

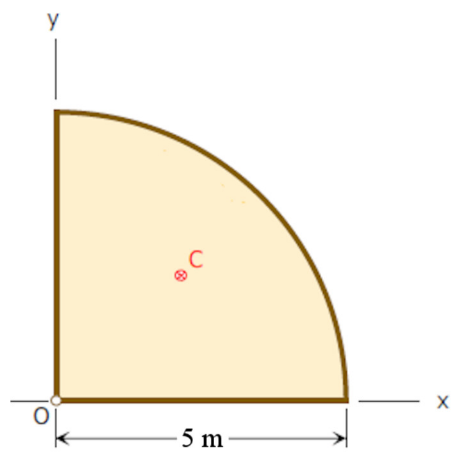
La première intégrale donne

$$V = \int_0^{\pi} \left[\tfrac{1}{3}\rho^3\right]_0^5 d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} \left(\left[\tfrac{1}{3}125\right] - [0]\right) d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} \tfrac{125}{3} d\theta$$

La deuxième intégrale donne

$$V = \left[\tfrac{125}{3}\theta\right]_0^{\pi}$$
$$= \left[\tfrac{125}{3}\pi\right] - [0]$$
$$= \tfrac{125}{3}\pi$$

7.32 a) La masse est



$$M = \iint \sigma dA$$

On va intégrer en ρ en premier.

En ρ, on va de 0 à 5 m.

En θ, on va de 0 à $\pi/2$.

La masse est donc

$$M = \iint \sigma dA$$
$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{5m} 3\tfrac{kg}{m^2} \cdot \rho d\rho d\theta$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\pi/2} \left[3\tfrac{kg}{m^2} \cdot \tfrac{1}{2} \rho^2 \right]_0^{5m} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\left[3\tfrac{kg}{m^2} \cdot \tfrac{1}{2} 25m^2 \right] - [0] \right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \tfrac{75}{2} kg d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= \left[\tfrac{75}{2} kg\theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= \left[\tfrac{75}{2} kg \cdot \tfrac{\pi}{2} \right] - [0] \\ &= \tfrac{75\pi}{4} kg \\ &\approx 58{,}905 kg \end{aligned}$$

`

Notez qu'avec une densité constante, on aurait pu simplement faire

$$\begin{aligned} M &= \sigma \cdot Aire \\ &= 3\tfrac{kg}{m^2} \cdot \tfrac{1}{4} \pi (5m)^2 \\ &= \tfrac{75\pi}{4} kg \end{aligned}$$

La position en x du centre de masse est

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \tfrac{1}{M} \iint \sigma x dA \\ &= \tfrac{1}{M} \int_0^{\pi/2} \int_0^{5m} 3\tfrac{kg}{m^2} \cdot (\rho \cos\theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \tfrac{1}{M} \int_0^{\pi/2} \int_0^{5m} 3\tfrac{kg}{m^2} \cdot \rho^2 \cos\theta d\rho d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \tfrac{1}{M} \int_0^{\pi/2} \left[3\tfrac{kg}{m^2} \cdot \tfrac{1}{3} \rho^3 \cos\theta \right]_0^{5m} d\theta \\ &= \tfrac{1}{M} \int_0^{\pi/2} \left(\left[3\tfrac{kg}{m^2} \cdot \tfrac{1}{3} 125m^3 \cos\theta \right] - [0] \right) d\theta \\ &= \tfrac{125kgm}{M} \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \tfrac{125kgm}{M}\left[\sin\theta\right]_0^{\pi/2} \\ &= \tfrac{125kgm}{M}\left(\sin\tfrac{\pi}{2}-\sin 0\right) \\ &= \tfrac{125kgm}{M} \end{aligned}$$

Avec la valeur de la masse, on a

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{125kgm}{\frac{75\pi}{4}kg} \\ &= \tfrac{20}{3\pi}m \\ &\approx 2{,}122m \end{aligned}$$

Comme il y a un axe de symétrie à $x = y$, la position en y du centre de masse est identique à la position en x.

b) La masse est

$$\begin{aligned} M &= \iint \sigma dA \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{5m}\left(2\tfrac{kg}{m^3}\rho+2\tfrac{kg}{m^2}\right)\cdot\rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{5m}\left(2\tfrac{kg}{m^3}\rho^2+2\tfrac{kg}{m^2}\rho\right)d\rho d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\pi/2}\left[2\tfrac{kg}{m^3}\cdot\tfrac{1}{3}\rho^3+1\tfrac{kg}{m^2}\rho^2\right]_0^{5m}d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\left(\left[2\tfrac{kg}{m^3}\cdot\tfrac{1}{3}125m^3+1\tfrac{kg}{m^2}25m^2\right]-\left[0\right]\right)d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\tfrac{325}{3}kgd\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= \left[\tfrac{325}{3}kg\theta\right]_0^{\pi/2} \\ &= \left[\tfrac{325}{3}kg\cdot\tfrac{\pi}{2}\right]-\left[0\right] \\ &= \tfrac{325\pi}{6}kg \\ &\approx 54{,}167kg \end{aligned}$$

La position en x du centre de masse est

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \tfrac{1}{M}\iint \sigma x dA \\
&= \tfrac{1}{M}\int_0^{\pi/2}\int_0^{5m}\left(2\tfrac{kg}{m^3}\rho + 2\tfrac{kg}{m^2}\right)\cdot\left(\rho\cos\theta\right)\rho d\rho d\theta \\
&= \tfrac{1}{M}\int_0^{\pi/2}\int_0^{5m}\left(2\tfrac{kg}{m^3}\rho^3 + 2\tfrac{kg}{m^2}\rho^2\right)\cos\theta d\rho d\theta
\end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \tfrac{1}{M}\int_0^{\pi/2}\left[\left(\tfrac{1}{2}\tfrac{kg}{m^3}\rho^4 + \tfrac{2}{3}\tfrac{kg}{m^2}\rho^3\right)\cos\theta\right]_0^{5m} d\theta \\
&= \tfrac{1}{M}\int_0^{\pi/2}\left(\left[\left(\tfrac{1}{2}\tfrac{kg}{m^3}625m^4 + \tfrac{2}{3}\tfrac{kg}{m^2}125m^3\right)\cos\theta\right] - [0]\right)d\theta \\
&= \tfrac{2375kgm}{6M}\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta
\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \tfrac{2375kgm}{6M}\left[\sin\theta\right]_0^{\pi/2} \\
&= \tfrac{2375kgm}{6M}\left(\sin\tfrac{\pi}{2} - \sin 0\right) \\
&= \tfrac{2375kgm}{6M}
\end{aligned}$$

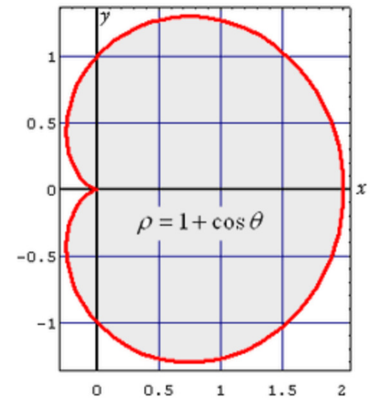
Avec la valeur de la masse, on a

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \frac{2375kgm}{6\cdot\frac{325\pi}{6}kg} \\
&= \tfrac{95}{13\pi}m \\
&\approx 2{,}326m
\end{aligned}$$

Comme il y a un axe de symétrie à $x = y$, la position en y du centre de masse est identique à la position en x.

7.33 Ici, on va laisser tomber les unités pour simplifier. a) La masse est

$$M = \iint \sigma dA$$



On va intégrer en ρ en premier.

En ρ, on va de 0 à 1 + cos θ.

En θ, on va de -π à π.

La masse est donc

$$\begin{aligned} M &= \iint \sigma dA \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{1+\cos\theta} 3\rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[3\cdot\tfrac{1}{2}\rho^2\right]_0^{1+\cos\theta} d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left[\tfrac{3}{2}(1+\cos\theta)^2\right]-[0]\right) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{3}{2}(1+\cos\theta)^2 d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= \left[\tfrac{9}{4}\theta + 3\sin\theta + \tfrac{3}{4}\sin\theta\cos\theta\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \left[\tfrac{9\pi}{4} + 3\sin\pi + \tfrac{3}{4}\sin\pi\cos\pi\right] - \left[-\tfrac{9\pi}{4} + 3\sin(-\pi) + \tfrac{3}{4}\sin(-\pi)\cos(-\pi)\right] \\ &= \left[\tfrac{9\pi}{4} + 0 + 0\right] - \left[-\tfrac{9\pi}{4} + 0 + 0\right] \\ &= \tfrac{9\pi}{2} \\ &\approx 14{,}137 kg \end{aligned}$$

La position en x du centre de masse est

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \tfrac{1}{M}\iint \sigma x dA \\ &= \tfrac{1}{M}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{1+\cos\theta} 3(\rho\cos\theta)\rho d\rho d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{1+\cos\theta} 3\rho^2\cos\theta d\rho d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \tfrac{1}{M}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\rho^3\cos\theta\right]_0^{1+\cos\theta} d\theta \\
&= \tfrac{1}{M}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\left[(1+\cos\theta)^3\cos\theta\right]-[0]\right)d\theta \\
&= \tfrac{1}{M}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\theta)^3\cos\theta d\theta
\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \tfrac{1}{M}\left[\tfrac{15}{8}\theta+3\sin\theta+\tfrac{15}{8}\cos\theta\sin\theta+\cos^2\theta\sin\theta+\tfrac{1}{4}\cos^3\theta\sin\theta\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \tfrac{1}{M}\left(\left[\tfrac{15\pi}{8}+0+0+0+0\right]-\left[\tfrac{-15\pi}{8}+0+0+0+0\right]\right) \\
&= \tfrac{1}{M}\cdot\tfrac{15\pi}{4}
\end{aligned}$$

Avec la valeur de la masse, on a

$$\begin{aligned}
x_{cm} &= \tfrac{1}{\frac{9\pi}{2}}\cdot\tfrac{15\pi}{4} \\
&= \tfrac{5}{6}m \\
&\approx 0,833m
\end{aligned}$$

Comme il y a un axe de symétrie à y = 0, la position en y du centre de masse est 0.

b) La masse est

$$\begin{aligned}
M &= \iint \sigma dA \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{1+\cos\theta}(2\rho+2)\rho d\rho d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{1+\cos\theta}\left(2\rho^2+2\rho\right)d\rho d\theta
\end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}
M &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\tfrac{2}{3}\rho^3+\rho^2\right]_0^{1+\cos\theta} d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\left[\tfrac{2}{3}(1+\cos\theta)^3+(1+\cos\theta)^2\right]-[0]\right)d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\tfrac{2}{3}(1+\cos\theta)^3+(1+\cos\theta)^2\right)d\theta
\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= \left[\tfrac{19}{6}\theta + \tfrac{40}{9}\sin\theta + \tfrac{3}{2}\cos\theta\sin\theta + \tfrac{2}{9}\cos^2\theta\sin\theta\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \left[\tfrac{19\pi}{6} + 0 + 0 + 0\right] - \left[\tfrac{-19\pi}{6} + 0 + 0 + 0\right] \\ &= \tfrac{19\pi}{3} kg \\ &\approx 19{,}897 kg \end{aligned}$$

La position en x du centre de masse est

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \tfrac{1}{M}\iint \sigma x dA \\ &= \tfrac{1}{M}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{1+\cos\theta} (2\rho+2)\cdot(\rho\cos\theta)\rho d\rho d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{1+\cos\theta} \left(2\rho^3 + 2\rho^2\right)\cos\theta d\rho d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \tfrac{1}{M}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\left(\tfrac{1}{2}\rho^4 + \tfrac{2}{3}\rho^3\right)\cos\theta\right]_0^{1+\cos\theta} d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\left[\left(\tfrac{1}{2}(1+\cos\theta)^4 + \tfrac{2}{3}(1+\cos\theta)^3\right)\cos\theta\right] - [0]\right)d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\left(\tfrac{1}{2}(1+\cos\theta)^4 + \tfrac{2}{3}(1+\cos\theta)^3\right)\cos\theta\right)d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \tfrac{1}{M}\left[3\theta + \tfrac{143}{30}\sin\theta + 3\cos\theta\sin\theta + \tfrac{9}{5}\cos^2\theta\sin\theta + \tfrac{2}{3}\cos^3\theta\sin\theta + \tfrac{1}{10}\cos^4\theta\sin\theta\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \tfrac{1}{M}\left([3\pi + 0 + 0 + 0 + 0 + 0] - [-3\pi + 0 + 0 + 0 + 0 + 0]\right) \\ &= \tfrac{1}{M}6\pi \end{aligned}$$

Avec la valeur de la masse, on a

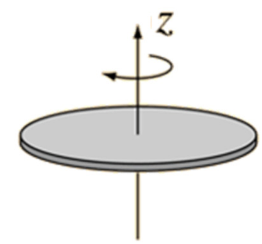
$$\begin{aligned} x_{cm} &= \tfrac{1}{\frac{19\pi}{3}}6\pi \\ &= \tfrac{18}{19} m \\ &\approx 0{,}9474 m \end{aligned}$$

Comme il y a un axe de symétrie à $x = y$, la position en y du centre de masse est nulle.

7.34 Ici, on va laisser tomber les unités pour simplifier. a) Si l'axe de rotation est l'axe des z, le moment d'inertie est

$$I_z = \iint \sigma \left(x^2 + y^2\right) dA$$

On va intégrer en ρ en premier.



En ρ, on va de 0 à 2.

En θ, on va de 0 à 2π.

Le moment d'inertie est donc

$$\begin{aligned} I_z &= \iint \sigma \left(x^2 + y^2\right) dA \\ &= \iint \left(2\tfrac{kg}{m^3}\rho + 2\tfrac{kg}{m^2}\right)\left(x^2 + y^2\right) dA \\ &= \iint \left(2\tfrac{kg}{m^3}\rho + 2\tfrac{kg}{m^2}\right)\rho^2 dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2m} \left(2\tfrac{kg}{m^3}\rho + 2\tfrac{kg}{m^2}\right)\rho^2 \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2m} \left(2\tfrac{kg}{m^3}\rho^4 + 2\tfrac{kg}{m^2}\rho^3\right) d\rho d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{2}{5}\tfrac{kg}{m^3}\rho^5 + \tfrac{1}{2}\tfrac{kg}{m^2}\rho^4\right]_0^{2m} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\left[\tfrac{2}{5}\tfrac{kg}{m^3}\cdot 32m^5 + \tfrac{1}{2}\tfrac{kg}{m^2}16m^4\right] - [0]\right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \tfrac{104}{5} kgm^2 d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} I_z &= \left[\tfrac{104}{5} kgm^2 \theta\right]_0^{2\pi} \\ &= \tfrac{104}{5} kgm^2 \cdot 2\pi - 0 \\ &= \tfrac{208\pi}{5} kgm^2 \\ &\approx 130.69 kgm^2 \end{aligned}$$

b) Le moment d'inertie est donc

$$\begin{aligned}
I_z &= \iint \sigma\left(x^2+y^2\right)dA \\
&= \iint \frac{3\frac{kg}{m}}{\rho}\left(x^2+y^2\right)dA \\
&= \iint \frac{3\frac{kg}{m}}{\rho}\rho^2 dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2m} \frac{3\frac{kg}{m}}{\rho}\rho^2 \rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2m} 3\tfrac{kg}{m}\rho^2 d\rho d\theta
\end{aligned}$$

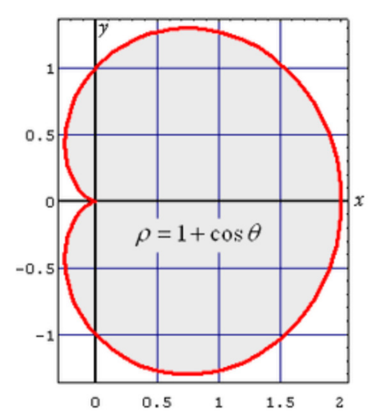
La première intégrale donne

$$\begin{aligned}
I_z &= \int_0^{2\pi}\left[1\tfrac{kg}{m}\rho^3\right]_0^{2m} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\left[1\tfrac{kg}{m}\cdot 8m^3\right]-\left[0\right]\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 8kgm^2 d\theta
\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}
I_z &= \left[8kgm^2\theta\right]_0^{2\pi} \\
&= 8kgm^2\cdot 2\pi - 0 \\
&= 16\pi kgm^2 \\
&\approx 50,265 kgm^2
\end{aligned}$$

7.35 Ici, on va laisser tomber les unités pour simplifier.



On va intégrer en ρ en premier.

En ρ, on va de 0 à 1 + cos θ.

En θ, on va de 0 à 2π.

Si l'axe de rotation est l'axe des x, le moment d'inertie est

$$I_x = \iint \sigma y^2 dA$$

Le moment d'inertie est donc

$$\begin{aligned} I_x &= \iint \sigma y^2 dA \\ &= \iint 3y^2 dA \\ &= \iint 3\rho^2 \sin^2\theta dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} 3\rho^2 \sin^2\theta \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} 3\rho^3 \sin^2\theta d\rho d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{3}{4}\rho^4 \sin^2\theta\right]_0^{1+\cos\theta} d\theta \\ &= \tfrac{3}{4}\int_0^{2\pi} \left(\left[(1+\cos\theta)^4 \sin^2\theta\right] - [0]\right) d\theta \\ &= \tfrac{3}{4}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^4 \sin^2\theta d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} I_x &= \tfrac{3}{4}\left[\tfrac{21}{16}\theta + \sin\theta(\text{fonction compliqué})\right]_0^{2\pi} \\ &= \tfrac{3}{4}\left(\left[\tfrac{21}{16}2\pi + 0(\text{fonction compliqué})\right] - \left[0 + 0(\text{fonction compliqué})\right]\right) \\ &= \tfrac{3}{4}\tfrac{21\pi}{8} \\ &= \tfrac{63\pi}{32} \end{aligned}$$

(Je n'ai pas écrit la solution au complet de l'intégrale puisque je sais que je vais évaluer cette fonction à 0 et 2π et que tous les termes multipliés par un sinus seront nuls.)

Si l'axe de rotation est l'axe des *y*, le moment d'inertie est

$$I_y = \iint \sigma x^2 dA$$

Le moment d'inertie est donc

$$\begin{aligned}I_y &= \iint \sigma x^2 dA \\ &= \iint 3x^2 dA \\ &= \iint 3\rho^2 \cos^2\theta dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} 3\rho^2\cos^2\theta\rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} 3\rho^3\cos^2\theta d\rho d\theta\end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}I_y &= \tfrac{3}{4}\int_0^{2\pi}\left[\rho^4\cos^2\theta\right]_0^{1+\cos\theta} d\theta \\ &= \tfrac{3}{4}\int_0^{2\pi}\left(\left[(1+\cos\theta)^4\cos^2\theta\right]-[0]\right)d\theta \\ &= \tfrac{3}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^4\cos^2\theta d\theta\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}I_x &= \tfrac{3}{4}\left[\tfrac{49}{16}\theta+\sin\theta\left(\text{fonction compliqué}\right)\right]_0^{2\pi} \\ &= \tfrac{3}{4}\left(\left[\tfrac{49}{16}2\pi+0\left(\text{fonction compliqué}\right)\right]-\left[0+0\left(\text{fonction compliqué}\right)\right]\right) \\ &= \tfrac{3}{4}\tfrac{49\pi}{8} \\ &= \tfrac{147\pi}{32}\end{aligned}$$

(Je n'ai pas écrit la solution au complet de l'intégrale puisque je sais que je vais évaluer cette fonction à 0 et 2π et que tous les termes multipliés par un sinus seront nuls.)

Si l'axe de rotation est l'axe des z, le moment d'inertie est

$$I_z = \iint \sigma\left(x^2+y^2\right)dA$$

Le moment d'inertie est donc

$$\begin{aligned} I_z &= \iint \sigma\left(x^2+y^2\right) dA \\ &= \iint 3\left(x^2+y^2\right) dA \\ &= \iint 3\rho^2 dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} 3\rho^2 \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} 3\rho^3 d\rho d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} I_z &= \tfrac{3}{4}\int_0^{2\pi}\left[\rho^4\right]_0^{1+\cos\theta} d\theta \\ &= \tfrac{3}{4}\int_0^{2\pi}\left(\left[(1+\cos\theta)^4\right]-[0]\right) d\theta \\ &= \tfrac{3}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^4 d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} I_x &= \tfrac{3}{4}\left[\tfrac{35}{8}\theta+\sin\theta(\text{fonction compliqué})\right]_0^{2\pi} \\ &= \tfrac{3}{4}\left(\left[\tfrac{35}{8}2\pi+0(\text{fonction compliqué})\right]-\left[0+0(\text{fonction compliqué})\right]\right) \\ &= \tfrac{3}{4}\tfrac{35\pi}{4} \\ &= \tfrac{105\pi}{16} \end{aligned}$$

(Je n'ai pas écrit la solution au complet de l'intégrale puisque je sais que je vais évaluer cette fonction à 0 et 2π et que tous les termes multipliés par un sinus seront nuls.)

Ce résultat est en accord avec

$$\begin{aligned} I_z &= I_x + I_y \\ &= \tfrac{63\pi}{32}+\tfrac{147\pi}{32} \\ &= \tfrac{210\pi}{32} \\ &= \tfrac{105\pi}{16} \end{aligned}$$

8.1 Le jacobien est

$$
\begin{aligned}
J &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial(u+v)}{\partial u} & \frac{\partial(u+v)}{\partial v} \\ \frac{\partial(uv)}{\partial u} & \frac{\partial(uv)}{\partial v} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Le déterminant est donc

$$
\begin{aligned}
\det J &= u \cdot 1 - v \cdot 1 \\
&= u - v
\end{aligned}
$$

8.2 Le jacobien est

$$
\begin{aligned}
J &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial(u-v)}{\partial u} & \frac{\partial(u-v)}{\partial v} \\ \frac{\partial(u+v)}{\partial u} & \frac{\partial(u+v)}{\partial v} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Le déterminant est donc

$$
\begin{aligned}
\det J &= 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

8.3 Le jacobien est

$$\begin{aligned}
J &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial\left(u^2v^2\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(u^2v^2\right)}{\partial v} \\ \frac{\partial\left(v^2-u^2\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(v^2-u^2\right)}{\partial v} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2uv^2 & 2u^2v \\ -2u & 2v \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le déterminant est donc

$$\begin{aligned}
\det J &= 2uv^2 \cdot 2v - 2u^2v \cdot (-2u) \\
&= 4uv^3 + 4u^3v \\
&= 4uv\left(u^2+v^2\right)
\end{aligned}$$

8.4 Le jacobien est

$$\begin{aligned}
J &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial\left(e^ue^v\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(e^ue^v\right)}{\partial v} \\ \frac{\partial\left(e^ue^{-v}\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(e^ue^{-v}\right)}{\partial v} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^ue^v & e^ue^v \\ e^ue^{-v} & -e^ue^{-v} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le déterminant est donc

$$\begin{aligned}\det J &= e^u e^v \cdot \left(-e^u e^{-v}\right) - e^u e^v \cdot e^u e^{-v} \\ &= -e^{2u} - e^{2u} \\ &= -2e^{2u}\end{aligned}$$

8.5 Le jacobien est

$$\begin{aligned}J &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(u+v-w)}{\partial u} & \frac{\partial(u+v-w)}{\partial v} & \frac{\partial(u+v-w)}{\partial w} \\ \frac{\partial(2u-v+3w)}{\partial u} & \frac{\partial(2u-v+3w)}{\partial v} & \frac{\partial(2u-v+3w)}{\partial w} \\ \frac{\partial(-u+2v-w)}{\partial u} & \frac{\partial(-u+2v-w)}{\partial v} & \frac{\partial(-u+2v-w)}{\partial w} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Le déterminant est donc

$$\begin{aligned}\det J &= 1\cdot(-1\cdot -1 - 3\cdot 2) - 1(2\cdot -1 - 3\cdot -1) - 1(2\cdot 2 - -1\cdot -1) \\ &= 1\cdot(1-6) - 1(-2+3) - 1(4-1) \\ &= 1\cdot(-5) - 1(1) - 1(3) \\ &= -5-1-3 \\ &= -9\end{aligned}$$

8.6 Le jacobien est

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial(u\cos v)}{\partial u} & \frac{\partial(u\cos v)}{\partial v} & \frac{\partial(u\cos v)}{\partial w} \\ \frac{\partial(u\sin v)}{\partial u} & \frac{\partial(u\sin v)}{\partial v} & \frac{\partial(u\sin v)}{\partial w} \\ \frac{\partial(we^{uv})}{\partial u} & \frac{\partial(we^{uv})}{\partial v} & \frac{\partial(we^{uv})}{\partial w} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v & 0 \\ \sin v & u\cos v & 0 \\ wve^{uv} & wue^{uv} & e^{uv} \end{pmatrix}$$

Le déterminant est donc

$$\begin{aligned} \det J &= e^{uv} \cdot (\cos v \cdot u\cos v - -u\sin v \cdot \sin v) \\ &= e^{uv} \cdot (u\cos^2 v + u\sin^2 v) \\ &= ue^{uv} \end{aligned}$$

8.7 Transformons les équations des limites de la zone d'intégration pour trouver les nouvelles limites.

<u>*Version 1 :*</u> On va le faire avec les transformations inverses.

Puisque $u = x + y$ et $v = x - y$, on a

$$\begin{aligned} u + v &= (x + y) + (x - y) \\ u + v &= 2x \\ x &= \frac{u+v}{2} \end{aligned}$$

$$u-v=(x+y)-(x-y)$$
$$u+v=2y$$
$$y=\frac{u-v}{2}$$

Ce sont nos transformations inverses. Avec cela, trouvons les équations des nouvelles limites.

La première limite est $x = 0$. Cette limite devient

$$x=0$$
$$\frac{u+v}{2}=0$$
$$u+v=0$$
$$v=-u$$

La deuxième limite est $y = 0$. Cette limite devient

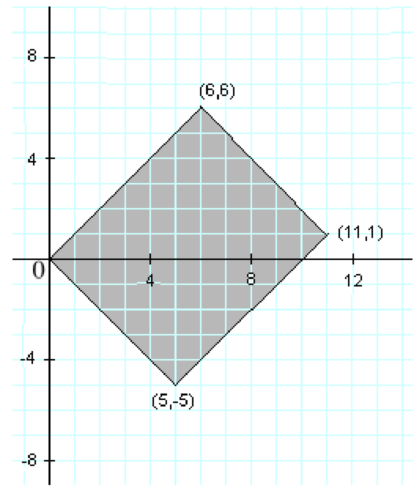
$$y=0$$
$$\frac{u-v}{2}=0$$
$$u-v=0$$
$$v=u$$

La troisième limite est $x = 6$. Cette limite devient

$$x=6$$
$$\frac{u+v}{2}=6$$
$$u+v=12$$
$$v=12-u$$

La quatrième limite est $y = 5$. Cette limite devient

$$y = 5$$
$$\frac{u-v}{2} = 5$$
$$u - v = 10$$
$$v = u - 10$$



On a alors les limites suivantes.

Version 2

Nous avons ici des transformations linéaires. Avec ce genre de transformations, les droites restent des droites. Les limites de la zone d'intégration qui sont des droites initialement dans le plan *xy* vont donc rester des droites sur le plan *uv*.

On peut donc trouver la zone d'intégration en trouvant simplement les coordonnées des points qui délimitent la zone d'intégration puis en reliant ces points pour trouver la région d'intégration.

Les 4 coins de la zone d'intégration sont (0,0), (0,5), (6,0) et (6,6).

Au point (0,0), on a

$$u = x + y = 0 + 0 = 0$$
$$v = x - y = 0 - 0 = 0$$

On a donc le point (0,0).

Au point (0,5), on a

$$u = x + y = 0 + 5 = 5$$
$$v = x - y = 0 - 5 = -5$$

On a donc le point (5,-5).

Au point (6,0), on a

$$u = x + y = 6 + 0 = 6$$
$$v = x - y = 6 - 0 = 6$$

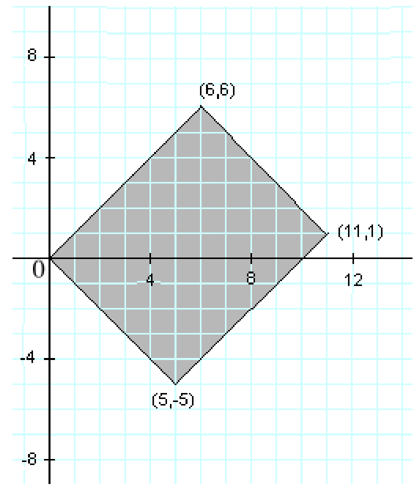
On a donc le point (6,6).

Au point (6,5), on a

$$u = x + y = 6 + 5 = 11$$
$$v = x - y = 6 - 5 = 1$$

On a donc le point (11,1).

En reliant ces 4 points avec des droites, on obtient la zone d'intégration montrée sur la figure.



8.8 L'élément d'aire avec les variables *u* et *v* est

$$dA = \left|\det J\right| du dv$$

On doit donc trouver le jacobien

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial\left(u\left(1-v\right)\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(u\left(1-v\right)\right)}{\partial v} \\ \frac{\partial\left(uv\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(uv\right)}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le déterminant est

$$\begin{aligned} \det J &= \left(1-v\right)u - \left(-u\right)v \\ &= u - vu + vu \\ &= u \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} dA &= \left|\det J\right| du dv \\ &= u du dv \end{aligned}$$

8.9 Avec ce changement de variable, l'intégrale devient

$$\iint \frac{u^{10}}{v^4} \left|\det J\right| du dv$$

On va donc trouver le déterminant du jacobien. Pour trouver le jacobien, on doit avoir les transformations inverses. Voici comment on peut les trouver.

$$\begin{aligned} v+u &= (x+y)+(x-y) \\ v+u &= 2x \\ x &= \frac{v+u}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v-u &= (x+y)-(x-y) \\ v-u &= 2y \\ y &= \frac{v-u}{2} \end{aligned}$$

Le déterminant est

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial\left((v+u)/2\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left((v+u)/2\right)}{\partial v} \\ \frac{\partial\left((v-u)/2\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left((v-u)/2\right)}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le déterminant est

$$\begin{aligned} \det J &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4} - -\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

L'intégrale est donc

$$\iint \frac{u^{10}}{v^4}\frac{1}{2}dudv$$

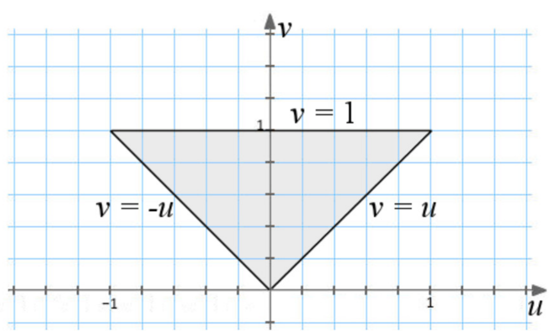
Il faut maintenant trouver la région d'intégration dans le plan *uv*.

<u>*Version 1 pour trouver la région d'intégration*</u>

Pour tracer la région dans ce plan, il faut trouver l'équation de toutes les frontières de la zone d'intégration. Cette zone est délimitée par 3 droites : $x = 0$, $y = 0$ et $y = 1 - x$. Transformons chacune de ces droites.

$$y = 0 \rightarrow \frac{1}{2}(v-u) = 0$$
$$v = u$$
$$x = 0 \rightarrow \frac{1}{2}(v+u) = 0$$
$$v = -u$$
$$y = 1-x \rightarrow \frac{1}{2}(v-u) = 1-\frac{1}{2}(v+u)$$
$$v = 1$$

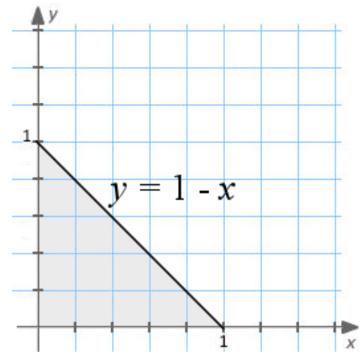
Voici donc la forme de la région d'intégration dans le plan *uv*.



<u>*Version 2 pour trouver la région d'intégration*</u>

Nous avons ici des transformations linéaires. Avec ce genre de transformations, les droites restent des droites. Les limites de la zone d'intégration qui sont des droites initialement dans le plan *xy* vont donc rester des droites sur le plan *uv*.

On peut donc trouver la zone d'intégration en trouvant simplement les coordonnées des points qui délimitent la zone d'intégration puis en reliant ces points pour trouver la région d'intégration.



Les 3 coins de la zone d'intégration sont (0,0), (0,1) et (1,0).

Au point (0,0), on a

$$u = x - y = 0 - 0 = 0$$
$$v = x + y = 0 + 0 = 0$$

On a donc le point (0,0).

Au point (0,1), on a

$$u = x - y = 0 - 1 = -1$$
$$v = x + y = 0 + 1 = 1$$

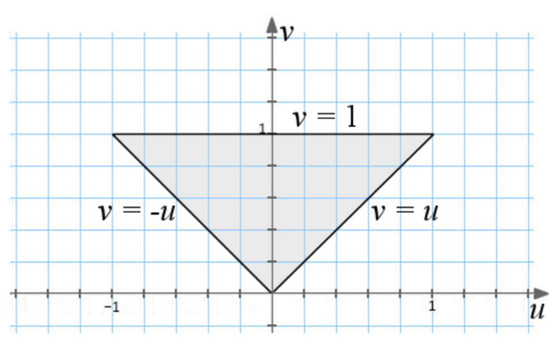
On a donc le point (1,-1).

Au point (1,0), on a

$$u = x - y = 1 - 0 = 1$$
$$v = x + y = 1 + 0 = 1$$

On a donc le point (1,1).

Voici donc la région d'intégration dans le plan *uv*.



On peut maintenant intégrer. Comme la région est régulière en *u*, on va intégrer par rapport à *u* en premier.

En *u* on va de –*v* à *v*.

En v, on va de 0 à 1.

$$\int_0^1 \int_{-v}^{v} \frac{u^{10}}{v^4} \frac{1}{2} dudv$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{-v}^{v} \frac{u^{10}}{v^4} \frac{1}{2} dudv &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{u^{11}}{11v^4} \right]_{-v}^{v} dv \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left[\frac{v^{11}}{11v^4} \right] - \left[\frac{-v^{11}}{11v^4} \right] \right) dv \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2v^{11}}{11v^4} dv \\
&= \frac{1}{11} \int_0^1 v^7 dv
\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{-v}^{v} \frac{u^{10}}{v^4} \frac{1}{2} dudv &= \frac{1}{11} \left[\frac{v^8}{8} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{11} \cdot \left(\frac{1}{8} - 0 \right) \\
&= \frac{1}{88}
\end{aligned}$$

8.10 Avec ce changement de variable, l'intégrale devient

$$\iint u^6 v^4 \left|\det J\right| dudv$$

Le jacobien est le même qu'au numéro précédent. On a donc

$$\iint u^6 v^4 \frac{1}{2} dudv$$

La région d'intégration est la même qu'au numéro précédent. L'intégrale est donc

$$\int_0^1 \int_{-v}^{v} u^6 v^4 \frac{1}{2} dudv$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{-v}^{v} u^6v^4\frac{1}{2}dudv &= \frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{u^7v^4}{7}\right]_{-v}^{v}dv\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\left[\frac{v^7v^4}{7}\right]-\left[-\frac{v^7v^4}{7}\right]\right)dv\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\frac{2v^7v^4}{7}dv\\ &= \frac{1}{7}\int_0^1 v^{11}dv\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{-v}^{v} u^6v^4\frac{1}{2}dudv &= \frac{1}{7}\left[\frac{v^{12}}{12}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{12}-0\right)\\ &= \frac{1}{84}\end{aligned}$$

8.11 Avec les transformations

$$u=\frac{1}{5}(2x+y) \qquad\qquad v=\frac{1}{5}(x-2y)$$

L'intégrale devient

$$\begin{aligned}\iint\left(\frac{2x+y}{x-2y+5}\right)^2 dA &= \iint\left(\frac{5u}{5v+5}\right)^2\left|\det J\right|dudv\\ &= \iint\left(\frac{u}{v+1}\right)^2\left|\det J\right|dudv\end{aligned}$$

On va donc trouver le déterminant du jacobien. Pour trouver le jacobien, on doit avoir les transformations inverses. Voici comment on peut les trouver.

$$\begin{aligned}10u+5v&=(4x+2y)+(x-2y)\\ 10u+5v&=5x\\ x&=2u+v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5u-10v&=(2x+y)-(2x-4y)\\5u-10v&=5y\\y&=u-2v\end{aligned}$$

Le déterminant est

$$\begin{aligned}J&=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{\partial(2u+v)}{\partial u} & \frac{\partial(2u+v)}{\partial v}\\ \frac{\partial(u-2v)}{\partial u} & \frac{\partial(u-2v)}{\partial v}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Le déterminant est

$$\begin{aligned}\det J&=\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{vmatrix}\\&=2\cdot(-2)-1\cdot 1\\&=-5\end{aligned}$$

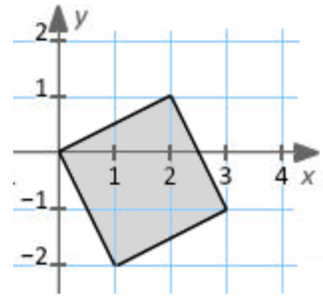
L'intégrale est donc

$$\iint\left(\frac{u}{v+1}\right)^2 5dudv$$

Il faut maintenant trouver la région d'intégration dans le plan *uv*.

Nous avons ici des transformations linéaires. Avec ce genre de transformations, les droites restent des droites. Les limites de la zone d'intégration qui sont des droites initialement dans le plan *xy* vont donc rester des droites sur le plan *uv*.

On peut donc trouver la zone d'intégration en trouvant simplement les coordonnées des points qui délimitent la zone d'intégration puis en reliant ces points pour trouver la région d'intégration.



Les 4 coins de la zone d'intégration sont (0,0), (2,1), (3,-1) et (1,-2).

Au point (0,0), on a

$$u = \tfrac{1}{5}(2x + y) = \tfrac{1}{5}(0+0) = 0$$
$$v = \tfrac{1}{5}(x - 2y) = \tfrac{1}{5}(0-0) = 0$$

On a donc le point (0,0).

Au point (2,1), on a

$$u = \tfrac{1}{5}(2x + y) = \tfrac{1}{5}(4+1) = 1$$
$$v = \tfrac{1}{5}(x - 2y) = \tfrac{1}{5}(2-2) = 0$$

On a donc le point (1,0).

Au point (1,0), on a

$$u = \tfrac{1}{5}(2x + y) = \tfrac{1}{5}(6+-1) = 1$$
$$v = \tfrac{1}{5}(x - 2y) = \tfrac{1}{5}(3--2) = 1$$

On a donc le point (1,1).

Au point (1,-2), on a

$$u = \tfrac{1}{5}(2x + y) = \tfrac{1}{5}(2+-2) = 0$$
$$v = \tfrac{1}{5}(x - 2y) = \tfrac{1}{5}(1--4) = 1$$

On a donc le point (0,1).

La région d'intégration dans le plan *uv* est donc simplement un carré qui va de 0 à 1 en *u* et de 0 à 1 en *v*. Les bornes d'intégration sont donc les suivantes.

En *u* on va de 0 à 1.

En *v*, on va de 0 à 1.

L'intégrale est donc

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{u}{v+1}\right)^2 5dudv$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{u}{v+1}\right)^2 5dudv &= \int_0^1 \left[\frac{5}{3}u^3\left(\frac{1}{v+1}\right)^2\right]_0^1 dv \\
&= \frac{5}{3}\int_0^1 \left(\left[\left(\frac{1}{v+1}\right)^2\right] - [0]\right) dv \\
&= \frac{5}{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{v+1}\right)^2 dv
\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{u}{v+1}\right)^2 5dudv &= \frac{5}{3}\int_0^1 (v+1)^{-2} dv \\
&= \frac{5}{3}\left[-(v+1)^{-1}\right]_0^1 \\
&= \frac{5}{3}\left(\left[\frac{-1}{2}\right] - \left[\frac{-1}{1}\right]\right) \\
&= \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

8.12 Avec les transformations

$$u = \frac{1}{5}(2x+y) \qquad\qquad v = \frac{1}{5}(x-2y)$$

L'intégrale devient

$$\begin{aligned}
\iint (2x+y)^2 (x-2y)\, dA &= \iint (5u)^2 (5v) \left|\det J\right| dudv \\
&= 125\iint u^2 v \left|\det J\right| dudv
\end{aligned}$$

Le jacobien est le même qu'au numéro précédent. On a donc

$$\begin{aligned}\iint(2x+y)^2(x-2y)\,dA &= 125\iint u^2v\left|\det J\right|dudv <\\ &= 125\iint u^2v5dudv\\ &= 625\iint u^2vdudv\end{aligned}$$

La région d'intégration est la même qu'au numéro précédent. L'intégrale est donc

$$625\int_0^1\int_0^1 u^2vdudv$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}625\int_0^1\int_0^1 u^2vdudv &= 625\int_0^1\left[\frac{u^3v}{3}\right]_0^1 dv\\ &= 625\int_0^1\left(\left[\frac{v}{3}\right]-[0]\right)dv\\ &= \frac{625}{3}\int_0^1 vdv\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}625\int_0^1\int_0^1 u^2vdudv &= 625\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^1\\ &= \frac{625}{3}\left(\left[\frac{1}{2}\right]-[0]\right)\\ &= \frac{625}{6}\end{aligned}$$

8.13 Avec les transformations

$$u=\frac{1}{5}(2x+y) \qquad\qquad v=\frac{1}{5}(x-2y)$$

L'intégrale devient

$$\begin{aligned}\iint(2x+y)\arctan(x-2y)\,dA &= \iint(5u)\arctan(5v)\left|\det J\right|dudv\\ &= 5\iint u\arctan(5v)\left|\det J\right|dudv\end{aligned}$$

Le jacobien est le même qu'au numéro précédent. On a donc

$$\begin{aligned}\iint (2x+y)\arctan(x-2y)\,dA &= 5\iint u\arctan(5v)\left|\det J\right|dudv \\ &= 5\iint u\arctan(5v)\,5dudv \\ &= 25\iint u\arctan(5v)\,dudv\end{aligned}$$

La région d'intégration est la même qu'au numéro précédent. L'intégrale est donc

$$25\int_0^1\int_0^1 u\arctan(5v)\,dudv$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}25\int_0^1\int_0^1 u\arctan(5v)\,dudv &= 25\int_0^1\left[\frac{u^2}{2}\arctan(5v)\right]_0^1 dv \\ &= 25\int_0^1\left(\left[\frac{\arctan(5v)}{2}\right]-[0]\right)dv \\ &= \frac{25}{2}\int_0^1 \arctan(5v)\,dv\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}25\int_0^1\int_0^1 u\arctan(5v)\,dudv &= 25\int_0^1\left[\frac{u^2}{2}\arctan(5v)\right]_0^1 dv \\ &= 25\int_0^1\left(\left[\frac{\arctan(5v)}{2}\right]-[0]\right)dv \\ &= \frac{25}{2}\left[v\cdot\arctan(5v)-\frac{1}{10}\ln\left(1+25v^2\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{25}{2}\left(\left[\arctan(5)-\frac{1}{10}\ln(26)\right]-[0]\right) \\ &\approx 13,0949\end{aligned}$$

8.14 La forme de l'intégrale suggère fortement les changements suivants.

$$u = 2y - x \qquad\qquad v = y + 2x$$

L'intégrale devient

$$\iint e^{\frac{2y-x}{y+2x}} dA = \iint e^{u/v} \left|\det J\right| dudv$$

On va donc trouver le déterminant du jacobien. Pour trouver le jacobien, on doit avoir les transformations inverses. Voici comment on peut les trouver.

$$\begin{aligned} u-2v &= (2y-x)-2(y+2x) \\ u-2v &= -5x \\ x &= \tfrac{1}{5}(2v-u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2u+v &= 2(2y-x)+(y+2x) \\ 2u+v &= 5y \\ y &= \tfrac{1}{5}(2u+v) \end{aligned}$$

Le déterminant est

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \frac{1}{5}(2v-u)}{\partial u} & \frac{\partial \frac{1}{5}(2v-u)}{\partial v} \\ \frac{\partial \frac{1}{5}(2u+v)}{\partial u} & \frac{\partial \frac{1}{5}(2u+v)}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le déterminant est

$$\begin{aligned} \det J &= \begin{vmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} \\ &= \tfrac{-1}{5} \cdot \tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{2}{5} \\ &= \tfrac{-1}{25} - \tfrac{4}{25} \\ &= \tfrac{-5}{25} \\ &= \tfrac{-1}{5} \end{aligned}$$

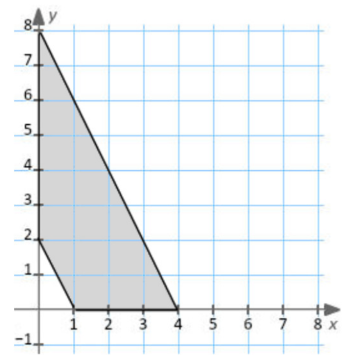
L'intégrale est donc

$$\iint e^{\frac{2y-x}{y+2x}} dA = \iint e^{u/v} \left|\tfrac{-1}{5}\right| dudv$$
$$= \tfrac{1}{5} \iint e^{u/v} dudv$$

Il faut maintenant trouver la région d'intégration dans le plan *uv*.

Nous avons ici des transformations linéaires. Avec ce genre de transformations, les droites restent des droites. Les limites de la zone d'intégration qui sont des droites initialement dans le plan *xy* vont donc rester des droites sur le plan *uv*.

On peut donc trouver la zone d'intégration en trouvant simplement les coordonnées des points qui délimitent la zone d'intégration puis en reliant ces points pour trouver la région d'intégration.



Les 4 coins de la zone d'intégration sont (0,2), (0,8), (1,0) et (4,0).

Au point (0,2), on a

$$u = 2y - x = 2\cdot 2 - 0 = 4$$
$$v = y + 2x = 2 + 2\cdot 0 = 2$$

On a donc le point (4,2).

Au point (0,8), on a

$$u = 2y - x = 2\cdot 8 - 0 = 16$$
$$v = y + 2x = 8 + 2\cdot 0 = 8$$

On a donc le point (16,8).

Au point (1,0), on a

$$u = 2y - x = 2\cdot 0 - 1 = -1$$
$$v = y + 2x = 0 + 2\cdot 1 = 2$$

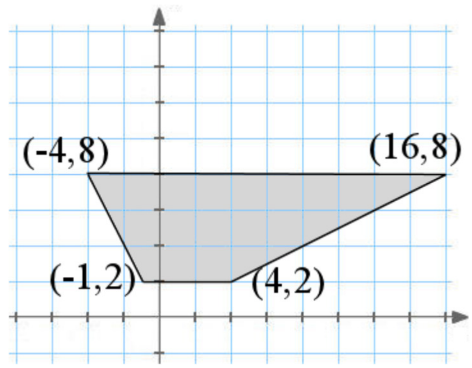
On a donc le point (-1,2).

Au point (4,0), on a

$$u = 2y - x = 2\cdot 0 - 4 = -4$$
$$v = y + 2x = 0 + 2\cdot 4 = 8$$

On a donc le point (-4,8).

La région d'intégration dans le plan *uv* est donc la région suivante.



L'équation de la droite de gauche est $v = -2u$ (donc $u = -\frac{1}{2}v$) et l'équation de la droite de droite est $v = \frac{1}{2}u$ (donc $u = 2v$). Si on intègre en *u* en premier, on a les bornes suivantes.

En *u* on va de $-\frac{1}{2}v$ à $2v$.

En *v*, on va de 2 à 8.

L'intégrale est donc

$$\frac{1}{5}\int_2^8\int_{-\frac{1}{2}v}^{2v} e^{u/v}dudv$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}\int_2^8\int_{-\frac{1}{2}v}^{2v} e^{u/v}dudv &= \frac{1}{5}\int_2^8\left[ve^{u/v}\right]_{-\frac{1}{2}v}^{2v}dv\\ &= \frac{1}{5}\int_2^8\left(\left[ve^{2v/v}\right]-\left[ve^{-v/2v}\right]\right)dv\\ &= \frac{1}{5}\int_2^8 v\left(e^2-e^{-\frac{1}{2}}\right)dv\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}\int_2^8\int_{-\frac{1}{2}v}^{2v} e^{u/v}dudv &= \frac{e^2-e^{-\frac{1}{2}}}{5}\int_2^8 vdv\\ &= \frac{e^2-e^{-\frac{1}{2}}}{5}\left[\frac{v^2}{2}\right]_2^8\\ &= \frac{e^2-e^{-\frac{1}{2}}}{10}(64-4)\\ &= 6\left(e^2-e^{-\frac{1}{2}}\right)\\ &\approx 40,6952\end{aligned}$$

8.15 Avec les changements

$$x = ar\cos\theta \qquad y = br\sin\theta$$

L'intégrale devient

$$\begin{aligned}\iint e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dA &= \iint e^{-\left(\frac{a^2r^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{b^2r^2\sin^2\theta}{b^2}\right)}\left|\det J\right|dA\\ &= \iint e^{-\left(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta\right)}\left|\det J\right|dA\\ &= \iint e^{-r^2}\left|\det J\right|dA\end{aligned}$$

On va donc trouver le déterminant du jacobien. Le déterminant est

$$\begin{aligned}J &= \begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{\partial ar\cos\theta}{\partial r} & \frac{\partial ar\cos\theta}{\partial\theta}\\ \frac{\partial br\sin\theta}{\partial r} & \frac{\partial br\sin\theta}{\partial\theta}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Le déterminant est

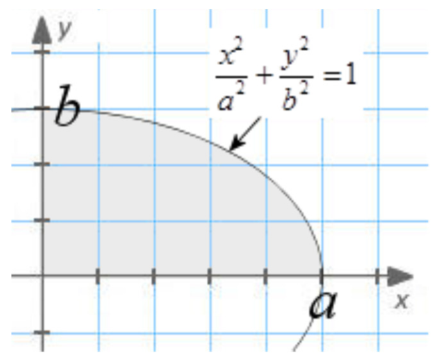
$$\begin{aligned}\det J &= \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= a\cos\theta\cdot br\cos\theta - -ar\sin\theta\cdot b\sin\theta \\ &= abr\cos^2\theta + abr\sin^2\theta \\ &= abr\end{aligned}$$

L'intégrale est donc

$$\begin{aligned}\iint e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)} dA &= \iint e^{-r^2} abr dA \\ &= ab\iint e^{-r^2} r dA\end{aligned}$$

Il faut maintenant trouver la région d'intégration dans le plan *uv*.

L'équation de la limite courbée devient



$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{a^2r^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{b^2r^2\sin^2\theta}{b^2} &= 1 \\ r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta &= 1 \\ r^2 &= 1 \\ r &= 1\end{aligned}$$

La limite $x = 0$ devient

$$\begin{aligned}ar\cos\theta &= 0 \\ \theta &= \tfrac{\pi}{2}\end{aligned}$$

La limite $y = 0$ devient

$$\begin{aligned}br\sin\theta &= 0 \\ \theta &= 0\end{aligned}$$

(Dans ces deux dernières équations, on sait que $r = 0$ n'est pas une solution puisque cette frontière vient toucher à la limite $r = 1$.)

L'équation de la limite courbée à (0,0) qui devient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$
$$\frac{a^2r^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{b^2r^2\sin^2\theta}{b^2}=0$$
$$r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=0$$
$$r^2=0$$
$$r=0$$

La zone d'intégration va donc de $r = 0$ à 1 et de $\theta = 0$ à $\theta = \pi/2$. L'intégrale est donc

$$ab\int_0^{\pi/2}\int_0^1 e^{-r^2}rdrd\theta$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}ab\int_0^{\pi/2}\int_0^1 e^{-r^2}rdrd\theta &= ab\int_0^{\pi/2}\left[\left(\tfrac{-1}{2}\right)e^{-r^2}\right]_0^1 d\theta\\ &= \frac{-ab}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\left[e^{-1}\right]-\left[1\right]\right)d\theta\\ &= \frac{ab\left(1-e^{-1}\right)}{2}\int_0^{\pi/2}d\theta\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}ab\int_0^{\pi/2}\int_0^1 e^{-r^2}rdrd\theta &= \frac{ab\left(1-e^{-1}\right)}{2}\left[\theta\right]_0^{\pi/2}\\ &= \frac{ab\left(1-e^{-1}\right)}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\\ &= \frac{ab\pi\left(1-e^{-1}\right)}{4}\end{aligned}$$

9.1 La longueur de la courbe est

$$L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}d\theta$$

La dérivée est

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{d\left(-4\sin\theta\right)}{d\theta}$$
$$= -4\cos\theta$$

La longueur est donc

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^\pi \sqrt{\left(-4\sin\theta\right)^2 + \left(-4\cos\theta\right)^2} d\theta \\
&= \int_0^\pi \sqrt{16\sin^2\theta + 16\cos^2\theta} d\theta \\
&= \int_0^\pi \sqrt{16} d\theta \\
&= \int_0^\pi 4 d\theta \\
&= \left[4\theta\right]_0^\pi \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

Ce résultat est bien correct, puisqu'on cherchait la circonférence d'un cercle ayant un rayon de 2.

9.2 La longueur de la courbe est

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

La dérivée est

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{d\theta} &= \frac{d\left(e^{-\theta}\right)}{d\theta} \\
&= -e^{-\theta}
\end{aligned}$$

La longueur est donc

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(e^{-\theta}\right)^2 + \left(-e^{-\theta}\right)^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{-2\theta} + e^{-2\theta}}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{-2\theta}}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}e^{-\theta}\, d\theta \\ &= \left[-\sqrt{2}e^{-\theta}\right]_0^{2\pi} \\ &= -\sqrt{2}e^{-2\pi} - -\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}\left(1 - e^{-2\pi}\right) \\ &\approx 1,4116\end{aligned}$$

9.3 La longueur de la courbe est

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

La dérivée est

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{d\theta} &= \frac{d\left(\cos^2 \tfrac{1}{2}\theta\right)}{d\theta} \\ &= 2\cos\tfrac{1}{2}\theta \sin\tfrac{1}{2}\theta \cdot \frac{1}{2} \\ &= \cos\tfrac{1}{2}\theta \sin\tfrac{1}{2}\theta\end{aligned}$$

La longueur est donc

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\cos^2 \tfrac{1}{2}\theta\right)^2 + \left(\cos\tfrac{1}{2}\theta \sin\tfrac{1}{2}\theta\right)^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^4 \tfrac{1}{2}\theta + \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 \tfrac{1}{2}\theta}\sqrt{\cos^2 \tfrac{1}{2}\theta + \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 \tfrac{1}{2}\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \cos\tfrac{1}{2}\theta\, d\theta \\ &= \left[2\sin\tfrac{1}{2}\theta\right]_0^{\pi} \\ &= 2 - 0 \\ &= 2\end{aligned}$$

9.4 La longueur de la courbe est

$$L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

La dérivée est

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{d\theta}&=\frac{d\left(2-2\cos\theta\right)}{d\theta}\\&=2\sin\theta\end{aligned}$$

La longueur est donc

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(2-2\cos\theta\right)^2+\left(2\sin\theta\right)^2}\,d\theta\\&=\int_0^{\pi}\sqrt{4-8\cos\theta+4\cos^2\theta+4\sin^2\theta}\,d\theta\\&=\int_0^{\pi}\sqrt{4-8\cos\theta+4}\,d\theta\\&=\int_0^{\pi}\sqrt{8-8\cos\theta}\,d\theta\\&=\int_0^{\pi}\sqrt{8}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta\end{aligned}$$

Puisque $1-\cos\theta=2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{\pi}\sqrt{8}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta\\&=\int_0^{\pi}\sqrt{8}\sqrt{2\sin^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)}\,d\theta\\&=\int_0^{\pi}\sqrt{8}\sqrt{2}\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)d\theta\\&=\sqrt{16}\int_0^{\pi}\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)d\theta\\&=4\int_0^{\pi}\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)d\theta\\&=8\left[-\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi}\\&=8\left[0--1\right]\\&=8\end{aligned}$$

9.5 L'aire de la surface est

$$S = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dA$$

Les dérivées sont

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial(6-3x-2y)}{\partial x} \\ &= -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial(6-3x-2y)}{\partial y} \\ &= -2\end{aligned}$$

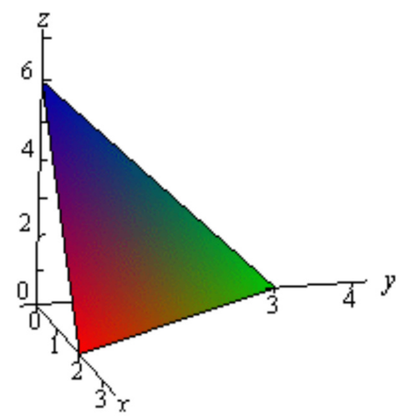
L'aire est donc

$$\begin{aligned}S &= \iint \sqrt{1+(-3)^2+(-2)^2} \, dA \\ &= \iint \sqrt{14} \, dA\end{aligned}$$

Trouvons ensuite où se termine la région d'intégration dans le plan *xy*. Elle prend fin à l'endroit où le plan coupe le plan *xy*, donc quand $z = 0$. On a donc

$$\begin{aligned}0 &= 6-3x-2y \\ y &= 3-\tfrac{3}{2}x\end{aligned}$$

Si on intègre en *y* en premier, on a les bornes suivantes.



En *y*, on va de 0 à $3-\tfrac{3}{2}x$

En *x*, on va de 0 à 2.

L'aire est donc

$$S = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} \sqrt{14} \, dy dx$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{14}\int_0^2 \left[y\right]_0^{3-\frac{3}{2}x} dx \\ &= \sqrt{14}\int_0^2 \left(3-\tfrac{3}{2}x\right) dx \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{14}\left[3x-\tfrac{3}{4}x^2\right]_0^2 \\ &= \sqrt{14}\left[3\cdot 2-\tfrac{3}{4}\cdot 4\right] \\ &= \sqrt{14}\cdot 3 \end{aligned}$$

Voici comment on aurait pu aller plus vite

$$S = \iint \sqrt{14}dA = \sqrt{14}\iint dA$$

Comme cette intégrale est l'aire de la région d'intégration (qui a une aire de 3 puisque c'est un triangle avec une base de 2 et une hauteur de 3), on a

$$S = \iint \sqrt{14}dA = \sqrt{14}\cdot 3$$

9.6 L'aire de la surface est

$$S = \iint \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

Les dérivées sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial\left(3+2y+\frac{1}{4}x^4\right)}{\partial x} \\ &= x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial\left(3+2y+\frac{1}{4}x^4\right)}{\partial y} \\ &= 2 \end{aligned}$$

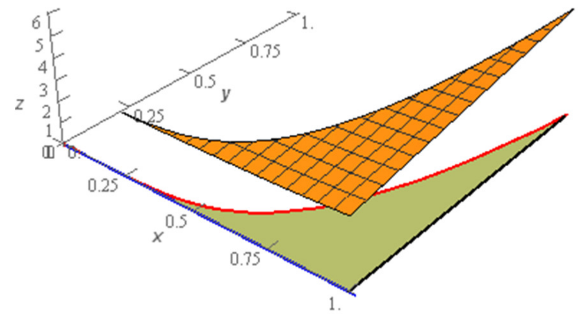
L'aire est donc

$$\begin{aligned} S &= \iint \sqrt{1+\left(x^3\right)^2+\left(2\right)^2}\,dA \\ &= \iint \sqrt{5+x^6}\,dA \end{aligned}$$

Pour couvrir la région d'intégration, on va intégrer en *y* en premier.

En *y*, on va de 0 à x^5

En *x*, on va de 0 à 1.



L'aire est donc

$$S = \int_0^1 \int_0^{x^5} \sqrt{5+x^6}\,dydx$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left[y\sqrt{5+x^6} \right]_0^{x^5} dx \\ &= \int_0^1 x^5 \sqrt{5+x^6}\,dx \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} S &= \left[\frac{1}{9}\left(5+x^6\right)^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{9}\left(6^{3/2}-5^{3/2}\right) \\ &\approx 0,3907 \end{aligned}$$

9.7 L'aire de la surface est

$$S = \iint \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\ dA$$

Les dérivées sont

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial\left(13-4x^2-4y^2\right)}{\partial x}$$
$$=-8x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial\left(13-4x^2-4y^2\right)}{\partial y}$$
$$=-8y$$

L'aire est donc

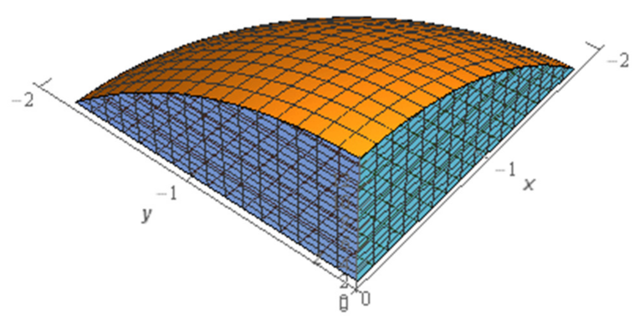
$$S=\iint\sqrt{1+\left(-8x\right)^2+\left(-8y\right)^2}\,dA$$
$$=\iint\sqrt{1+64x^2+64y^2}\,dA$$

La forme de cette équation et la forme de la région d'intégration suggèrent fortement de passer en coordonnées polaires. La surface est alors

$$S=\iint\sqrt{1+64\left(x^2+y^2\right)}\,dA$$
$$=\iint\sqrt{1+64\rho^2}\,dA$$

Trouvons ensuite où se termine la région d'intégration dans le plan *xy*. Elle prend fin à l'endroit où la surface coupe le plan $z = 1$. On a donc

$$1=13-4x^2-4y^2$$
$$x^2+y^2=3$$
$$\rho^2=3$$
$$\rho=\sqrt{3}$$



Si on intègre en ρ en premier, on a les bornes suivantes.

En ρ, on va de 0 à $\sqrt{3}$

En θ, on va de 0 à π/2.

L'aire est donc

$$S=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+64\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

La première intégrale donne

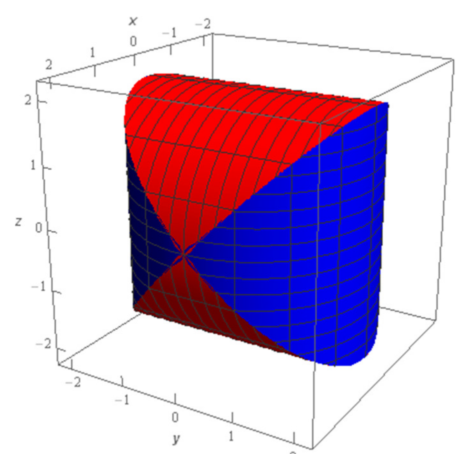
$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi/2} \left[\tfrac{1}{192}\left(1+64\rho^2\right)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{3}} d\theta \\ &= \tfrac{1}{192}\int_0^{\pi/2} \left(\left(1+64\cdot 3\right)^{3/2} - 1 \right) d\theta \\ &= \tfrac{1}{192}\int_0^{\pi/2} \left(\left(193\right)^{3/2} - 1 \right) d\theta \\ &= \tfrac{193^{3/2}-1}{192}\int_0^{\pi/2} d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{193^{3/2}-1}{192}\left[\theta\right]_0^{\pi/2} \\ &= \tfrac{193^{3/2}-1}{192}\left[\tfrac{\pi}{2}\right] \\ &= \tfrac{\left(193^{3/2}-1\right)\cdot\pi}{384} \\ &\approx 21,928 \end{aligned}$$

9.8 L'aire de la surface est

$$S = \iint \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$



On va calculer l'aire de la partie en rouge sur le dessus. Il suffira de multiplier par 4 pour obtenir le résultat final.

La surface en rouge est décrite par l'équation

$$x^2 + z^2 = 4$$

L'équation de dessus est donc

$$z = \sqrt{4 - x^2}$$

Les dérivées sont

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial\sqrt{4-x^2}}{\partial x}\\ &= \tfrac{1}{2}\left(4-x^2\right)^{-1/2}\left(-2x\right)\\ &= \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial\sqrt{4-x^2}}{\partial y}\\ &= 0\end{aligned}$$

L'aire est donc

$$\begin{aligned}S &= \iint\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2+\left(0\right)^2}\,dA\\ &= \iint\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dA\\ &= \iint\sqrt{\frac{4-x^2}{4-x^2}+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dA\\ &= \iint\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\,dA\end{aligned}$$

La zone dans le plan *xy* sous cette surface est un cercle de rayon 2.

En *y*, on va de $-\sqrt{4-x^2}$ à $\sqrt{4-x^2}$

En *x*, on va de -2 à 2.

L'aire est donc

$$S = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\,dydx$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}S &= \int_{-2}^{2}\left[y\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dx\\ &= \int_{-2}^{2}\left(\left[\sqrt{4-x^2}\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\right]-\left[-\sqrt{4-x^2}\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\right]\right)dx\\ &= 2\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}dx\\ &= 2\int_{-2}^{2}\sqrt{4}dx\\ &= 4\int_{-2}^{2}dx\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}S &= 4\left[x\right]_{-2}^{2}\\ &= 4(2--2)\\ &= 16\end{aligned}$$

Comme mentionné précédemment, il faut multiplier par 4 pour obtenir l'aire totale, ce qui nous donne une aire de 64.

10.1 Le volume est

$$V = \iiint dV$$

Voici les bornes de la région d'intégration.

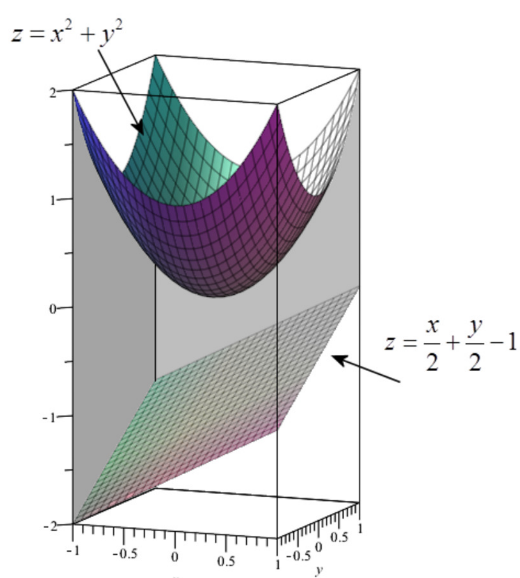
En z, on va de $z=\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-1$ à $z=x^2+y^2$.

En y, on va de -1 à 1.

En x, on va de -1 à 1.

Le volume est donc

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-1}^{x^2+y^2} dzdydx$$



La première intégrale donne

$$\begin{aligned}V &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[z\right]_{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-1}^{x^2+y^2} dydx \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(x^2+y^2-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}y+1\right)dydx\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}V &= \int_{-1}^{1}\left[yx^2+\tfrac{1}{3}y^3-\tfrac{1}{2}xy-\tfrac{1}{4}y^2+y\right]_{-1}^{1} dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left(\left[x^2+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{4}+1\right]-\left[-x^2-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{4}-1\right]\right)dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left(2x^2+\tfrac{2}{3}-x+2\right)dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left(2x^2-x+\tfrac{8}{3}\right)dx\end{aligned}$$

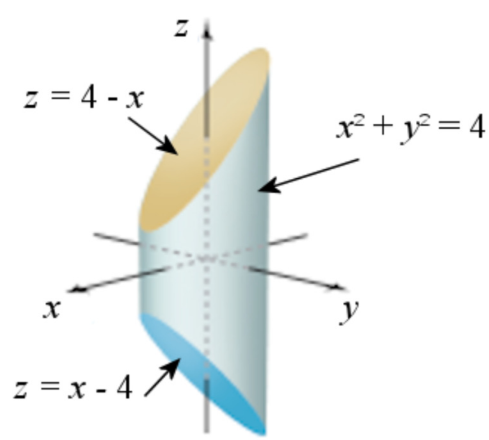
La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned}V &= \left[\tfrac{2}{3}x^3-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{8}{3}x\right]_{-1}^{1} \\ &= \left[\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{8}{3}\right]-\left[-\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{2}-\tfrac{8}{3}\right] \\ &= 2\left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{8}{3}\right) \\ &= \tfrac{20}{3}\end{aligned}$$

10.2 Le volume est

$$V = \iiint dV$$

Voici les bornes de la région d’intégration.



En z, on va de $z = x-4$ à $z = 4-x$.

En y, on va de $y = -\sqrt{4-x^2}$ à $y = \sqrt{4-x^2}$.

En x, on va de -2 à 2.

Le volume est donc

$$V=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x-4}^{4-x} dzdydx$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}V&=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left[z\right]_{x-4}^{4-x} dydx\\&=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(4-x-x+4\right) dydx\\&=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(8-2x\right) dydx\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}V&=\int_{-2}^{2}\left[\left(8-2x\right)y\right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx\\&=\int_{-2}^{2}\left(\left[\left(8-2x\right)\sqrt{4-x^2}\right]-\left[-\left(8-2x\right)\sqrt{4-x^2}\right]\right)dx\\&=2\int_{-2}^{2}\left(8-2x\right)\sqrt{4-x^2}dx\end{aligned}$$

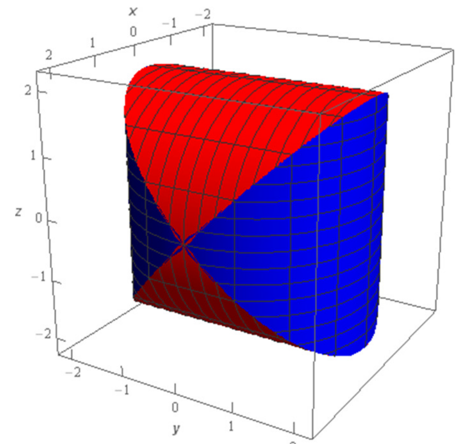
La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned}V&=2\left[16\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right)-\tfrac{2}{3}\sqrt{4-x^2}\left(x^2-6x+4\right)\right]_{-2}^{2}\\&=2\left(\left[16\arcsin 1-0\right]-\left[16\arcsin\left(-1\right)-0\right]\right)\\&=2\left(16\cdot\tfrac{\pi}{2}--16\cdot\tfrac{\pi}{2}\right)\\&=32\pi\end{aligned}$$

10.3 Le volume est

$$V=\iiint dV$$

Voici les bornes de la région d'intégration.



En z, on va de $z = -\sqrt{4-x^2}$ à $z = \sqrt{4-x^2}$.

En y, on va de $y = -\sqrt{4-x^2}$ à $y = -\sqrt{4-x^2}$.

En x, on va de -2 à 2.

Le volume est donc

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dz dy dx$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} [z]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy dx \\ &= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left[\sqrt{4-x^2} - -\sqrt{4-x^2} \right] dy dx \\ &= 2\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2} dy dx \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} V &= 2\int_{-2}^{2} \left[y\sqrt{4-x^2} \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= 2\int_{-2}^{2} \left(\left[\sqrt{4-x^2}\sqrt{4-x^2} - -\sqrt{4-x^2}\sqrt{4-x^2} \right] \right) dx \\ &= 4\int_{-2}^{2} \left(4-x^2\right) dx \end{aligned}$$

La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned} V &= 4\left[4x - \tfrac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^{2} \\ &= 4\left(\left[8 - \tfrac{8}{3} \right] - \left[-8 + \tfrac{8}{3} \right] \right) \\ &= \tfrac{128}{3} \end{aligned}$$

10.4 Le volume est

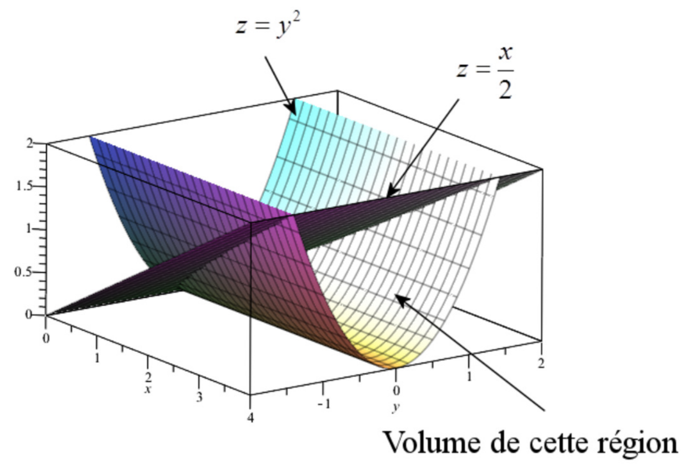
$$V = \iiint dV$$

Voici les bornes de la région d'intégration.

En z, on va de $z = y^2$ à $z = \frac{1}{2}x$.

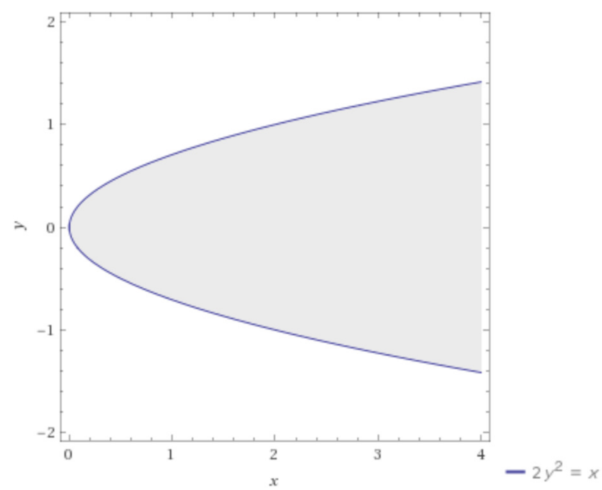
Dans le plan xy, on doit trouver la région qui est délimitée par la projection sur le plan xy du croisement des deux surfaces.

On trouve cette région en égalant les valeurs de x pour les deux surfaces



$$y^2 = \tfrac{1}{2}x$$
$$2y^2 = x$$

On a donc la région suivante dans le plan xy.



En x, on va de $y = 2y^2$ à 4.

En y, on va de $-\sqrt{2}$ à $\sqrt{2}$.

Le volume est donc

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{2y^2}^{4} \int_{y^2}^{\frac{1}{2}x} dzdxdy$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{2y^2}^{4} \left[z \right]_{y^2}^{\frac{1}{2}x} dxdy \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{2y^2}^{4} \left[\tfrac{1}{2}x - y^2 \right] dxdy \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[\tfrac{1}{4}x^2 - y^2 x \right]_{2y^2}^{4} dy \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\left[4 - 4y^2 \right] - \left[y^4 - 2y^4 \right] \right) dy \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\left[4 - 4y^2 \right] - \left[-y^4 \right] \right) dy \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(y^4 - 4y^2 + 4 \right) dy \end{aligned}$$

La troisième intégrale donne

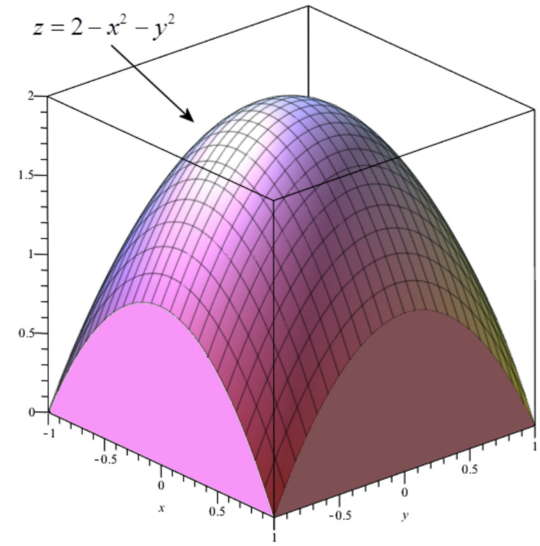
$$\begin{aligned} V &= \left[\tfrac{1}{5}y^5 - \tfrac{4}{3}y^3 + 4y \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= \left[\tfrac{1}{5}2^{5/2} - \tfrac{4}{3}2^{3/2} + 4\cdot 2^{1/2} \right] - \left[-\tfrac{1}{5}2^{5/2} + \tfrac{4}{3}2^{3/2} - 4\cdot 2^{1/2} \right] \\ &= \tfrac{2}{5}2^{5/2} - \tfrac{8}{3}2^{3/2} + 8\cdot 2^{1/2} \\ &= \sqrt{2}\left(\tfrac{2}{5}2^2 - \tfrac{8}{3}2 + 8 \right) \\ &= \sqrt{2}\,\tfrac{64}{15} \end{aligned}$$

11.1 a) La masse est

$$M = \iiint \tilde{\rho}\, dV$$

Voici les bornes de la région d'intégration.

En z, on va de 0 à $z = 2 - x^2 - y^2$.



En y, on va de -1 à 1.

En x, on va de -1 à 1.

La masse est donc

$$\begin{aligned} M &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2-x^2-y^2} \tilde{\rho} dzdydx \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2-x^2-y^2} 1800 dzdydx \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[1800z\right]_0^{2-x^2-y^2} dydx \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(3600 - 1800x^2 - 1800y^2\right) dydx \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= \int_{-1}^{1}\left[3600y - 1800x^2 y - 600y^3\right]_{-1}^{1} dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left(\left[3600 - 1800x^2 - 600\right] - \left[-3600 + 1800x^2 + 600\right]\right) dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left(6000 - 3600x^2\right) dx \end{aligned}$$

La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= \left[6000x - 1200x^3\right]_{-1}^{1} \\ &= \left[6000 - 1200\right] - \left[-6000 + 1200\right] \\ &= 9600kg \end{aligned}$$

b) Par symétrie, les positions en x et y du centre de masse sont nulles. Pour la position en z, on doit calculer

$$z_{cm} = \tfrac{1}{M}\iiint \tilde{\rho} z dV$$

Avec les bornes trouvées précédemment, on a

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2-x^2-y^2} \tilde{\rho} z dz dy dx \\ &= \tfrac{1}{M}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2-x^2-y^2} 1800 z dz dy dx \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[900z^2\right]_0^{2-x^2-y^2} dy dx \\ &= \tfrac{1}{M}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 900\left(2-x^2-y^2\right)^2 dy dx \\ &= \tfrac{1}{M}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 900\left(4+x^4+y^4-4x^2-4y^2+2x^2y^2\right) dy dx \\ &= \tfrac{1}{M}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(3600+900x^4+900y^4-3600x^2-3600y^2+1800x^2y^2\right) dy dx \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M}\int_{-1}^{1}\left[3600y+900x^4y+180y^5-3600x^2y-1200y^3+600x^2y^3\right]_{-1}^{1} dx \\ &= \tfrac{1}{M}\int_{-1}^{1}\left(\begin{array}{l}\left[3600+900x^4+180-3600x^2-1200+600x^2\right]- \\ \qquad \left[-3600-900x^4-180+3600x^2+1200-600x^2\right]\end{array}\right) dx \\ &= \tfrac{1}{M}\int_{-1}^{1}\left(5160-6000x^2+1800x^4\right) dx \end{aligned}$$

La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M}\left[5160x-2000x^3+360x^5\right]_{-1}^{1} \\ &= \tfrac{1}{M}\left(\left[5160-2000+360\right]-\left[-5160+2000-360\right]\right) \\ &= \tfrac{1}{M}7040 \end{aligned}$$

Puisque la masse est 9600, la hauteur du centre de masse est

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{9600}7040 \\ &= \tfrac{11}{15}m \end{aligned}$$

c) Le moment d'inertie est

$$I_z = \iiint \tilde{\rho}\left(x^2+y^2\right) dV$$

Avec les bornes trouvées précédemment, on a

$$\begin{aligned}I_z &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2-x^2-y^2} \tilde{\rho}\left(x^2+y^2\right)dzdydx \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2-x^2-y^2} 1800\left(x^2+y^2\right)dzdydx\end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}I_z &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[1800z\left(x^2+y^2\right)\right]_0^{2-x^2-y^2} dydx \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}1800\left(2-x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)dydx \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}1800\left(2x^2-x^4-x^2y^2+2y^2-x^2y^2-y^4\right)dydx \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(3600x^2-1800x^4-1800x^2y^2+3600y^2-1800x^2y^2-1800y^4\right)dydx\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}I_z &= \int_{-1}^{1}\left[3600x^2y-1800x^4y-600x^2y^3+1200y^3-600x^2y^3-360y^5\right]dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left(\begin{array}{l}\left[3600x^2-1800x^4-600x^2+1200-600x^2-360\right] \\ \quad -\left[-3600x^2+1800x^4+600x^2-1200+600x^2+360\right]\end{array}\right)dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left(-3600x^4+4800x^2+1680\right)dx\end{aligned}$$

La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned}I_z &= \left[-720x^5+1600x^3+1680x\right]_{-1}^{1} \\ &= \left[-720+1600+1680\right]-\left[720-1600-1680\right] \\ &= 5120kgm^2\end{aligned}$$

11.2 a) La masse est

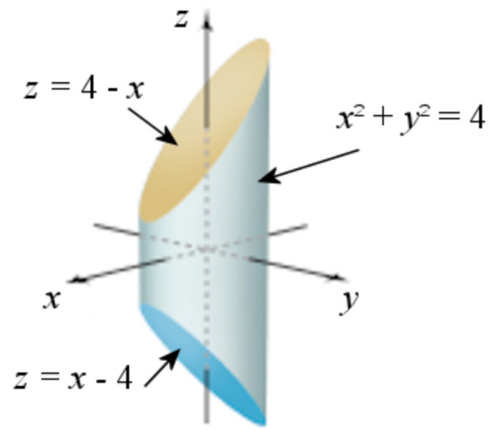
$$M = \iiint \tilde{\rho}dV$$

Voici les bornes de la région d'intégration.

En z, on va de $x - 4$ à $4 - x$.

En y, on va de $-\sqrt{4-x^2}$ à $\sqrt{4-x^2}$.

En x, on va de -2 à 2.



La masse est donc

$$\begin{aligned} M &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x-4}^{4-x}\tilde{\rho}\,dzdydx \\ &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x-4}^{4-x}\left(3x^2+2\right)dzdydx \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x-4}^{4-x}\tilde{\rho}\,dzdydx \\ &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left[z\left(3x^2+2\right)\right]_{x-4}^{4-x}dydx \\ &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(\left[\left(3x^2+2\right)\left(4-x\right)-\left(3x^2+2\right)\left(x-4\right)\right]\right)dydx \\ &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(3x^2+2\right)\left(8-2x\right)dydx \\ &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(24x^2+16-6x^3-4x\right)dydx \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= \int_{-2}^{2}\left[\left(24x^2+16-6x^3-4x\right)y\right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dx \\ &= \int_{-2}^{2}\left(24x^2+16-6x^3-4x\right)\left(\sqrt{4-x^2}--\sqrt{4-x^2}\right)dx \\ &= \int_{-2}^{2}2\sqrt{4-x^2}\left(24x^2+16-6x^3-4x\right)dx \end{aligned}$$

La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= \left[\sqrt{4-x^2}\left(\text{polynome en } x\right)+160\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right)\right]_{-2}^{2} \\ &= \left[0+160\arcsin 1\right]-\left[0+160\arcsin\left(-1\right)\right] \\ &= 160\tfrac{\pi}{2}--160\tfrac{\pi}{2} \\ &= 160\pi \end{aligned}$$

b) On doit calculer

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \tfrac{1}{M}\iiint \tilde{\rho} x dV \\ y_{cm} &= \tfrac{1}{M}\iiint \tilde{\rho} y dV \\ z_{cm} &= \tfrac{1}{M}\iiint \tilde{\rho} z dV \end{aligned}$$

Commençons avec le *x*.

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \tfrac{1}{M}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x-4}^{4-x} \tilde{\rho} x dz dy dx \\ &= \tfrac{1}{M}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x-4}^{4-x} \left(3x^2+2\right) x dz dy dx \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \tfrac{1}{M}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left[\left(3x^2+2\right) z x\right]_{x-4}^{4-x} dy dx \\ &= \tfrac{1}{M}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(3x^2+2\right) x \left([4-x]-[x-4]\right) dy dx \\ &= \tfrac{1}{M}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(3x^2+2\right) x \left(8-2x\right) dy dx \\ &= \tfrac{1}{M}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(-6x^4+24x^3-4x^2+16x\right) dy dx \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \tfrac{1}{M}\int_{-2}^{2} \left(-6x^4+24x^3-4x^2+16x\right)[y]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \tfrac{1}{M}\int_{-2}^{2} \left(-6x^4+24x^3-4x^2+16x\right)\left(\sqrt{4-x^2}\,--\sqrt{4-x^2}\right) dx \\ &= \tfrac{1}{M}\int_{-2}^{2} \left(-6x^4+24x^3-4x^2+16x\right) 2\sqrt{4-x^2} dx \end{aligned}$$

La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \tfrac{1}{M}\left[\sqrt{4-x^2}\left(\text{polynome en } x\right) - 64\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right)\right]_{-2}^{2} \\ &= \tfrac{1}{M}\left(\left[0-64\arcsin(1)\right]-\left[0-64\arcsin(-1)\right]\right) \\ &= \tfrac{1}{M}\left(-64\tfrac{\pi}{2}---64\tfrac{\pi}{2}\right) \\ &= -\tfrac{1}{M}64\pi \end{aligned}$$

Avec la valeur de la masse, on obtient

$$\begin{aligned} x_{cm} &= -\tfrac{1}{160\pi} 64\pi \\ &= -\tfrac{2}{5} \\ &= -0,4cm \end{aligned}$$

Continuons avec le y

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \tfrac{1}{M} \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x-4}^{4-x} \tilde{\rho}\, y dz dy dx \\ &= \tfrac{1}{M} \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x-4}^{4-x} \left(3x^2+2\right) y dz dy dx \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \tfrac{1}{M} \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left[\left(3x^2+2\right) zy \right]_{x-4}^{4-x} dy dx \\ &= \tfrac{1}{M} \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(3x^2+2\right) y \left([4-x] - [x-4] \right) dy dx \\ &= \tfrac{1}{M} \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(3x^2+2\right) y \left(8-2x\right) dy dx \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \tfrac{1}{M} \int_{-2}^{2} \left[\left(3x^2+2\right) \tfrac{1}{2} y^2 \left(8-2x\right) \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \tfrac{1}{M} \int_{-2}^{2} \left(3x^2+2\right) \tfrac{1}{2} \left(8-2x\right) \left(\left[4-x^2\right] - \left[4-x^2\right] \right) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Trouvons finalement la position du centre de masse en z

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M} \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x-4}^{4-x} \tilde{\rho}\, z dz dy dx \\ &= \tfrac{1}{M} \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x-4}^{4-x} \left(3x^2+2\right) z dz dy dx \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left[\left(3x^2+2\right)\tfrac{1}{2}z^2\right]_{x-4}^{4-x} dydx \\ &= \tfrac{1}{M}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(3x^2+2\right)\tfrac{1}{2}\left(\left[\left(4-x\right)^2\right]-\left[\left(x-4\right)^2\right]\right) dydx \\ &= 0 \end{aligned}$$

c) Le moment d'inertie est

$$I_z = \iiint \tilde{\rho}\left(x^2+y^2\right)dV$$

Avec les bornes trouvées précédemment, on a

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x-4}^{4-x}\tilde{\rho}\left(x^2+y^2\right)dzdydx \\ &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x-4}^{4-x}\left(3x^2+2\right)\left(x^2+y^2\right)dzdydx \\ &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x-4}^{4-x}\left(3x^2+2\right)\left(x^2+y^2\right)dzdydx \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left[\left(3x^2+2\right)\left(x^2+y^2\right)z\right]_{x-4}^{4-x} dydx \\ &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(3x^2+2\right)\left(x^2+y^2\right)\left(\left[4-x\right]-\left[x-4\right]\right)dydx \\ &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(3x^2+2\right)\left(x^2+y^2\right)\left(8-2x\right)dydx \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}
I_z &= \int_{-2}^{2} \left(3x^2+2\right)\left(8-2x\right)\left[\left(x^2y+\tfrac{1}{3}y^3\right)\right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \int_{-2}^{2} \left(3x^2+2\right)\left(8-2x\right)\left(\left[x^2\sqrt{4-x^2}+\tfrac{1}{3}\left(4-x^2\right)^{3/2}\right]\left[-x^2\sqrt{4-x^2}-\tfrac{1}{3}\left(4-x^2\right)^{3/2}\right]\right)dx \\
&= \int_{-2}^{2} \left(3x^2+2\right)\left(8-2x\right)\left(2x^2\sqrt{4-x^2}+\tfrac{2}{3}\left(4-x^2\right)^{3/2}\right)dx \\
&= \int_{-2}^{2} \left(3x^2+2\right)\left(8-2x\right)\sqrt{4-x^2}\left(2x^2+\tfrac{2}{3}\left(4-x^2\right)\right)dx \\
&= \int_{-2}^{2} \left(3x^2+2\right)\left(8-2x\right)\sqrt{4-x^2}\left(\tfrac{4}{3}x^2+\tfrac{8}{3}\right)dx \\
&= \tfrac{1}{3}\int_{-2}^{2} \left(3x^2+2\right)\left(8-2x\right)\sqrt{4-x^2}\left(4x^2+8\right)dx \\
&= \tfrac{1}{3}\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\left(-24x^5+96x^4-64x^3+256x^2-32x+128\right)dx
\end{aligned}$$

La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned}
I_z &= \tfrac{1}{3}\left[\sqrt{4-x^2}\left(\text{polynome en } x\right)+1152\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right)\right]_{-2}^{2} \\
&= \tfrac{1}{3}\left(\left[0+1152\arcsin 1\right]-\left[0+1152\arcsin\left(-1\right)\right]\right) \\
&= \tfrac{1}{3}\left(1152\cdot\tfrac{\pi}{2}-1152\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) \\
&= 384\pi
\end{aligned}$$

12.1 a)

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+\left(-4\right)^2} = 5 \\
\theta &= \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{-4}{3} = -0,9273 \\
z &= 1
\end{aligned}$$

Les coordonnées cylindriques sont donc (5, -0,9273, 1).

b)

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(-2\right)^2+0^2} = 2 \\
\theta &= \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{0}{-2} = \pi \\
z &= 4
\end{aligned}$$

Les coordonnées cylindriques sont donc (2, π, 4).

12.2 a)

$$x = \rho\cos\theta = 4\cos\tfrac{\pi}{3} = 2$$
$$y = \rho\sin\theta = 4\sin\tfrac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$$
$$z = 3$$

Les coordonnées cartésiennes sont donc $\left(2,\ 2\sqrt{3},\ 3\right)$.

b)

$$x = \rho\cos\theta = 1\cos\tfrac{\pi}{2} = 0$$
$$y = \rho\sin\theta = 1\sin\tfrac{\pi}{2} = 1$$
$$z = 0$$

Les coordonnées cartésiennes sont donc (0, 1, 0).

12.3 a)

$$x - 3y + 2z = 5$$
$$\rho\cos\theta - 3\rho\sin\theta + 2z = 5$$
$$\rho\left(\cos\theta - 3\sin\theta\right) + 2z = 5$$

b)

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta = 4$$
$$\rho^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = 4$$
$$\rho^2 = 4$$
$$\rho = 2$$

c)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$
$$\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta + z^2 = 9$$
$$\rho^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + z^2 = 9$$
$$\rho^2 + z^2 = 9$$

d)

$$z = 3x^2 + 3y^2$$
$$z = 3\rho^2 \cos^2\theta + 3\rho^2 \sin^2\theta$$
$$z = 3\rho^2 \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$$
$$z = 3\rho^2$$

12.4 a)

$$z = \rho \cos 2\theta$$
$$z = \rho\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$
$$z = \sqrt{x^2+y^2}\left(\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2\right)$$
$$z = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2}\right)$$
$$z = \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$
$$z = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

b)

$$z = 3\tan\theta$$
$$z = 3\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$z = 3\frac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta}$$
$$z = 3\frac{y}{x}$$

c)

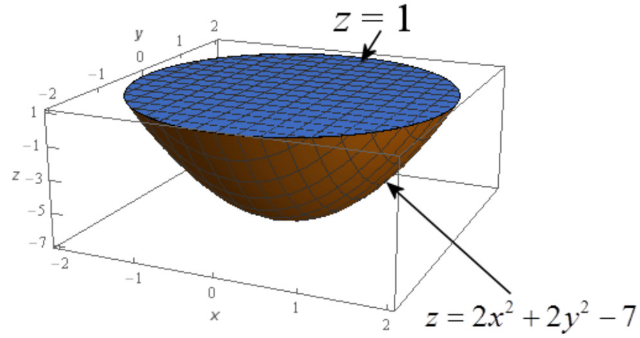
$$z^2 = \rho^2 \sin 2\theta$$
$$z^2 = 2\rho^2 \sin\theta\cos\theta$$
$$z^2 = 2(\rho\sin\theta)(\rho\cos\theta)$$
$$z^2 = 2xy$$

12.5 Trouvons les bornes d'intégration.

Trouvons premièrement l'équation de la surface en coordonnées cylindriques

$$z = 2x^2 + 2y^2 - 7$$
$$z = 2\rho^2 \cos^2\theta + 2\rho^2 \sin^2\theta - 7$$
$$z = 2\rho^2 \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) - 7$$
$$z = 2\rho^2 - 7$$

En z, on va de $2\rho^2$ - 7 à 1.



Pour trouver les limites en ρ et θ, il faut connaitre l'équation de l'intersection du plan avec la surface.

$$2\rho^2 - 7 = 1$$
$$2\rho^2 = 8$$
$$\rho^2 = 4$$
$$\rho = 2$$

En ρ, on va donc de 0 à 2

En θ, on va de 0 à 2π.

L'intégrale est donc

$$\iiint 60\sqrt{x^2+y^2}\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{2\rho^2-7}^1 60\sqrt{\rho^2}\,\rho\,dz\,d\rho\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{2\rho^2-7}^1 60\rho\rho\,dz\,d\rho\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{2\rho^2-7}^1 60\rho^2\,dz\,d\rho\,d\theta$$

La première intégrale donne

$$\iiint 60\sqrt{x^2+y^2}\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[60\rho^2 z\right]_{2\rho^2-7}^1 d\rho\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(60\rho^2 - 60\rho^2\left(2\rho^2-7\right)\right) d\rho\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(60\rho^2 - 120\rho^4 + 420\rho^2\right) d\rho\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(480\rho^2 - 120\rho^4\right) d\rho\,d\theta$$

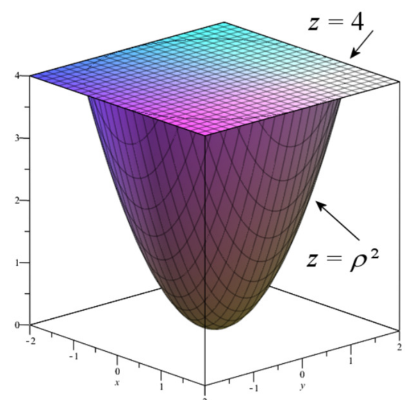
La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}\iiint 60\sqrt{x^2+y^2}\,dV &= \int_0^{2\pi}\left[160\rho^3-24\rho^5\right]_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\left[160\cdot 8-24\cdot 32\right]-\left[0\right]\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 512 d\theta\end{aligned}$$

La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned}\iiint 60\sqrt{x^2+y^2}\,dV &= \left[512\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= 1024\pi\end{aligned}$$

12.6 Trouvons les bornes d'intégration.



En z, on va de ρ^2 à 4.

Pour trouver les limites en ρ et θ, il faut connaitre l'équation de l'intersection du plan avec la surface.

$$\begin{aligned}\rho^2 &= 4 \\ \rho &= 2\end{aligned}$$

En ρ, on va donc de 0 à 2

En θ, on va de 0 à 2π.

Le volume est donc

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\rho^2}^4 \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}V &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[\rho z\right]_{\rho^2}^4 d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(4\rho-\rho^3\right) d\rho d\theta\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \left[2\rho^2 - \tfrac{1}{4}\rho^4\right]_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\left[2\cdot 4 - \tfrac{1}{4}\cdot 16\right] - [0]\right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 4 d\theta \end{aligned}$$

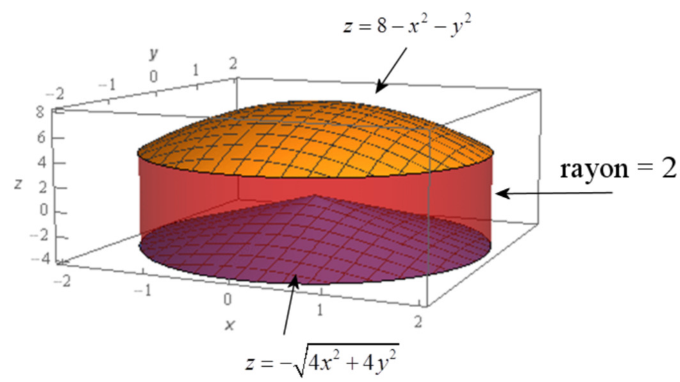
La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned} V &= [4\theta]_0^{2\pi} \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

12.7 Trouvons les bornes d'intégration.

Trouvons premièrement les équations des surfaces en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned} z &= 8 - x^2 - y^2 \\ z &= 8 - \rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta \\ z &= 8 - \rho^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \\ z &= 8 - \rho^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} z &= -\sqrt{4x^2 + 4y^2} \\ z &= -\sqrt{4\rho^2\cos^2\theta + 4\rho^2\sin^2\theta} \\ z &= -\sqrt{4\rho^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)} \\ z &= -\sqrt{4\rho^2} \\ z &= -2\rho \end{aligned}$$

En z, on va de -2ρ à $8 - \rho^2$.

En ρ, on va donc de 0 à 2

En θ, on va de 0 à 2π.

Le volume est donc

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-2\rho}^{8-\rho^2} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[\rho z\right]_{-2\rho}^{8-\rho^2} d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(8-\rho^2+2\rho\right) d\rho d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \left[8\rho - \tfrac{1}{3}\rho^3 + \rho^2\right]_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\left[8\cdot 2 - \tfrac{1}{3}\cdot 8 + 4\right] - \left[0\right]\right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \tfrac{52}{3} d\theta \end{aligned}$$

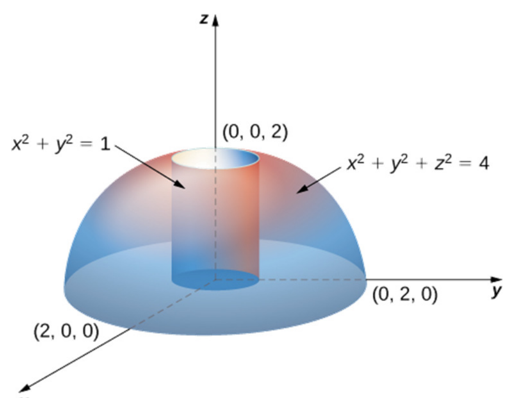
La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned} V &= \left[\tfrac{52}{3}\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= \tfrac{104}{3}\pi \end{aligned}$$

12.8 a) Trouvons les bornes d'intégration.

Trouvons premièrement les équations des surfaces en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \\ \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta + z^2 &= 4 \\ \rho^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + z^2 &= 4 \\ \rho^2 + z^2 &= 4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta &= 1 \\ \rho^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) &= 1 \\ \rho^2 &= 1 \\ \rho &= 1 \end{aligned}$$

En z, on va de 0 à $4-\rho^2$

En ρ, on va donc de 1 à 2.

En θ, on va de 0 à 2π.

La masse est donc

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \tilde{\rho}\rho dz d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} 1000\rho dz d\rho d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left[1000\rho z\right]_0^{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 1000\rho\sqrt{4-\rho^2}d\rho d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi}\left[\tfrac{-1000}{3}\left(4-x^2\right)^{3/2}\right]_1^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\left[0\right]-\left[\tfrac{-1000}{3}\left(4-1\right)^{3/2}\right]\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\tfrac{1000}{3}3^{3/2}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}1000\sqrt{3}d\theta \end{aligned}$$

La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= \left[1000\sqrt{3}\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= 2000\pi\sqrt{3} \end{aligned}$$

b) La hauteur du centre de masse est

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \tilde{\rho}\rho z dz d\rho d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} 1000\rho z dz d\rho d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_1^2 \left[500\rho z^2\right]_0^{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_1^2 500\rho\left(4-\rho^2\right)d\rho d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_1^2 \left(2000\rho-500\rho^3\right)d\rho d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M}\int_0^{2\pi}\left[1000\rho^2-125\rho^4\right]_1^2 d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}\int_0^{2\pi}\left(\left[1000\cdot 4-125\cdot 16\right]-\left[1000-125\right]\right)d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}\int_0^{2\pi}\left(2000-875\right)d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}\int_0^{2\pi}1125 d\theta \end{aligned}$$

La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M}\left[1125\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= \tfrac{1}{M}2250\pi \end{aligned}$$

Avec la valeur de la masse, on a

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \frac{2250\pi}{2000\pi\sqrt{3}} \\ &= \frac{9}{8\sqrt{3}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

c) Le moment d'inertie est

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint \tilde{\rho}\left(x^2+y^2\right)dA \\ &= \iiint \tilde{\rho}\rho^2 dA \end{aligned}$$

Avec nos bornes, on a

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \tilde{\rho}\rho^2 \rho dz d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} 1000\rho^3 z dz d\rho d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left[1000\rho^3 z\right]_0^{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 1000\rho^3\sqrt{4-\rho^2}\, d\rho d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi}\left[-\tfrac{200}{3}\left(4-\rho^2\right)^{3/2}\left(3\rho^2+8\right)\right]_1^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left([0]-\left[-\tfrac{200}{3}3^{3/2}(3+8)\right]\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\tfrac{200}{3}3^{3/2}(3+8)\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\tfrac{200}{3}3^{3/2}\cdot 11 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}200\sqrt{3}\cdot 11 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}2200\sqrt{3} d\theta \end{aligned}$$

La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned} I_z &= \left[2200\sqrt{3}\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= 4400\pi\sqrt{3} \end{aligned}$$

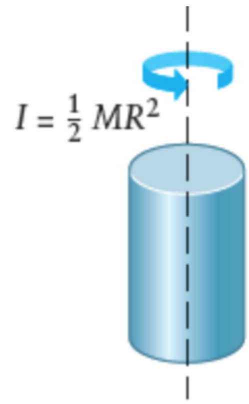
12.9 a) Trouvons les bornes d'intégration.

On va prendre un cylindre qui commence à $z = 0$ et qui se termine à $z = h$.

Le tour du cylindre est délimité par un cylindre de rayon R, dont l'équation est

$$\rho = R$$

Les bornes sont donc les suivantes.



En z, on va de 0 à h

En ρ, on va donc de 0 à R.

En θ, on va de 0 à 2π.

Le moment d'inertie est

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint \tilde{\rho}\left(x^2 + y^2\right) dA \\ &= \iiint \tilde{\rho}\rho^2 dA \end{aligned}$$

Avec nos bornes, on a

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h \tilde{\rho}\rho^2 \rho dz d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h \tilde{\rho}\rho^3 dz d\rho d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[\tilde{\rho}\rho^3 z\right]_0^h d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \tilde{\rho}\rho^3 h d\rho d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{1}{4}\tilde{\rho}h\rho^4\right]_0^R d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{4}\tilde{\rho}hR^4 d\theta \end{aligned}$$

La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned} I_z &= \left[\tfrac{1}{4}\tilde{\rho}hR^4\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= \tfrac{1}{2}\tilde{\rho}hR^4\pi \end{aligned}$$

Comme la densité est

$$\tilde{\rho} = \frac{masse}{volume} = \frac{M}{\pi R^2 h}$$

Le moment d'inertie est

$$I_z = \tfrac{1}{2}\tilde{\rho} h R^4 \pi = \tfrac{1}{2}\frac{M}{\pi R^2 h} h R^4 \pi = \tfrac{1}{2} M R^2$$

12.10 a) Trouvons les bornes d'intégration.

On va prendre un cône qui commence à $z = 0$ (la pointe est à $z = 0$) et qui se termine à $z = h$. On sait déjà que l'équation d'un tel cône est

$$z = k\rho$$

Comme le cône doit avoir un rayon $\rho = R$ à la hauteur $z = h$, on doit avoir

$$h = kR$$

La valeur de k est donc h/R. Le cône est donc décrit par l'équation

$$z = \frac{h}{R}\rho$$

La fin du cône (en haut) est délimitée par un cercle de rayon R, dont l'équation est

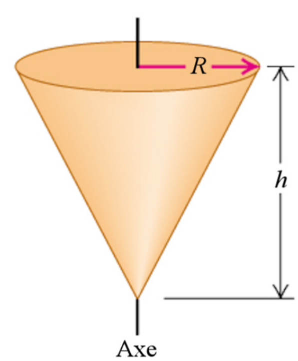
$$\rho = R$$

Les bornes sont donc les suivantes.

En z, on va de $h\rho/R$ à h.

En ρ, on va donc de 0 à R.

En θ, on va de 0 à 2π.



Le moment d'inertie est

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint \tilde{\rho}\left(x^2+y^2\right)dA \\ &= \iiint \tilde{\rho}\rho^2 dA \end{aligned}$$

Avec nos bornes, on a

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_{h\rho/R}^h \tilde{\rho}\rho^2 \rho dz d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_{h\rho/R}^h \tilde{\rho}\rho^3 dz d\rho d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi}\int_0^R \left[\tilde{\rho}\rho^3 z\right]_{h\rho/R}^h d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^R \tilde{\rho}\left(\rho^3 h - \rho^3\frac{h\rho}{R}\right) d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^R \tilde{\rho}\left(\rho^3 h - \tfrac{h}{R}\rho^4\right) d\rho d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi}\left[\tfrac{1}{4}\tilde{\rho}h\rho^4 - \tilde{\rho}\tfrac{h}{5R}\rho^5\right]_0^R d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\tfrac{1}{4}\tilde{\rho}hR^4 - \tilde{\rho}\tfrac{h}{5R}R^5\right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \tilde{\rho}hR^4\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}\right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{20}\tilde{\rho}hR^4 d\theta \end{aligned}$$

La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned} I_z &= \left[\tfrac{1}{20}\tilde{\rho}hR^4\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= \tfrac{1}{10}\tilde{\rho}hR^4\pi \end{aligned}$$

Comme la densité est

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \frac{masse}{volume} \\ &= \frac{M}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} \end{aligned}$$

Le moment d'inertie est

$$\begin{aligned} I_z &= \tfrac{1}{10}\tilde{\rho} h R^4 \pi \\ &= \tfrac{1}{10}\frac{M}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} h R^4 \pi \\ &= \tfrac{3}{10} M R^2 \end{aligned}$$

13.1 a)

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ &= \arctan \frac{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}}{1} \\ &= 0,95553 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan \frac{y}{x} \\ &= \arctan \frac{-1}{-1} \\ &= \frac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

Les coordonnées sphériques (r, ϕ, θ) sont donc $\left(\sqrt{3},\, 0,9553,\, \tfrac{5\pi}{4}\right)$.

b)

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi &= \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\\ &= \arctan\frac{\sqrt{(-2)^2+0^2}}{-2}\\ &= \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan\frac{y}{x}\\ &= \arctan\frac{0}{-2}\\ &= \pi\end{aligned}$$

Les coordonnées sphériques (r,ϕ,θ) sont donc $\left(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\right)$.

13.2 a)

$$\begin{aligned}x &= r\sin\phi\cos\theta\\ &= 4\sin\tfrac{\pi}{3}\cos\tfrac{\pi}{2}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= r\sin\phi\sin\theta\\ &= 4\sin\tfrac{\pi}{3}\sin\tfrac{\pi}{2}\\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z &= r\cos\phi\\ &= 4\cos\tfrac{\pi}{3}\\ &= 2\end{aligned}$$

Les coordonnées cartésiennes sont donc $\left(0, 2\sqrt{3}, 2\right)$.

b)

$$\begin{aligned}x &= r\sin\phi\cos\theta\\ &= 1\sin\tfrac{\pi}{2}\cos 0\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= r\sin\phi\sin\theta \\ &= 1\sin\tfrac{\pi}{2}\sin 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= r\cos\phi \\ &= 1\cos\tfrac{\pi}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les coordonnées cartésiennes sont donc (1,0,0).

13.3 a)

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 = 4 \\ r^2\sin^2\phi\cos^2\theta + r^2\sin^2\phi\sin^2\theta = 4 \\ r^2\sin^2\phi\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = 4 \\ r^2\sin^2\phi = 4 \\ r\sin\phi = 2 \end{gathered}$$

b)

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ r^2\sin^2\phi\cos^2\theta + r^2\sin^2\phi\sin^2\theta + r^2\cos^2\phi = 9 \\ r^2\sin^2\phi\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + r^2\cos^2\phi = 9 \\ r^2\sin^2\phi + r^2\cos^2\phi = 9 \\ r^2\left(\sin^2\phi + \cos^2\phi\right) = 9 \\ r^2 = 9 \\ r = 3 \end{gathered}$$

On pourrait aller plus vite en utilisant

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Pour faire

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ r^2 = 9 \\ r = 3 \end{gathered}$$

c)

$$z^2 = 3x^2 + 3y^2$$
$$r^2\cos^2\phi = 3r^2\sin^2\phi\cos^2\theta + r^2\sin^2\phi\sin^2\theta$$
$$r^2\cos^2\phi = 3r^2\sin^2\phi\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$$
$$r^2\cos^2\phi = 3r^2\sin^2\phi$$
$$\cos^2\phi = 3\sin^2\phi$$
$$\frac{1}{3} = \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi}$$
$$\frac{1}{3} = \tan^2\phi$$
$$\pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\phi$$
$$\phi = \frac{\pi}{6} \text{ et } \phi = \frac{5\pi}{6}$$

d)

$$z = 2xy$$
$$r\cos\phi = 2r\sin\phi\cos\theta \cdot r\sin\phi\sin\theta$$
$$\cos\phi = 2r\sin\phi\cos\theta\sin\phi\sin\theta$$
$$r = \frac{\cos\phi}{2\sin\phi\cos\theta\sin\phi\sin\theta}$$
$$r = \frac{\cos\phi}{2\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta}$$

Puisque $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$, on a

$$r = \frac{\cos\phi}{\sin^2\phi\sin 2\theta}$$

13.4 a)

$$r^2 = \sin 2\theta\tan^2\phi$$

Puisque $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$, on a

$$r^2 = 2\sin\theta\cos\theta\tan^2\phi$$

Puisque $\tan\phi = \dfrac{\rho}{z}$, on a

$$r^2 = 2\sin\theta\cos\theta\frac{\rho^2}{z^2}$$

Puisque $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$, on a

$$r^2 = 2\frac{x}{\rho}\frac{y}{\rho}\frac{\rho^2}{z^2}$$

$$r^2 = 2\frac{xy}{z^2}$$

Puisque $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, on a

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\frac{xy}{z^2}$$

$$z^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 2xy$$

b)

$$r = \sin\theta\sin\phi$$

Puisque $y = \rho\sin\theta$ et $\rho = r\sin\phi$, on a

$$r = \frac{y}{\rho}\frac{\rho}{r}$$

$$r^2 = y$$

Puisque $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, on a

$$x^2 + y^2 + z^2 = y$$

c)

$$r = \frac{1}{\sin\theta\sin^2\phi}$$

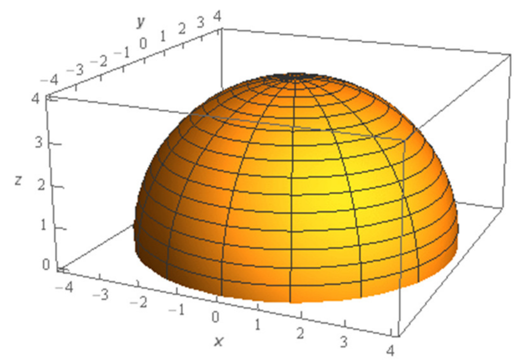
Puisque $y = \rho\sin\theta$ et $\rho = r\sin\phi$, on a

$$r = \frac{\rho r^2}{y\rho^2}$$
$$1 = \frac{r}{y\rho}$$
$$r = y\rho$$

Puisque $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ et $\rho^2 = x^2 + y^2$, on a

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = y\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = y^2\left(x^2 + y^2\right)$$

13.5 Voici les bornes d'intégration.



En r, on va de 0 à 4.

En ϕ, on va de 0 à π/2.

En θ, on va de 0 à 2π.

L'intégrale est donc

$$\iiint \left(10xz + 3\right) dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \left(10xz + 3\right) r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta$$

Avant de faire l'intégrale, il faut changer la fonction dans l'intégrale en coordonnées sphériques.

$$\begin{aligned} 10xz + 3 &= 10r\sin\phi\cos\theta r\cos\phi + 3 \\ &= 10r^2\sin\phi\cos\theta\cos\phi + 3 \end{aligned}$$

L'intégrale est donc

$$\begin{aligned} \iiint \left(10xz + 3\right) dxdydz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \left(10r^2\sin\phi\cos\theta\cos\phi + 3\right) r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \left(10r^4\sin^2\phi\cos\theta\cos\phi + 3r^2\sin\phi\right) dr d\phi d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\iiint (10xz+3)\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left[2r^5\sin^2\phi\cos\theta\cos\phi + r^3\sin\phi\right]_0^4 d\phi d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left(2048\sin^2\phi\cos\theta\cos\phi + 64\sin\phi\right) d\phi d\theta$$

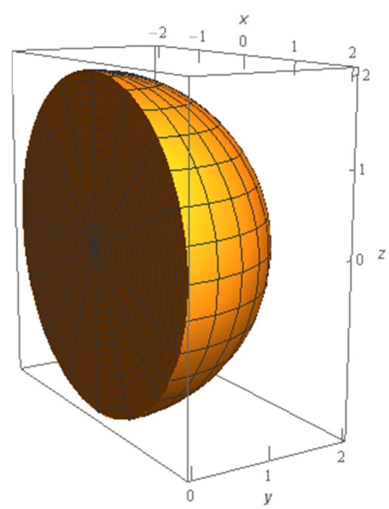
La deuxième intégrale donne

$$\iiint (10xz+3)\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\left[\tfrac{2048}{3}\sin^3\phi\cos\theta - 64\cos\phi\right]_0^{\pi/2} d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\left[\tfrac{2048}{3}\sin^3\tfrac{\pi}{2}\cos\theta - 64\cos\tfrac{\pi}{2}\right] - \left[\tfrac{2048}{3}\sin^3 0\cos\theta - 64\cos 0\right]\right) d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\left[\tfrac{2048}{3}\cos\theta - 0\right] - \left[0 - 64\right]\right) d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\tfrac{2048}{3}\cos\theta + 64\right) d\theta$$

La troisième intégrale donne

$$\iiint (10xz+3)\,dxdydz = \left[\tfrac{2048}{3}\sin\theta + 64\theta\right]_0^{2\pi}$$
$$= \left(\tfrac{2048}{3}\sin 2\pi + 128\pi\right) - \left(\tfrac{2048}{3}\sin 0 + 0\right)$$
$$= 128\pi$$

13.6 Voici les bornes d'intégration.



En r, on va de 0 à 2.

En ϕ, on va de 0 à π.

En θ, on va de 0 à π.

L'intégrale est donc

$$\iiint \left(x^2 + y^2\right) dxdydz = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2}\left(x^2 + y^2\right) r^2 \sin\phi\, dr d\phi d\theta$$

Avant de faire l'intégrale, il faut changer la fonction dans l'intégrale en coordonnées sphériques.

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= r^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta \\
&= r^2 \sin^2 \phi \left(\cos^2 \theta + \cos^2 \theta \right) \\
&= r^2 \sin^2 \phi
\end{aligned}
$$

L'intégrale est donc

$$
\begin{aligned}
\iiint \left(x^2 + y^2 \right) dxdydz &= \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^2 r^2 \sin^2 \phi r^2 \sin \phi drd\phi d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^2 r^4 \sin^3 \phi drd\phi d\theta
\end{aligned}
$$

La première intégrale donne

$$
\begin{aligned}
\iiint \left(x^2 + y^2 \right) dxdydz &= \int_0^\pi \int_0^\pi \left[\tfrac{1}{5} r^5 \sin^3 \phi \right]_0^2 d\phi d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^\pi \tfrac{32}{5} \sin^3 \phi d\phi d\theta
\end{aligned}
$$

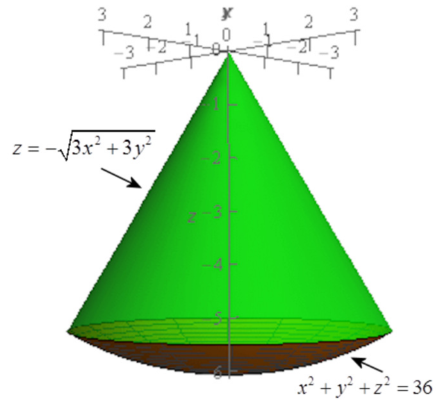
La deuxième intégrale donne

$$
\begin{aligned}
\iiint \left(x^2 + y^2 \right) dxdydz &= \int_0^\pi \left[\tfrac{32}{5} \tfrac{1}{12} \left(\cos 3\phi - 9 \cos \phi \right) \right]_0^\pi d\theta \\
&= \int_0^\pi \left(\left[\tfrac{8}{15} \left(\cos 3\pi - 9 \cos \pi \right) \right] - \left[\tfrac{8}{15} \left(\cos 0 - 9 \cos 0 \right) \right] \right) d\theta \\
&= \int_0^\pi \left(\left[\tfrac{8}{15} \left(-1 + 9 \right) \right] - \left[\tfrac{8}{15} \left(1 - 9 \right) \right] \right) d\theta \\
&= \int_0^\pi \tfrac{128}{15} d\theta
\end{aligned}
$$

La troisième intégrale donne

$$
\begin{aligned}
\iiint \left(x^2 + y^2 \right) dxdydz &= \left[\tfrac{128}{15} \theta \right]_0^\pi \\
&= \frac{128\pi}{15}
\end{aligned}
$$

13.7 Pour trouver les bornes, trouvons les équations des frontières.



$$x^2+y^2+z^2=36$$
$$r^2=36$$
$$r=6$$

$$z=-\sqrt{3x^2+3y^2}$$
$$r\cos\phi=-\sqrt{3r^2\sin^2\phi\cos^2\theta+3r^2\sin^2\phi\sin^2\theta}$$
$$r\cos\phi=-\sqrt{3r^2\sin^2\phi\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}$$
$$r\cos\phi=-\sqrt{3r^2\sin^2\phi}$$
$$r\cos\phi=-\sqrt{3}r\sin\phi$$
$$-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sin\phi}{\cos\phi}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\phi$$
$$\phi=\frac{5\pi}{6}$$

Les bornes d'intégration sont donc les suivantes.

En r, on va de 0 à 6.

En ϕ, on va de 5π/6 à π.

En θ, on va de 0 à 2π.

L'intégrale est donc

$$\iiint x^2 dxdydz=\int_0^{2\pi}\int_{5\pi/6}^{\pi}\int_0^6 x^2r^2\sin\phi drd\phi d\theta$$

Avant de faire l'intégrale, il faut changer la fonction dans l'intégrale en coordonnées sphériques.

$$x^2=r^2\sin^2\phi\cos^2\theta$$

L'intégrale est donc

$$\begin{aligned}\iiint x^2 dxdydz&=\int_0^{2\pi}\int_{5\pi/6}^{\pi}\int_0^6 r^2\sin^2\phi\cos^2\theta r^2\sin\phi drd\phi d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\int_{5\pi/6}^{\pi}\int_0^6 r^4\sin^3\phi\cos^2\theta drd\phi d\theta\end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}\iiint x^2 dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_{5\pi/6}^{\pi}\left[\ \right]_0^6 d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{5\pi/6}^{\pi} \tfrac{7776}{5}\sin^3\phi\cos^2\theta d\phi d\theta\end{aligned}$$

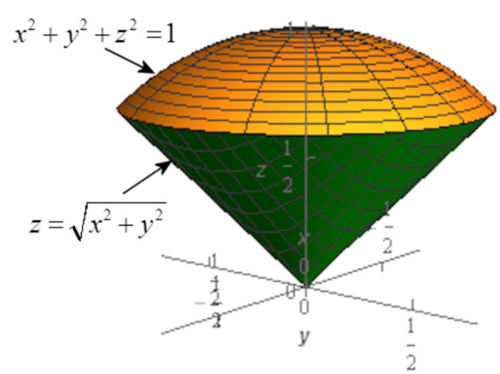
La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}\iiint x^2 dxdydz &= \int_0^{2\pi}\left[\tfrac{7776}{5}\tfrac{1}{12}\left(\cos 3\phi - 9\cos\phi\right)\cos^2\theta\right]_{5\pi/6}^{\pi} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\tfrac{648}{5}\cos^2\theta\left(\left[\left(\cos 3\pi - 9\cos\pi\right)\right]-\left[\left(\cos\tfrac{5\pi}{2}-9\cos\tfrac{5\pi}{6}\right)\right]\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\tfrac{648}{5}\cos^2\theta\left(\left[\left(-1+9\right)\right]-\left[\left(0+9\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\tfrac{648}{5}\cos^2\theta\left(\left[\left(-1+9\right)\right]-\left[\left(0+9\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\tfrac{324}{5}\left(16-9\sqrt{3}\right)\cos^2\theta d\theta\end{aligned}$$

La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned}\iiint x^2 dxdydz &= \tfrac{324}{5}\left(16-9\sqrt{3}\right)\left[\tfrac{1}{2}\theta+\sin\theta\cos\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= \tfrac{324}{5}\left(16-9\sqrt{3}\right)\left(\left[\pi+0\right]-\left[0\right]\right) \\ &= \tfrac{324\pi}{5}\left(16-9\sqrt{3}\right) \\ &= \left(\frac{5184}{5}-\frac{2916}{5}\sqrt{3}\right)\pi \\ &\approx 83,7799\end{aligned}$$

13.8 a) Pour trouver les bornes, trouvons les équations des frontières.



$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=1\\ r^2&=1\\ r&=1\end{aligned}$$

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$r\cos\phi=\sqrt{r^2\sin^2\phi\cos^2\theta+r^2\sin^2\phi\sin^2\theta}$$
$$r\cos\phi=\sqrt{r^2\sin^2\phi\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}$$
$$r\cos\phi=\sqrt{r^2\sin^2\phi}$$
$$r\cos\phi=r\sin\phi$$
$$1=\frac{\sin\phi}{\cos\phi}$$
$$1=\tan\phi$$
$$\phi=\frac{\pi}{4}$$

Les bornes d'intégration.

En r, on va de 0 à 1.

En ϕ, on va de 0 à π/4.

En θ, on va de 0 à 2π.

Le volume est donc

$$\begin{aligned}V&=\iiint dV\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 r^2\sin\phi\, dr d\phi d\theta\end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\left[\tfrac{1}{3}r^3\sin\phi\right]_0^1 d\phi d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\tfrac{1}{3}\sin\phi\, d\phi d\theta\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{2\pi}\left[-\tfrac{1}{3}\cos\phi\right]_0^{\pi/4} d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\left(\left[-\tfrac{1}{3}\cos\tfrac{\pi}{4}\right]-\left[-\tfrac{1}{3}\cos 0\right]\right)d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\left(\left[-\tfrac{1}{3}\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right]-\left[-\tfrac{1}{3}\right]\right)d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\tfrac{1}{6}\left(2-\sqrt{2}\right)d\theta\end{aligned}$$

La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned}V &= \tfrac{1}{6}\left(2-\sqrt{2}\right)\left[\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= \tfrac{1}{6}\left(2-\sqrt{2}\right)2\pi \\ &= \tfrac{1}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)\pi \\ &\approx 0,6134m^3\end{aligned}$$

b) La masse est

$$\begin{aligned}M &= \iiint \tilde{\rho}dV \\ &= \iiint 3000zdV\end{aligned}$$

Avec les bornes trouvées précédemment, la masse est

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 3000zr^2\sin\phi drd\phi d\theta$$

Puisque $z = r\cos\phi$, on obtient

$$\begin{aligned}M &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 3000r\cos\phi r^2\sin\phi drd\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 3000r^3\cos\phi\sin\phi drd\phi d\theta\end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}M &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\left[750r^4\cos\phi\sin\phi\right]_0^1 d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} 750\cos\phi\sin\phi d\phi d\theta\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}M &= \int_0^{2\pi}\left[-375\cos^2\phi\right]_0^{\pi/4} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\left[-375\cos^2\tfrac{\pi}{4}\right]-\left[-375\cos^2 0\right]\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\left[-375\tfrac{1}{2}\right]-\left[-375\right]\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\tfrac{375}{2}d\theta\end{aligned}$$

La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= \tfrac{375}{2}\left[\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= \tfrac{375}{2}2\pi \\ &= 375\pi \\ &\approx 1178,1kg \end{aligned}$$

c) La hauteur du centre de masse est

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M}\iiint \tilde{\rho} z dV \\ &= \tfrac{1}{M}\iiint 3000 z^2 dV \end{aligned}$$

Avec les bornes trouvées précédemment, la masse est

$$z_{cm} = \tfrac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 3000 z^2 r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta$$

Puisque $z = r\cos\phi$, on obtient

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 3000 r^2\cos^2\phi r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 3000 r^4\cos^2\phi \sin\phi dr d\phi d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\left[600 r^5\cos^2\phi \sin\phi\right]_0^1 d\phi d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} 600\cos^2\phi \sin\phi d\phi d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M}\int_0^{2\pi}\left[-200\cos^3\phi\right]_0^{\pi/4} d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}\int_0^{2\pi}\left(\left[-200\cos^3\tfrac{\pi}{4}\right]-\left[-200\cos^3 0\right]\right) d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}\int_0^{2\pi}\left(\left[-200\tfrac{\sqrt{2}}{4}\right]-\left[-200\right]\right) d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}\int_0^{2\pi}\left(200-50\sqrt{2}\right) d\theta \end{aligned}$$

La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M}\left(200-50\sqrt{2}\right)\left[\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= \tfrac{1}{M}\left(200-50\sqrt{2}\right)2\pi \\ &= \tfrac{1}{M}\left(400-100\sqrt{2}\right)\pi \end{aligned}$$

En utilisant la valeur de la masse, on a

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \frac{1}{375\pi}\left(400-100\sqrt{2}\right)\pi \\ &= \frac{16}{15}-\frac{4\sqrt{2}}{15} \\ &\approx 0,68954m \end{aligned}$$

d) Le moment d'inertie

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint \tilde{\rho}\left(x^2+y^2\right)dV \\ &= \iiint 3000z\left(x^2+y^2\right)dV \end{aligned}$$

Avec les bornes trouvées précédemment, la masse est

$$I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 3000z\left(x^2+y^2\right)r^2\sin\phi\, dr\, d\phi\, d\theta$$

La fonction dans l'intégrale est

$$\begin{aligned} z\left(x^2+y^2\right) &= r\cos\phi\left(r^2\sin^2\phi\cos^2\theta + r^2\sin^2\phi\sin^2\theta\right) \\ &= r\cos\phi r^2\sin^2\phi\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) \\ &= r\cos\phi r^2\sin^2\phi \\ &= r^3\cos\phi\sin^2\phi \end{aligned}$$

Le moment d'inertie est donc

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 3000r^3\cos\phi\sin^2\phi r^2\sin\phi\, dr\, d\phi\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 3000r^5\cos\phi\sin^3\phi\, dr\, d\phi\, d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\left[500r^6\cos\phi\sin^3\phi\right]_0^1 d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} 500\cos\phi\sin^3\phi d\phi d\theta \end{aligned}$$

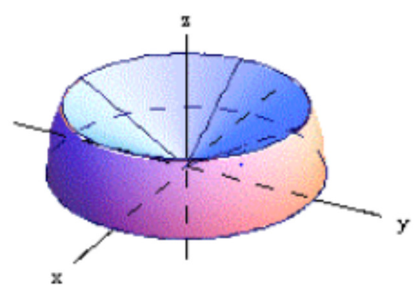
La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi}\left[125\sin^4\phi\right]_0^{\pi/4} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\left[125\sin^4\tfrac{\pi}{4}\right]-\left[125\sin^4 0\right]\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\left[125\tfrac{1}{4}\right]-0\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\tfrac{125}{4}d\theta \end{aligned}$$

La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned} I_2 &= \tfrac{125}{4}\left[\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= \tfrac{125}{4}2\pi \\ &= \frac{125\pi}{2} \\ &\approx 196,35kgm^2 \end{aligned}$$

13.9 Voici les bornes d'intégration.



En r, on va de 0 à 6 cm.

En ϕ, on va de π/3 à π/2.

En θ, on va de 0 à 2π.

La masse est donc

$$\begin{aligned} M &= \iiint \tilde{\rho} dV \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_0^{6cm}\left(5\tfrac{g}{cm^3}\right)r^2\sin\phi drd\phi d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned}M &= 5\tfrac{g}{cm^3}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\sin\phi\right]_0^{6cm} d\phi d\theta \\ &= 5\tfrac{g}{cm^3}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left(\left[\frac{(6cm)^3}{3}\sin\phi\right]-[0]\right)d\phi d\theta \\ &= 360g\int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sin\phi d\phi d\theta\end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned}M &= 360g\int_0^{2\pi}\left[-\cos\phi\right]_{\pi/3}^{\pi/2} d\theta \\ &= 360g\int_0^{2\pi}\left(\left[-\cos\tfrac{\pi}{2}\right]-\left[-\cos\tfrac{\pi}{3}\right]\right)d\theta \\ &= 360g\int_0^{2\pi}\left(0-\left[-\tfrac{1}{2}\right]\right)d\theta \\ &= 180g\int_0^{2\pi} d\theta\end{aligned}$$

La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned}M &= 180g\left[\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= 180g\left[2\pi\right] \\ &= 360\pi g \\ &\approx 1130{,}97g\end{aligned}$$

b) La hauteur du centre de masse est

$$\begin{aligned}z_{cm} &= \tfrac{1}{M}\iiint \tilde{\rho} z dV \\ &= \tfrac{1}{M}\iiint \left(5\tfrac{g}{cm^3}\right) z dV\end{aligned}$$

Puisque $z = r\cos\phi$, on obtient

$$z_{cm} = \tfrac{1}{M}\iiint\left(5\tfrac{g}{cm^3}\right) r\cos\phi dV$$

Avec les bornes trouvées précédemment, la hauteur du centre de masse est

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_0^{6cm}\left(5\tfrac{g}{cm^3}\right)r^3\sin\phi\cos\phi\, dr\, d\phi\, d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}5\tfrac{g}{cm^3}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_0^{6cm} r^3\sin\phi\cos\phi\, dr\, d\phi\, d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M}5\tfrac{g}{cm^3}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\sin\phi\cos\phi\right]_0^{6cm} d\phi\, d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}5\tfrac{g}{cm^3}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left(\left[\frac{(6cm)^4}{4}\sin\phi\cos\phi\right]-[0]\right)d\phi\, d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}1620gcm\int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sin\phi\cos\phi\, d\phi\, d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M}1620gcm\int_0^{2\pi}\left[-\tfrac{1}{2}\cos^2\phi\right]_{\pi/3}^{\pi/2} d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}1620gcm\int_0^{2\pi}\left(\left[-\tfrac{1}{2}\cos^2\tfrac{\pi}{2}\right]-\left[-\tfrac{1}{2}\cos^2\tfrac{\pi}{3}\right]\right)d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}1620gcm\int_0^{2\pi}\left([0]-\left[-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4}\right]\right)d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}\tfrac{405}{2}gcm\int_0^{2\pi}d\theta \end{aligned}$$

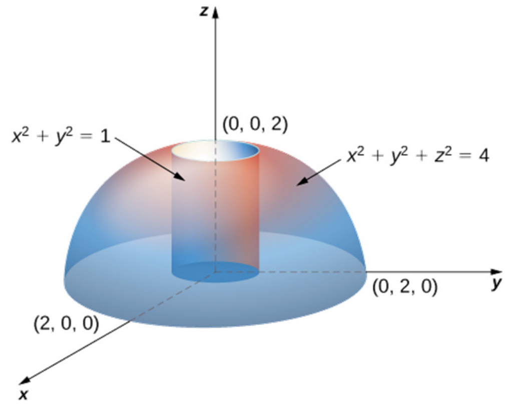
La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M}\tfrac{405}{2}gcm[\theta]_0^{2\pi} \\ &= \tfrac{1}{M}\tfrac{405}{2}gcm[2\pi] \\ &= \tfrac{1}{M}405\pi gcm \end{aligned}$$

Si on utilise maintenant la valeur de la masse, on a

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \frac{405\pi gcm}{M} \\ &= \frac{405\pi gcm}{360\pi g} \\ &= \tfrac{9}{8}cm \\ &= 1,125cm \end{aligned}$$

13.10 Voici les bornes d'intégration.



En r, on va de 1 m csc ϕ à 2 m.

En ϕ, on va de $\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1}{2}$ à π/2, donc de π/6 à π/2

En θ, on va de 0 à 2π.

La masse est donc

$$\begin{aligned} M &= \iiint \tilde{\rho} dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{1m.\csc\phi}^{2m} \left(1000\tfrac{kg}{m^3}\right) r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta \\ &= 1000\tfrac{kg}{m^3} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{1m\cdot\csc\phi}^{2m} r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= 1000\tfrac{kg}{m^3} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\sin\phi\right]_{1m\cdot\csc\phi}^{2m} d\phi d\theta \\ &= 1000\tfrac{kg}{m^3} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\left[\frac{(2m)^3}{3}\sin\phi\right] - \left[\frac{(1m\csc\phi)^3}{3}\sin\phi\right]\right) d\phi d\theta \\ &= \tfrac{1000}{3} kg \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(8\sin\phi - \frac{\sin\phi}{\sin^3\phi}\right) d\phi d\theta \\ &= \tfrac{1000}{3} kg \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(8\sin\phi - \frac{1}{\sin^2\phi}\right) d\phi d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= \tfrac{1000}{3} kg \int_0^{2\pi} \left[-8\cos\phi + \cot\phi\right]_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \\ &= \tfrac{1000}{3} kg \int_0^{2\pi} \left(\left[-8\cos\tfrac{\pi}{2} + \cot\tfrac{\pi}{2}\right] - \left[-8\cos\tfrac{\pi}{6} + \cot\tfrac{\pi}{6}\right]\right) d\theta \\ &= \tfrac{1000}{3} kg \int_0^{2\pi} \left([0] - \left[-4\sqrt{3} + \sqrt{3}\right]\right) d\theta \\ &= 1000\sqrt{3} kg \int_0^{2\pi} d\theta \end{aligned}$$

La troisième intégrale donne

$$\begin{aligned} M &= 1000\sqrt{3}kg\left[\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= 1000\sqrt{3}kg\left[2\pi\right] \\ &= 2000\pi\sqrt{3}kg \\ &\approx 10\,883kg \end{aligned}$$

b) La hauteur du centre de masse est

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M}\iiint \tilde{\rho} z dV \\ &= \tfrac{1}{M}\iiint \left(1000\tfrac{kg}{m^3}\right) z dV \end{aligned}$$

Puisque $z = r\cos\phi$, on obtient

$$z_{cm} = \tfrac{1}{M}\iiint \left(1000\tfrac{kg}{m^3}\right) r\cos\phi dV$$

Avec les bornes trouvées précédemment, la hauteur du centre de masse est

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{1m.\csc\phi}^{2m}\left(1000\tfrac{kg}{m^3}\right) r\cos\phi r^2\sin\phi drd\phi d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}1000\tfrac{kg}{m^3}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{1m\cdot\csc\phi}^{2m} r^3\sin\phi\cos\phi drd\phi d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale donne

$$\begin{aligned} z_{cm} &= \tfrac{1}{M}1000\tfrac{kg}{m^3}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{3}\sin\phi\cos\phi\right]_{1m\cdot\csc\phi}^{2m} d\phi d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}1000\tfrac{kg}{m^3}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\left[\frac{(2m)^4}{4}\sin\phi\cos\phi\right]-\left[\frac{(1m\csc\phi)^4}{4}\sin\phi\cos\phi\right]\right)d\phi d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}250kgm\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(16\sin\phi\cos\phi-\frac{\sin\phi}{\sin^4\phi}\cos\phi\right)d\phi d\theta \\ &= \tfrac{1}{M}250kgm\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(16\sin\phi\cos\phi-\frac{1}{\sin^3\phi}\cos\phi\right)d\phi d\theta \end{aligned}$$

La deuxième intégrale donne

$$
\begin{aligned}
z_{cm} &= \tfrac{1}{M} 250kgm \int_0^{2\pi} \left[8\sin^2\phi + \frac{1}{2\sin^2\phi} \right]_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \\
&= \tfrac{1}{M} 250kgm \int_0^{2\pi} \left(\left[8\sin^2 \tfrac{\pi}{2} + \frac{1}{2\sin^2 \tfrac{\pi}{2}} \right] - \left[8\sin^2 \tfrac{\pi}{6} + \frac{1}{2\sin^2 \tfrac{\pi}{6}} \right] \right) d\theta \\
&= \tfrac{1}{M} 250kgm \int_0^{2\pi} \left(\left[8 + \tfrac{1}{2} \right] - \left[8 \cdot \tfrac{1}{4} + 2 \right] \right) d\theta \\
&= \tfrac{1}{M} 1125kgm \int_0^{2\pi} d\theta
\end{aligned}
$$

La troisième intégrale donne

$$
\begin{aligned}
z_{cm} &= \tfrac{1}{M} 1125kgm \left[\theta \right]_0^{2\pi} \\
&= \tfrac{1}{M} 2250\pi kgm
\end{aligned}
$$

Si on utilise maintenant la valeur de la masse, on a

$$
\begin{aligned}
z_{cm} &= \frac{2250\pi kgm}{2000\pi\sqrt{3}kg} \\
&= \frac{9}{8\sqrt{3}} m \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{8} m \\
&\approx 0,64951m
\end{aligned}
$$