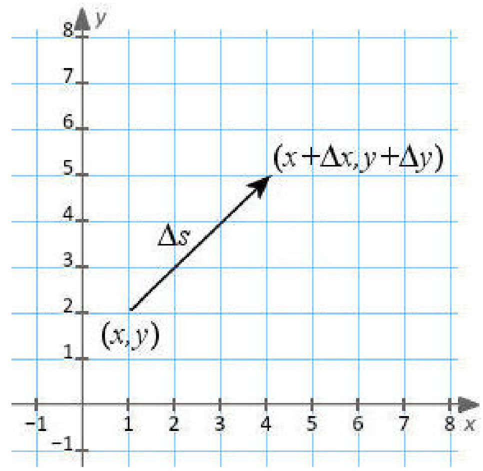
4. Les dérivées et les fonctions de plusieurs variables

1. *Taux de variation moyen d'une fonction*



Imaginons qu'on se déplace d'un point à un autre dans le plan xy du domaine d'une fonction. (Sur la figure, Δx et Δy sont positifs, mais ils pourraient être négatifs.)

En changeant ainsi de position, la valeur de la fonction pourrait changer.

Par exemple, si cette fonction représentait l'altitude du sol, la variation de la fonction serait simplement la variation de hauteur quand on passe d'un point à l'autre. Si cette fonction représentait la température, cette variation de la fonction serait simplement la variation de température quand on passe d'un point à l'autre.

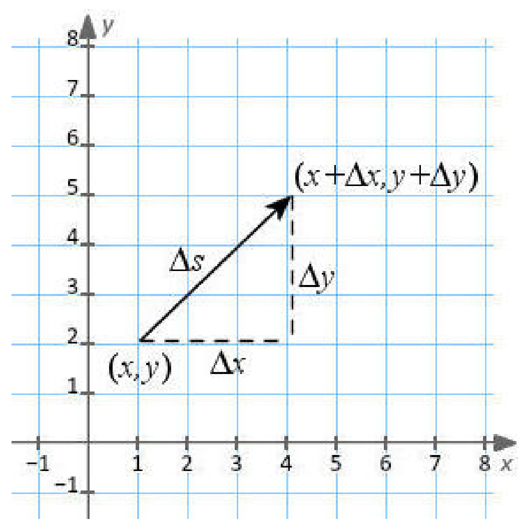
Ici, on veut connaitre le rythme moyen de changement de la fonction. Ce taux moyen est

Taux de variation moyen d'une fonction

$$\frac{\Delta f}{\Delta s}$$

Selon cette figure, cette distance Δs est

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$



Exemple

Quel est le taux de variation moyen de la fonction suivante quand on passe du point (5,2) au point (6,1) ?

$$z = 5x^2 + 4xy - 1$$

Pour trouver le taux, il faut premièrement trouver le changement de la valeur de la fonction. Trouvons premièrement la valeur de la fonction au point (5,2).

$$z = 5(5)^2 + 4(5)(2) - 1 = 164$$

Trouvons ensuite la valeur de la fonction au point (6,1).

$$z = 5(6)^2 + 4(6)(1) - 1 = 203$$

La variation de la fonction est donc

$$\Delta z = 203 - 164 = 39$$

On doit maintenant trouver Δs. Cette distance est

$$\begin{aligned} \Delta s &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Le taux de variation moyen est donc

$$\begin{aligned} \frac{\Delta z}{\Delta s} &= \frac{39}{\sqrt{2}} \\ &= 27,577 \end{aligned}$$

____

Si cette fonction représentait l'altitude du sol en mètres, ce taux de variation indique simplement la variation moyenne de hauteur (en mètre) quand on se déplace de 1 m dans le plan xy. (On comprend qu'on est dans une falaise si l'altitude change de 27,577 m pour un déplacement horizontal de 1 m.)

Si cette fonction représentait la température en degrés Celsius, ce taux de variation indique simplement la variation moyenne de température (en °C) quand on se déplace de 1 m dans le plan xy. Elle dit que quand on passe du point (5,2) au point (6,1), la température change en moyenne au rythme de 27,577 °C par mètre.

Évidemment, ce taux n'est pas le même si on déplace dans une autre direction.

Exemple

Quand on passe du point (5,2) au point (6,2), quel est le taux de variation moyen de la fonction suivante ?

$$z = 5x^2 + 4xy - 1$$

Pour trouver le taux, il faut premièrement trouver le changement de la valeur de la fonction. Trouvons premièrement la valeur de la fonction au point (5,2).

$$z = 5(5)^2 + 4(5)(2) - 1 = 164$$

Trouvons ensuite la valeur de la fonction au point (6,2).

$$z = 5(6)^2 + 4(6)(2) - 1 = 227$$

La variation de la fonction est donc

$$\Delta z = 227 - 164 = 63$$

La distance Δs est

$$\begin{aligned}\Delta s &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= \sqrt{(1)^2 + (0)^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

Le taux de variation moyen est donc

$$\begin{aligned}\frac{\Delta z}{\Delta s} &= \frac{63}{1} \\ &= 63\end{aligned}$$

Dans cette direction, la fonction change encore plus rapidement. Si la fonction représente l'altitude, alors la pente est, en moyenne, encore plus raide. Si elle représente la température, la température change encore plus rapidement quand on se déplace dans cette direction.

SÉRIE D'EXERCICES 1

Calculer le taux de variation moyen des fonctions suivantes entre les points donnés.

1. $z = 2x - 5y + 2$ entre les points (0,0) et (2,3).

2. $z = 5x^2y^2 + 2xy + 5$ entre les points (-1,1) et (1,-1).

3. $z = x^2 + y^2$ entre les points (0,0) et (-1,-1).

2. Taux de variation instantanée d'une fonction

Précédemment, on a calculé le taux de variation moyen. Le taux de 27,577 obtenu indiquait que passant du point (5,2) au point (6,1), la fonction variait <u>en moyenne</u> de 27,577 par unité de déplacement.

Mais ceci est le taux moyen de variation. Peut-être que la fonction varie rapidement au départ pour varier plus lentement par la suite. Peut-être que la fonction diminue au départ pour ensuite monter très rapidement.

Pour obtenir le taux de variation instantanée de la fonction dans une direction à un point en particulier, on doit approcher le deuxième point ($x + \Delta x$, $y + \Delta y$) du point de départ (x,y) pour éviter que le taux de variation puisse changer entre les deux points. Plus ce deuxième point sera près, plus on aura un taux de variation qui représente fidèlement le taux de variation au point (x,y) dans cette direction.

Pour être certain d'avoir un deuxième point très près, on va calculer le taux de variation instantanée avec

Taux de variation instantanée d'une fonction

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta s}$$

Mais avant d'arriver à faire ce calcul, on va examiner ce qui se passe si on varie uniquement x ou y.

3. Taux de variation instantanée en x ou en y d'une fonction

Calcul à partir de la définition

On va examiner ce qui se passe si seulement x varie et on pourra ensuite déduire facilement, à partir de nos résultats, ce qui arrive si seulement y varie.

On a premièrement la variation de la fonction si la valeur de x change. Cette variation est

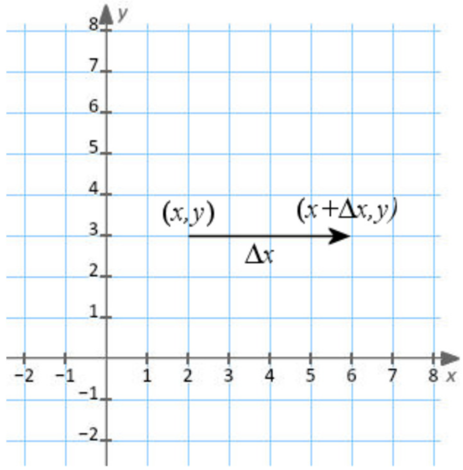
$$\Delta_x f = f\left(x+\Delta x, y\right) - f\left(x, y\right)$$

Alors, le taux de variation moyen en x de la fonction est

$$\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \frac{f\left(x+\Delta x, y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta x}$$

et le taux de variation instantané est

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x+\Delta x, y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta x}$$



Voici comment on peut faire ces calculs pour une fonction.

Exemple

Considérez la fonction suivante.

$$f = 5x^2 + 4xy - 1$$

a) Quelle est la variation $\Delta_x f$ de la fonction ?

La variation en x est

$$\begin{aligned}\Delta_x f &= \left[5\left(x+\Delta x\right)^2 + 4\left(x+\Delta x\right)y - 1\right] - \left[5x^2 + 4xy - 1\right]\\ &= \left[5x^2 + 10x\Delta x + 5\left(\Delta x\right)^2 + 4xy + 4\Delta xy - 1\right] - \left[5x^2 + 4xy - 1\right]\\ &= 10x\Delta x + 5\left(\Delta x\right)^2 + 4\Delta xy\end{aligned}$$

b) Quel est le taux de variation moyen en x ?

Le taux est

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_x f}{\Delta x} &= \frac{10x\Delta x + 5\left(\Delta x\right)^2 + 4\Delta xy}{\Delta x}\\ &= 10x + 5\Delta x + 4y\end{aligned}$$

c) Quel est le taux de variation instantanée en x ?

Le taux instantané est

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(10x + 5\Delta x + 4y\right)$$
$$= 10x + 4y$$

SÉRIE D'EXERCICES 2

Pour les fonctions suivantes, calculez $\Delta_x f$, $\Delta_y f$, $\frac{\Delta_x f}{\Delta x}$, $\frac{\Delta_y f}{\Delta y}$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}$ et $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}$

1. $f = 6x^2 + 3xy + y^2$

2. $f = x^3 y^2$

3. $f = \sin\left(x + y\right)$

(Indice : utiliser $\sin\left(A + B\right) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$)

Les dérivées partielles

Le calcul avec les variations et la limite sont un peu longs et il est possible de le faire beaucoup plus rapidement avec le résultat suivant :

> *Calculer le taux instantané de variation en x d'une fonction revient à faire la dérivée en considérant x comme la variable et y comme une constante. On dit alors qu'on fait la dérivée partielle par rapport à x.*

Pour illustrer cela, prenons la fonction utilisée au dernier exemple ($f = 5x^2 + 4xy - 1$). On sait que pour cette fonction, le taux de variation instantanée est $10x + 4y$. Voyons ce qu'on obtient si on fait la dérivée en considérant *y* comme une constante.

Le premier terme est $5x^2$. La dérivée de ce terme est $10x$.

Le deuxième terme est $4xy$. C'est la même chose que $(4y)x$. La dérivée de ce terme est $4y$. (N'oubliez pas que y est considérée comme une constante.)

Le troisième terme est -1. La dérivée de ce terme est 0.

Le résultat global est $10x + 4y$. C'est bien ce qu'on avait obtenu.

Voici les notations qui seront employées.

Quand on varie seulement x, on a

Dérivée partielle par rapport à x

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = f'_x$$

Quand on varie seulement y, on a

Dérivée partielle par rapport à y

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \partial_y f = f'_y$$

Exemple

Considérez la fonction suivante.

$$z = x^2 \sin y$$

a) Quelle est $\frac{\partial z}{\partial x}$?

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y$$

b) Quelle est $\frac{\partial z}{\partial y}$?

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y$$

____

Exemple

Considérez la fonction suivante.

$$z = x^y$$

a) Quelle est $\frac{\partial z}{\partial x}$?

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$$

b) Quelle est $\frac{\partial z}{\partial y}$?

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$$

SÉRIE D'EXERCICES 3

Calculez les dérivées partielles des fonctions suivantes.

1. $z = 2x^4y^3 - xy^2 + 3y + 7$

2. $z = \left(x^2 + y^2\right)^4$

3. $z = x\sin\left(\frac{x}{y}\right)$

4. $z = \sqrt{4 - xy}\sin\left(\frac{x}{y}\right)$

5. $z = \arcsin(uv) + \arccos\left(u^2v^2\right)$

6. $v = \cosh^2\left(\frac{r}{s}\right)$

7. $z = e^{xy}\ln(xy)$

8. $f = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

9. $h = \ln(rst)$

10. $p = \operatorname{artanh}(3u + 2v)$

11. Montrez que les fonctions

$$u = \cos x \cosh y + \sin x \sinh y \qquad \text{et} \qquad v = \cos x \cosh y - \sin x \sinh y$$

satisfont les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

12. Pour calculer la température dans le sol à l'heure t et à la profondeur x, les ingénieurs utilisent la formule suivante.

$$T = T_0 + Ae^{-\lambda x}\sin\left(\tfrac{2\pi}{24h}t - \lambda x + \pi\right)$$

où T_0, A et λ sont des constantes. Ici, on va prendre T_0 = 20 °C, A = 10 °C et λ = 0,4 m^{-1}. Le t = 0 est à minuit. (La valeur à l'intérieur du sinus est en radians.)

a) Calculer $\partial T / \partial t$ à 9 h le matin à une profondeur de 2 m. Que signifie ce résultat ?
b) Calculer $\partial T / \partial x$ à 9 h le matin à une profondeur de 2 m. Que signifie ce résultat ?

Notation pour les dérivées secondes

On peut dériver une fonction plusieurs fois. Nous allons utiliser les notations suivantes pour les dérivées secondes.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\partial_{xx} f = f''_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\partial_{yx} f = f''_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=\partial_{xy} f = f''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\partial_{yy} f = f''_{yy}$$

Le théorème de Schwarz

Le théorème de Schwarz (aussi connu sous les noms de théorème de Clairaut et de théorème de Young) affirme que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Cela signifie simplement que l'ordre de dérivation n'a pas d'importance quand on dérive par rapport à x et y.

Ce théorème fut prouvé par plusieurs personnes, dont Euler au début du 18^{e} siècle, Clairaut (1740), Lagrange (1797), Cauchy (1823). Toutefois, Ernst Leonard Lindelöf montra en 1867 que toutes ces preuves avaient des lacunes. C'est donc Herman Schwarz qui fit une première preuve rigoureuse en 1873. Considérant qu'il fallut près de 150 ans pour que les mathématiciens arrivent à une preuve sans lacune, on se doute que le niveau de la preuve de ce théorème va bien au-delà d'un cours collégial.

Voyons si on obtient effectivement la même réponse si on change l'ordre de dérivation pour une fonction.

Exemple

Soit la fonction $z = x^2 y + y^2$.

a) Calculez $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2x$$

b) Calculez $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2x$$

SÉRIE D'EXERCICES 4

Pour chacune de ces fonctions, calculez $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ et $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1. $z = xy^4 - x^2y^2 + 3y^2 + 7$

2. $z = \dfrac{x^2}{x+y}$

3. $z = \dfrac{\cos x}{y^2}$

4. $z = x\sinh(xy)$

5. Calculer $\dfrac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y}$ pour la fonction $f = xy + e^{xy} + \ln xy$

6. Montrer que l'équation suivante (l'équation des ondes stationnaires sur une corde)

$$y = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$$

satisfait l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

7. Montrer que les équations de la forme

$$w = (\sin ax)(\cos by)e^{-\sqrt{a^2+b^2}z}$$

satisfont l'équation de Laplace en trois dimensions

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0$$

4. La différentielle totale (df)

Calcul de la différentielle totale

Revenons à notre objectif. On veut calculer le taux de variation instantané d'une fonction si x et y varient, pas seulement si x ou y varie. On veut donc

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta s}$$

Par définition, cette limite est

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta s}=\frac{df}{ds}$$

On va commencer par calculer ce que vaut df, qui s'appelle la différentielle totale.

$$\begin{aligned}
df &= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)\right)\\
&= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\right)\\
&= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)\right)+\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\right)\\
&= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)}{\Delta x}\Delta x+\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\Delta y
\end{aligned}$$

Dans le premier terme, on reconnait la définition de la dérivée partielle par rapport à x et dans le deuxième terme, on reconnait la définition de la dérivée partielle par rapport à y. On a donc

$$\begin{aligned}
df &= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[\frac{\Delta_x f}{\Delta x}\right]_{y+\Delta y}\Delta x+\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[\frac{\Delta_y f}{\Delta y}\right]_{x}\Delta y\\
&=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy
\end{aligned}$$

Ce qui donne

Différentielle totale d'une fonction

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

SÉRIE D'EXERCICES 5

Calculer la différentielle totale des fonctions suivantes.

1. $z = 8x^2y^3 - 4xy^3 + 3xy^2 + 10$

2. $z = \dfrac{x}{x+y}$

3. $z = \dfrac{\cos xy}{xy^2}$

4. $z = \sqrt{\tanh\left(x^2y^2\right)}$

Utilisation de la différentielle totale pour approximer de la variation d'une fonction

La différentielle totale donne la variation d'une fonction pour des changements infinitésimaux des variables de la fonction. Cette formule peut être utilisée pour approximer la variation d'une fonction pour des petits changements des variables.

Approximation de la variation d'une fonction

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

Plus les Δx et Δy (ou autres variables) sont petits, plus l'approximation est meilleure.

Exemple

Utilisez la formule de l'approximation de la variation d'une fonction pour calculer la variation de l'aire d'un rectangle si la longueur passe de w = 5 m à w = 5,05 m et si la hauteur passe de h = 3 m à h = 3,02 m.

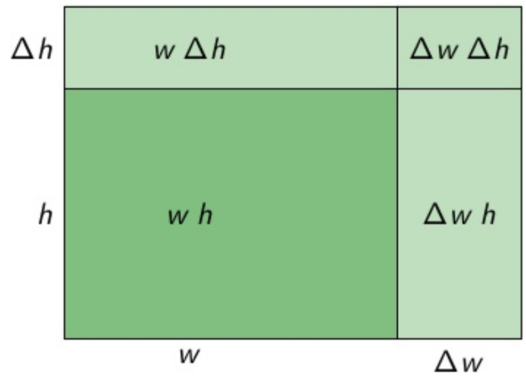
Puisque l'aire est

$$A = wh$$

La variation de l'aire est

$$\Delta A \approx \frac{\partial A}{\partial w}\Delta w + \frac{\partial A}{\partial h}\Delta h$$
$$\Delta A \approx \frac{\partial(wh)}{\partial w}\Delta w + \frac{\partial(wh)}{\partial h}\Delta h$$
$$\Delta A \approx h\Delta w + w\Delta h$$

Voici l'interprétation graphique de ce résultat.



www.slideshare.net/leingang/lesson-12-the-product-and-quotient-rule

L'aire en vert foncé est l'aire initiale. L'aire en vert pâle est l'aire qui s'ajoute quand on change la longueur des côtés.

On voit que notre premier terme ($h\Delta w$) est l'aire du rectangle qui s'ajoute à droite.

On voit que notre deuxième terme ($w\Delta h$) est l'aire du rectangle qui s'ajoute au-dessus.

Il nous manque l'aire du petit rectangle en haut à droite. C'est cette partie qu'il manque dans notre approximation. Toutefois, si les Δw et Δh sont petits, cette aire sera vraiment petite et notre approximation sera relativement précise.

Avec les valeurs données, la variation de l'aire est

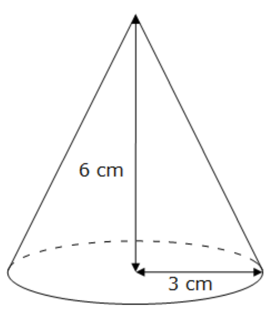
$$\begin{aligned}\Delta A &\approx h\Delta w + w\Delta h \\ &\approx 3m\cdot 0{,}05m + 5m\cdot 0{,}02m \\ &\approx 0{,}25m^2\end{aligned}$$

(La véritable variation est 0,251 m².)

Exemple

Le volume d'un cône est donné par

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



où r est le rayon de la base et h est la hauteur. Considérons un cône dont la base a un rayon de 3 cm et une hauteur de 6 cm. On peut alors calculer que le volume de ce cône est 56,55 cm³.

Utiliser notre formule de l'approximation de la variation pour déterminer de combien augmente le volume du cône si le rayon de la base augmente de 0,1 cm et si la hauteur diminue de 0,05 cm.

La variation du volume est

$$\Delta V \approx \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}\Delta h$$
$$\Delta V \approx \frac{2}{3}\pi rh\Delta r + \frac{1}{3}\pi r^2\Delta h$$
$$\Delta V \approx \frac{2}{3}\pi(3cm)(6cm)(0,1cm) + \frac{1}{3}\pi(3cm)^2(-0,05cm)$$
$$\Delta V \approx 3,77cm^3 + -0,47cm^3$$
$$\Delta V \approx 3,30cm^3$$

(La véritable variation est 3,33 cm³.)

____

SÉRIE D'EXERCICES 6

En approximant avec la différentielle totale, trouver la variation des fonctions suivantes.

1. $z = x^2y^3 - 4x^2y^2 + 3xy + 7x$ de (2, 3) à (2,002, 2,997)

2. $z = \sinh\sqrt{2x+3y}$ de (3, 1) à (3,01, 1,02)

3. $w = xy + xz + yz$ de (1, 1, 1) à (0,99, 1,03, 0,97)

4. La vitesse d'une onde dans une corde est donnée par la formule suivante.

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

où F_T est la tension de la corde et μ est la masse linéique (en kg/m) de la corde.

On a une corde dont la tension est de 500 N et la masse linéique est de 40 g/m. Juste à côté de cette corde, il y a une autre corde qui a une tension de 498 N et une masse linéique de 41 g/m. Utilisez la différentielle totale pour estimer la différence de vitesse des ondes entre ces deux cordes.

5. La pression d'un gaz est donnée par

$$P = \frac{nRT}{V}$$

où n est le nombre de moles, R est la constante des gaz parfaits (8,31 J/mol K), T est la température et V est le volume.

Initialement, il y a 5 moles de gaz à 300 K dans un volume de 2,5 m³. En utilisant la différentielle totale, approximer la variation de pression si on ajoute 0,01 mole, qu'on refroidit le gaz de 1 °C et qu'on augmente le volume de 0,03 m³.

Utilisation de la différentielle totale pour calculer les incertitudes

Quand on calcule l'incertitude d'une fonction, on veut justement connaitre la variation d'une fonction si les variables de la fonction varient. Supposons, par exemple, qu'on veut calculer l'incertitude de la fonction $f = x^2y$ si x = 2,34 ± 0,02 et y = 5,35 ± 0,05. On veut alors savoir la valeur maximale et minimale de la fonction si x varie de 0,02 et y varie de 0,05.

La variation de la fonction peut alors être approximée par

$$\Delta f \approx \pm\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \pm\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

Pour avoir la plus grande variation de la fonction, on choisit les signes positifs pour tous termes. On a alors

$$\Delta f \approx \left|\pm\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\pm\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right|$$

En prenant comme convention qu'on va utiliser des Δx et Δy positifs. On aura alors

Calcul d'incertitude

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y$$

Plus les Δx et Δy (ou autres variables) sont petits, plus l'approximation est meilleure.

Exemple

La période d'un pendule est donnée par

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

où l est la longueur de la corde et g est l'accélération gravitationnelle. Quelle est l'incertitude sur la période si l = 126,6 ± 0,3 cm et g = 9,81 ± 0,01 m/s².

L'incertitude est

$$\begin{aligned}
\Delta T &= \left|\frac{\partial T}{\partial l}\right|\Delta l + \left|\frac{\partial T}{\partial g}\right|\Delta g \\
&= \left|\frac{\partial\left(2\pi l^{1/2} g^{-1/2}\right)}{\partial l}\right|\Delta l + \left|\frac{\partial\left(2\pi l^{1/2} g^{-1/2}\right)}{\partial g}\right|\Delta g \\
&= \left|2\pi \frac{1}{2} l^{-1/2} g^{-1/2}\right|\Delta l + \left|2\pi\left(\frac{-1}{2}\right) l^{1/2} g^{-3/2}\right|\Delta g \\
&= \left|\pi l^{-1/2} g^{-1/2}\right|\Delta l + \left|\pi l^{1/2} g^{-3/2}\right|\Delta g \\
&= \left|\pi (1,266m)^{-1/2} \left(9,81\tfrac{m}{s^2}\right)^{-1/2}\right| \cdot 0,003m + \left|\pi (1,266m)^{1/2} \left(9,81\tfrac{m}{s^2}\right)^{-3/2}\right| \cdot 0,01\tfrac{m}{s^2} \\
&= 0,00267s + 0,00115s \\
&= 0,00382s
\end{aligned}$$

SÉRIE D'EXERCICES 7

1. On a mesuré la longueur des deux côtés adjacents à l'angle droit d'un triangle rectangle et on a obtenu 6,78 ± 0,05 cm et 11, 96 ± 0,10 cm.

a) Quelles sont les grandeurs de l'hypoténuse et de l'incertitude de l'hypoténuse ?
b) Quelles sont les valeurs de l'angle entre le côté de 6,78 cm et l'hypoténuse et de l'incertitude de cet angle ?
c) Quelles sont les valeurs de l'aire du triangle et de l'incertitude sur l'aire du triangle ?

2. Trois résistors en parallèle ont des résistances de 100 Ω ± 1 Ω, 200 Ω ± 2 Ω et 300 Ω ± 3 Ω. Quelles sont les valeurs de la résistance équivalente et de l'incertitude sur la résistance équivalente si cette résistance équivalente est calculée avec la formule suivante ?

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

5. La dérivée directionnelle

Formule de la dérivée directionnelle

Avec la différentielle totale, on peut maintenant calculer le taux de variation instantanée.

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta s} = \frac{df}{ds}$$

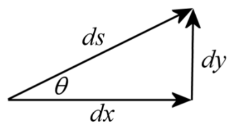
Avec la différentielle totale obtenue précédemment

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

on a

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds}$$

Mais quand on se déplace dans la direction ds, on a



$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\theta$$

On a donc

Dérivée directionnelle

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin\theta$$

Cette dérivée, dont la valeur dépend dans quelle direction on se déplace dans le plan xy¸ s’appelle la dérivée directionnelle.

Exemple

Supposons que la température (en kelvin) d’une plaque dans le plan xy est donnée par la fonction suivante.

$$T = \frac{1}{20 \frac{m^2}{K}} x^2 + \frac{1}{10 \frac{m^2}{K}} y^2 + 200K$$

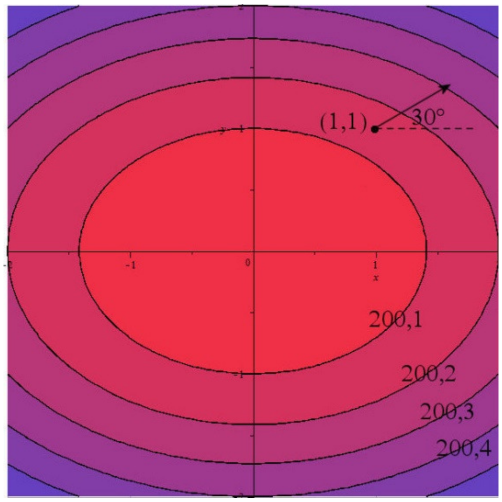
Quel est le taux de variation de cette température si on se déplace dans la direction θ = 30° à partir du point (1 m, 1 m) ?

La dérivée directionnelle est

$$\begin{aligned}\frac{dT}{ds} &= \frac{\partial T}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial T}{\partial y}\sin\theta \\ &= \left(\frac{1}{10\frac{m^2}{K}}x\right)\cos\theta + \left(\frac{1}{5\frac{m^2}{K}}y\right)\sin\theta\end{aligned}$$

Au point (1 m, 1 m) dans la direction θ = 30°, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{dT}{ds} &= \left(\frac{1}{10\frac{m^2}{K}}1m\right)\cos 30° + \left(\frac{1}{5\frac{m^2}{K}}1m\right)\sin 30° \\ &= \frac{\sqrt{3}}{20}\tfrac{K}{m} + 0{,}1\tfrac{K}{m} \\ &= 0{,}1866\tfrac{K}{m}\end{aligned}$$



Cela signifie que la température augmente au rythme de 0,1866 K par mètre au point (1,1) quand on se déplace dans cette direction. La figure ci-contre montre que la température augmente dans cette direction.

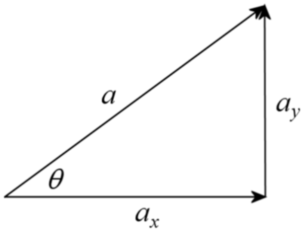
(Notez qu'avec une fonction représentant la température, les courbes de niveau peuvent aussi s'appeler les *isothermes.*

____

Pour indiquer la direction, on peut aussi utiliser un vecteur. Disons que ce vecteur est $\vec{a}$.

Comme le cosinus est égal au côté adjacent divisé par l'hypoténuse, on a

$$\cos\theta = \frac{a_x}{a}$$



Comme le sinus est égal au côté opposé divisé par l'hypoténuse, on a

$$\sin\theta = \frac{a_y}{a}$$

On obtient alors

Dérivée directionnelle (direction donnée par le vecteur a)

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{a_x}{a} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{a_y}{a}$$

Si le vecteur est un vecteur unitaire (qu'on va noter $\vec{b}$), on a

Dérivée directionnelle (direction donnée par le vecteur unitaire *b*)

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} b_x + \frac{\partial f}{\partial y} b_y$$

Exemple

Supposons que la température (en kelvin) d'une plaque dans le plan xy est donnée par la fonction suivante.

$$T = \frac{1}{20\frac{m^2}{K}} x^2 + \frac{1}{10\frac{m^2}{K}} y^2 + 200K$$

Quel est le taux de variation de cette température si on se déplace dans la direction du vecteur $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ à partir du point (1 m, 1 m) ?

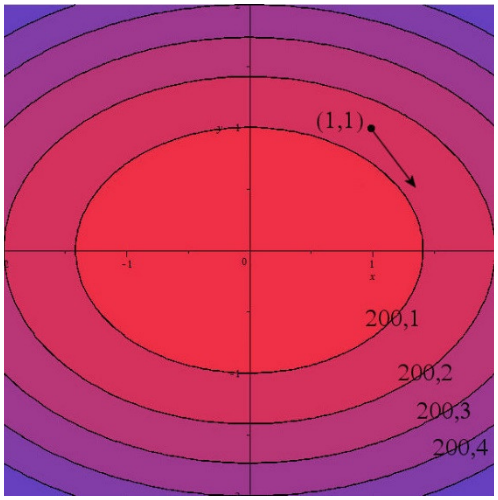
La dérivée directionnelle au point (1 m, 1 m) dans cette direction est

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= \frac{\partial T}{\partial x}\frac{a_x}{a} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{a_y}{a} \\ &= \left(\frac{1}{10\frac{m^2}{K}} x\right)\frac{a_x}{a} + \left(\frac{1}{5\frac{m^2}{K}} y\right)\frac{a_y}{a} \end{aligned}$$

Au point (1 m, 1 m) dans la direction donnée, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= \left(\frac{1}{10\frac{m^2}{K}} 1m\right)\frac{3}{5} + \left(\frac{1}{5\frac{m^2}{K}} 1m\right)\left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{3}{50}\frac{K}{m} - \frac{4}{25}\frac{K}{m} \\ &= -0{,}1\frac{K}{m} \end{aligned}$$

Cela signifie que la température diminue au rythme de 0,1 K par mètre au point (1,1) quand on se déplace dans cette direction. La figure ci-contre montre que la température augmente dans cette direction.



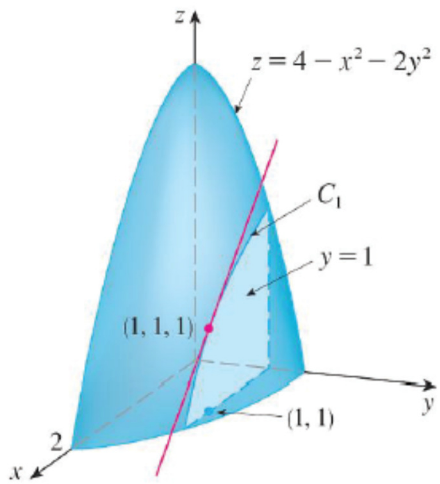
Interprétation des dérivées partielles

Si on se déplace dans la direction de l'axe des x positifs, l'angle est θ = 0°. On a alors

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos 0° + \frac{\partial f}{\partial y}\sin 0°$$
$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Cela signifie que la dérivée partielle par rapport à x est le taux de variation si on se déplace vers les x positifs.

Sur le graphique d'une surface, cela signifie que $\partial f / \partial x$ est la pente d'une droite tangente au point et qui est dans la direction de l'axe des x. Sur cette figure, c'est la pente de la ligne rouge C_1.



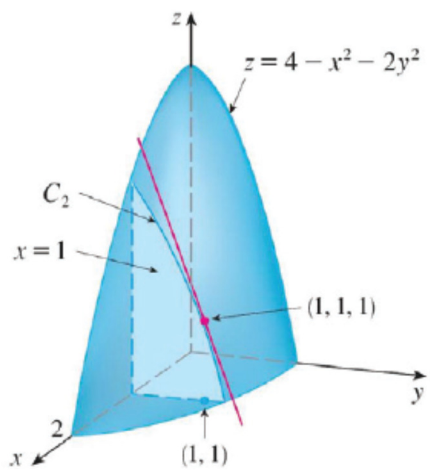
www.tkiryl.com/UT/M408M%20Multivariable%20Calculus/Section%2014.3-Partial%20Derivatives/Partial%20Derivatives.pdf

Si on se déplace dans la direction de l'axe des y positifs, l'angle est θ = 90°. On a alors

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos 90° + \frac{\partial f}{\partial y}\sin 90°$$
$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Cela signifie que la dérivée partielle par rapport à y est le taux de variation si on se déplace vers les y positifs.

Sur le graphique d'une surface, cela signifie que $\partial f / \partial y$ est la pente d'une droite tangente au point et qui est dans la direction de l'axe des y. Sur cette figure, c'est la pente de la ligne rouge C_2.



www.tkiryl.com/UT/M408M%20Multivariable%20Calculus/Section%2014.3-Partial%20Derivatives/Partial%20Derivatives.pdf

SÉRIE D'EXERCICES 8

Quel est le taux de variation des fonctions suivantes ?

1. $z = 5x\sinh y$ au point (1,1) dans la direction θ = 45°

2. $f = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ au point (2,1) dans la direction θ = 135°

3. $f = \dfrac{x^2 + y^2}{x + y}$ au point (0,1) dans la direction θ = 180°

4. $f = x^4 y + 5xy^2 + 4x + 5y + 3$ au point (0,0) dans la direction donnée par $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$

5. $f = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x + y}$ au point (-1,-1) dans la direction donnée par $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$

6. $f = \cosh(xy)$ au point (3,-1) dans la direction donnée par $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

7. La profondeur d'un lac est donnée par la fonction suivante.

$$P = 100m - 0,01m^{-1}x^2 - 0,04m^{-1}y^2$$

Un pêcheur se déplace en chaloupe à la surface du lac. Sur son échosondeur, il peut voir la profondeur du lac. À quel rythme change la profondeur dans les situations suivantes ?

a) Il se déplace vers le nord quand il est au point (10 m, 10 m).
b) Il se déplace vers le sud-est quand il est au point (-20 m, 10 m).

8. L'altitude du sol dans une région est donnée par la fonction

$$h = 100m + 100m\cos\left(\frac{x^2 + y^2}{(500m)^2}\right)$$ (On travaille en rad)

Un marcheur très fatigué est au point (200 m, 400 m).

a) Quelle est l'altitude à cet endroit ?
b) Quelle est la pente du sol s'il marche vers le sud ?
c) Dans quelles directions doit-il marcher pour rester à la même altitude ? (Dans ce cas, il marche en suivant la courbe de niveau.) Il y a deux réponses possibles. Donnez l'angle entre les directions et le nord, en degrés.

6. Le gradient

Un produit scalaire

Quand la direction est donnée par un vecteur unitaire, nous avons obtenu la forme suivante pour notre dérivée directionnelle.

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} b_x + \frac{\partial f}{\partial y} b_y$$

Sous cette forme, la dérivée directionnelle ressemble étrangement à un produit scalaire entre 2 vecteurs qui sont

$$\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$$

$$b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$$

Le deuxième vecteur est le vecteur unitaire donnant la direction. Par contre, c'est la première fois qu'on rencontre le premier vecteur. Ce vecteur porte le nom de gradient.

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$$

Avec ce vecteur, la dérivée directionnelle peut s'écrire ainsi.

$$\frac{df}{ds} = \text{grad } f \cdot \vec{b}$$

L'opérateur $\vec{\nabla}$

Quand on applique un opérateur à une fonction, on obtient quelque chose d'autre (ce peut être une autre fonction, un vecteur, une matrice, etc…) Par exemple, il existe un opérateur (l'opérateur différentiel) qui transforme une fonction en la dérivée de la fonction.

Ici, on va travailler avec un opérateur qui transforme une fonction en vecteur. Cet opérateur est appelé *del* ou *nabla* et il est noté $\vec{\nabla}$. Cet opérateur est

Opérateur del $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}$$

Par exemple, on pourrait appliquer cet opérateur à la fonction $f = 3x^3 + 2xy^2$. Le résultat est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} \\ &= \frac{\partial \left(3x^3 + 2xy^2\right)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \left(3x^3 + 2xy^2\right)}{\partial y} \vec{j} \\ &= \left(9x^2 + 2y^2\right) \vec{i} + 4xy\vec{j}\end{aligned}$$

On voit que cet opérateur a transformé une fonction en quelque chose d'autre (un vecteur dans ce cas).

Notez qu'on peut facilement imaginer ce que devient cet opérateur si on a une fonction de plus de deux variables. Par exemple, pour une fonction qui dépend des trois variables x, y et z, l'opérateur est

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Avec cet opérateur, le gradient est

Gradient d'une fonction

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f$$

Ainsi, la dérivée directionnelle est

Dérivée directionnelle (direction donnée par le vecteur unitaire *b*)

$$\frac{df}{ds} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{b} = \text{grad } f \cdot \vec{b}$$

(Notez que ce résultat est toujours valide, peu importe le nombre de variables dans la fonction.)

Exemple

Supposons que la température (en kelvin) dans une pièce est donnée par la fonction suivante.

$$T = \frac{1}{20\frac{m^2}{K}}x^2 + \frac{1}{10\frac{m^2}{K}}y^2 + \frac{1}{40\frac{m^2}{K}}z^2 + 200K$$

Quel est le taux de variation de cette température si on se déplace dans la direction du vecteur $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ à partir du point (2 m, 1 m, 5 m) ?

Commençons par le gradient de cette fonction. Comme on a une fonction de 3 variables, le gradient est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} T &= \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k} \\ &= \frac{1}{10\frac{m^2}{K}}x\vec{i} + \frac{1}{5\frac{m^2}{K}}y\vec{j} + \frac{1}{20\frac{m^2}{K}}z\vec{k}\end{aligned}$$

Au point (2 m, 1 m, 5 m), le gradient est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}T &= \frac{1}{10\frac{m^2}{K}}(2m)\vec{i} + \frac{1}{5\frac{m^2}{K}}(1m)\vec{j} + \frac{1}{20\frac{m^2}{K}}(5m)\vec{k} \\ &= \frac{1}{5\frac{m}{K}}\vec{i} + \frac{1}{5\frac{m}{K}}\vec{j} + \frac{1}{4\frac{m}{K}}\vec{k}\end{aligned}$$

Trouvons maintenant le vecteur unitaire donnant la direction. Comme le vecteur a a une longueur de $\sqrt{6}$, le vecteur unitaire b est

$$\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}$$

Ainsi, la dérivée directionnelle au point (2 m, 1 m, 5 m), dans cette direction est

$$\begin{aligned}\frac{dT}{ds} &= \vec{\nabla}T \cdot \vec{b} \\ &= \left(\frac{1}{5\frac{m}{K}}\vec{i} + \frac{1}{5\frac{m}{K}}\vec{j} + \frac{1}{4\frac{m}{K}}\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}\right) \\ &= \frac{1}{5\frac{m}{K}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{5\frac{m}{K}}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{4\frac{m}{K}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} \\ &= \left(\frac{1}{5\frac{m}{K}} - \frac{2}{5\frac{m}{K}} + \frac{1}{4\frac{m}{K}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} \\ &= \left(\frac{1}{20\frac{m}{K}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} \\ &= 0,0204\,\frac{K}{m}\end{aligned}$$

____

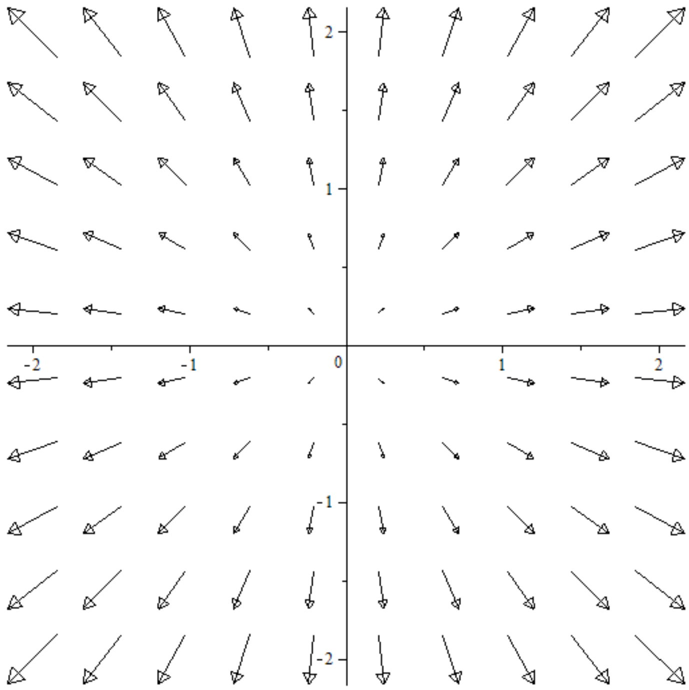
Représentation du gradient

Le gradient est un vecteur dont les composantes varient d'un point à l'autre. Par exemple le gradient de la fonction $z = x^2 + y^2$ est

$$\vec{\nabla}z = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$$

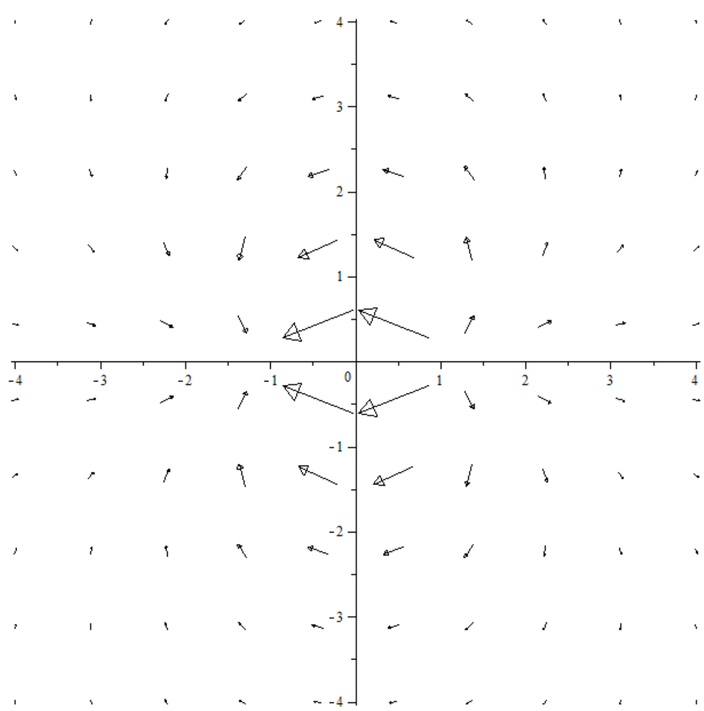
Ainsi, au point (1,1), le gradient est $\vec{\nabla}z = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ alors qu'au point (-2,2) le gradient est $\vec{\nabla}z = -2\vec{i} + 4\vec{j}$. On voit que selon la valeur de x et y, on obtient des vecteurs différents.

Voici un plan cartésien montrant la direction et la grandeur de ce vecteur pour quelques endroits dans le plan xy.



Voici un autre un peu plus compliqué montrant la direction et la grandeur de ce vecteur gradient pour quelques endroits dans le plan xy pour cette autre fonction.

$$z = \frac{-10x}{x^2 + y^2 + 1}$$



Quand on a un vecteur qui peut ainsi changer d'une position à l'autre, on a affaire à un champ de vecteur ou un champ vectoriel.

SÉRIE D'EXERCICES 9

Quel est le gradient des fonctions suivantes au point indiqué ?

1. $z = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$ au point (1,1)

2. $f = \dfrac{\cosh\left(x^2 + y^2\right)}{\sinh\left(x+y\right)}$ au point (1,0)

3. $f = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$ au point (2,4)

4. $w = xye^z$ au point (2, 3, 0)

5. Calculer la dérivée directionnelle de la fonction $w = (x+y)(y+z)$ au point (5, 7, 1) dans la direction donnée par le vecteur $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

7. L'utilité du gradient

Le gradient est un concept très utile. Voici seulement quelques-unes de ces utilités.

1) Le gradient donne le taux de variation dans la direction pour laquelle la dérivée directionnelle est maximale.

La dérivée directionnelle est un produit scalaire. Cela veut dire que sa valeur est aussi donnée par

$$\frac{df}{ds} = \left|\vec{\nabla} f\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\gamma$$

où γ est l'angle entre le vecteur gradient et le vecteur direction. Comme la grandeur du vecteur unitaire est de 1, on a

$$\frac{df}{ds} = \left|\vec{\nabla} f\right| \cdot \cos\gamma$$

On voit que la grandeur de la dérivée directionnelle change selon l'angle. Or, on a la valeur la plus grande possible de la dérivée directionnelle si le cosinus vaut 1. On a alors

$$\frac{df}{ds}_{\max} = \left|\vec{\nabla} f\right|$$

La grandeur du vecteur gradient donne la valeur maximale de la dérivée directionnelle

De plus, si le cosinus est 1, c'est que l'angle entre les vecteurs est 0°. Si l'angle est nul, c'est que le vecteur de la direction est dans la même grandeur que le gradient. On arrive donc à la conclusion suivante.

La direction du gradient est la direction pour laquelle la dérivée directionnelle est maximale

La formule

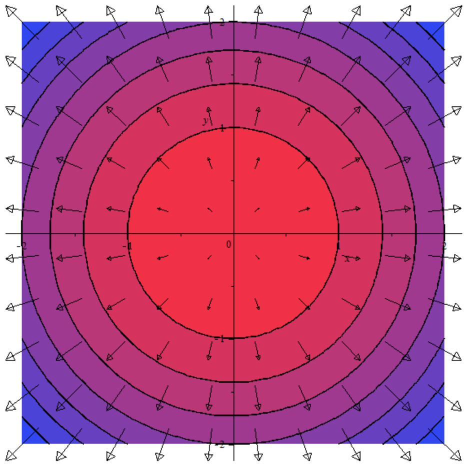
$$\frac{df}{ds} = \left|\vec{\nabla} f\right| \cdot \cos\gamma$$

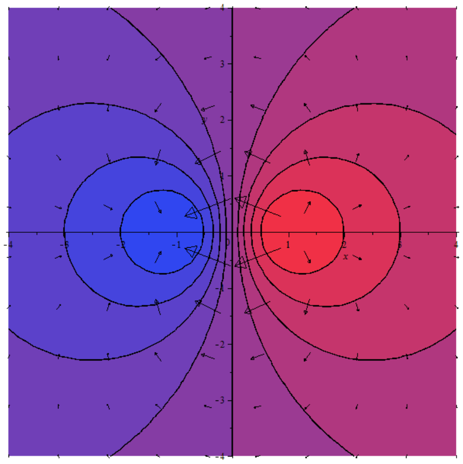
permet aussi de constater que la dérivée directionnelle est nulle dans une direction perpendiculaire au gradient. Cela signifie que la fonction ne varie pas dans une direction perpendiculaire au gradient.

Mais si la fonction ne varie pas dans cette direction, c'est qu'on a une ligne de niveau (on se rappelle que ces lignes indiquent les endroits où la fonction a toujours la même valeur. On arrive donc à la conclusion suivante.

Le vecteur gradient est toujours perpendiculaire aux lignes de niveau.

Par exemple, voici un graphique montrant les courbes de niveau et les vecteurs gradient à différents endroits pour la fonction $f = x^2 + y^2$.





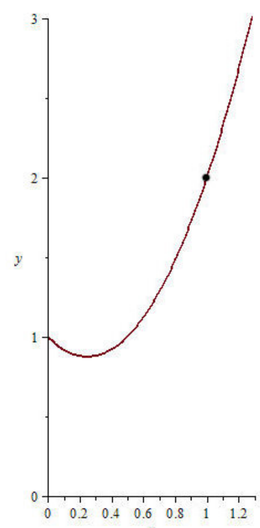
Voici la même représentation pour une autre fonction.

$$z = \frac{-10x}{x^2 + y^2 + 1}$$

On voit très bien que les vecteurs gradient sont toujours perpendiculaires aux courbes de niveau et que les vecteurs gradient pointent toujours dans la direction vers laquelle la fonction augmente. (Code de couleur de ces graphiques : bleu = grande valeur et rouge = petite valeur. Si vous ne pouvez pas voir les couleurs, tout le côté droit est de teinte rouge et tout le côté gauche est de teinte bleue.)

Quand les lignes de niveau sont très près les unes des autres, c'est que la fonction change rapidement. Cela se remarque aussi par le fait que le gradient, qui mesure la valeur maximale du taux de changement) est aussi plus grand. Voyez comme le gradient est plus grand quand les lignes de niveau sont plus près les unes des autres.

2) Le gradient permet d'obtenir un vecteur normal à une courbe ou une surface.

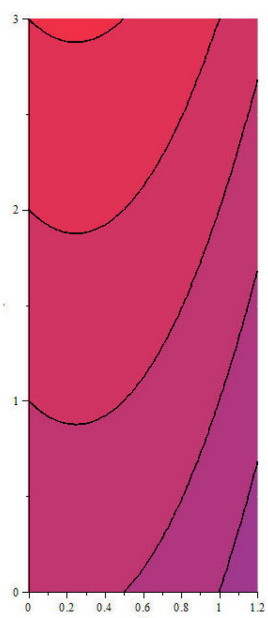


Supposons qu'un veut trouver un vecteur normal à la fonction $y = 2x^2 - x + 1$ au point (1,2).
Il y a plusieurs façons d'y arriver, mais on se dit qu'on pourrait probablement trouver la réponse avec le gradient puisque ce dernier est perpendiculaire aux courbes de niveau.

Mais pour que cela fonctionne, il faut que notre fonction d'une seule variable devienne une courbe de niveau d'une fonction de deux variables.

En fait, cette fonction est la courbe de niveau pour *z* = 0 de la fonction

$$z = 2x^2 - x + 1 - y$$



Voyons les courbes de niveau de cette fonction de 2 variables.

On reconnait bien notre fonction (ligne qui commence à 1 sur l'axe des y.) Maintenant, elle n'est plus qu'une courbe de niveau (celle pour laquelle z = 0) parmi d'autres.

Puisqu'elle est une courbe de niveau, le gradient de la fonction va nous donner un vecteur perpendiculaire à cette courbe. Le gradient est

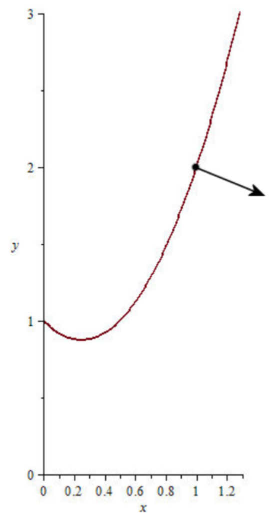
$$\begin{aligned}\vec{\nabla} z &= \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} \\ &= (4x-1)\vec{i} + (-1)\vec{j}\end{aligned}$$

Au point (1,2), ce vecteur est

$$\vec{\nabla} z = 3\vec{i} - \vec{j}$$

Voilà, $\vec{n} = 3\vec{i} - \vec{j}$ est notre vecteur normal !

(Si on veut l'autre vecteur normal qui point vers la gauche, on n'a qu'à inverser les signes des composantes du vecteur.)



Exemple

Quel est le vecteur perpendiculaire à la courbe de la fonction suivante au point (1,3) ?

$$y = \ln(x) + 3x$$

Cette fonction est la courbe de niveau pour z = 0 de la fonction

$$z = \ln(x) + 3x - y$$

Le gradient de cette fonction est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} z &= \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} \\ &= \left(\frac{1}{x} + 3\right)\vec{i} + (-1)\vec{j}\end{aligned}$$

Au point (1,3), le gradient est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} z &= \left(\frac{1}{1} + 3\right)\vec{i} + (-1)\vec{j} \\ &= 4\vec{i} - \vec{j}\end{aligned}$$

Puisque le gradient est perpendiculaire à la courbe de niveau, ce vecteur est perpendiculaire à notre courbe. Le vecteur normal est donc

$$\vec{n} = 4\vec{i} - \vec{j}$$

La procédure est la même si la fonction est donnée sous une forme implicite.

Exemple

Quel est le vecteur perpendiculaire à la courbe de la fonction suivante au point (1,2) ?

$$2x^2 + y^2 = 6$$

Cette fonction est la courbe de niveau pour z = 6 de la fonction

$$z = 2x^2 + y^2$$

Le gradient de cette fonction est

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} z &= \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} \\ &= 4x\vec{i} + 2y\vec{j} \end{aligned}$$

Au point (1,2), le gradient est

$$\vec{\nabla} z = 4\vec{i} + 4\vec{j}$$

Puisque le gradient est perpendiculaire à la courbe de niveau, ce vecteur est perpendiculaire à notre courbe. Le vecteur normal est donc

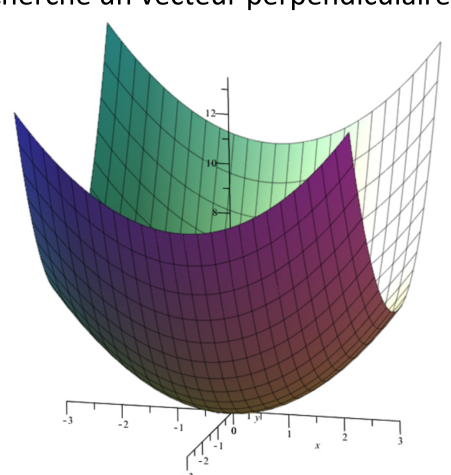
$$\vec{n} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$$

____

On peut aussi utiliser cette procédure pour trouver un vecteur perpendiculaire à une surface en considérant des fonctions de 3 variables. On se rappelle que dans ce cas, les lignes de niveau sont plutôt des surfaces de niveau. Avec le gradient, on obtient donc un vecteur perpendiculaire à la surface de niveau. C'est la clé pour trouver le vecteur perpendiculaire à une surface.

Prenons un exemple pour illustrer. Supposons qu'on cherche un vecteur perpendiculaire à la surface représentée par fonction suivante au point (2, 1, 3).

$$z = \frac{x^2}{2} + y^2$$



Pour obtenir le gradient, il faut que cette surface soit une des surfaces de niveau d'une fonction. Ce changement est facile à faire. Cette surface est la surface de niveau f = 0 de la fonction de 3 variables suivantes.

$$f = \frac{x^2}{2} + y^2 - z$$

On trouve alors le gradient de cette fonction de 3 variables. Le gradient est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \\ &= x\vec{i} + 2y\vec{j} + (-1)\vec{k}\end{aligned}$$

Au point (2, 1, 3), ce gradient est

$$\vec{\nabla} f = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

C'est notre vecteur normal à cet endroit.

Exemple

Trouver un vecteur normal à la surface donnée par l'équation suivante au point (1, 0, 2).

$$z^2 = 4\left(x^2 + y^2\right)$$

Cette fonction est la courbe de niveau pour $f = 0$ de la fonction

$$f = 4\left(x^2 + y^2\right) - z^2$$

Le gradient de cette fonction est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \\ &= 8x\vec{i} + 8y\vec{j} - 2z\vec{k}\end{aligned}$$

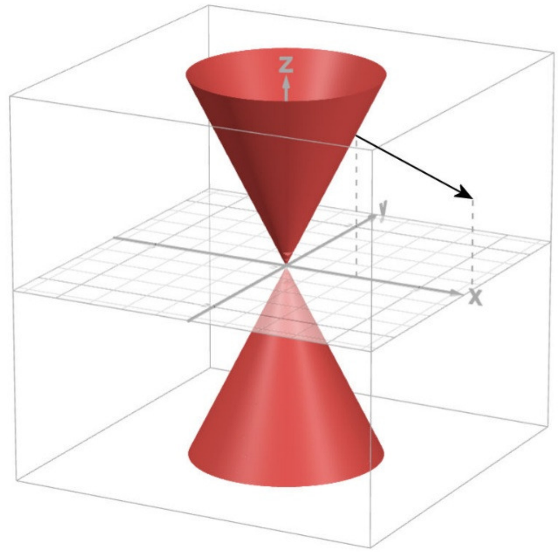
Au point (1, 0, 2), le gradient est

$$\vec{\nabla} f = 8\vec{i} - 4\vec{k}$$

Puisque le gradient est perpendiculaire à la surface de niveau, ce vecteur est perpendiculaire à notre surface. Le vecteur normal est donc

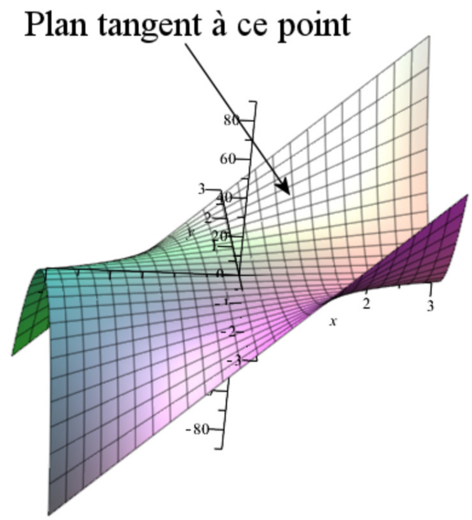
$$\vec{n} = 8\vec{i} + 4\vec{k}$$

À droite, on a la représentation de cette surface et d'un vecteur perpendiculaire au point (1, 0, 2).



On peut même utiliser ce qu'on sait du calcul vectoriel pour trouver l'équation du plan tangent à une surface, puisque cette équation se trouve à partir de la normale au plan.

Exemple



Trouver l'équation du plan tangent à la surface donnée par l'équation suivante au point (1, 2, 12).

$$z = 2x + 3xy^2 - y$$

Commençons par un rappel du cours de calcul vectoriel.

Quand on a le vecteur normal (donc les composantes sont n_x, n_y et n_z) et un point d'un plan (x_p, y_p, z_p), l'équation du plan est

$$n_x\left(x - x_p\right) + n_y\left(y - y_p\right) + n_z\left(z - z_p\right) = 0$$

Il nous faut donc le vecteur normal à la surface, qui sera le vecteur normal à notre plan tangent.

La fonction est la surface de niveau pour $f = 0$ de la fonction

$$f = 2x + 3xy^2 - y - z$$

Le gradient de cette fonction est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \\ &= \left(2 + 3y^2\right)\vec{i} + \left(6xy - 1\right)\vec{j} + \left(-1\right)\vec{k}\end{aligned}$$

Au point (1, 2, 12), le gradient est

$$\vec{\nabla} f = 14\vec{i} + 11\vec{j} - \vec{k}$$

Puisque le gradient est perpendiculaire à la surface de niveau, ce vecteur est perpendiculaire à notre surface. Le vecteur normal est donc

$$\vec{n} = 14\vec{i} + 11\vec{j} - \vec{k}$$

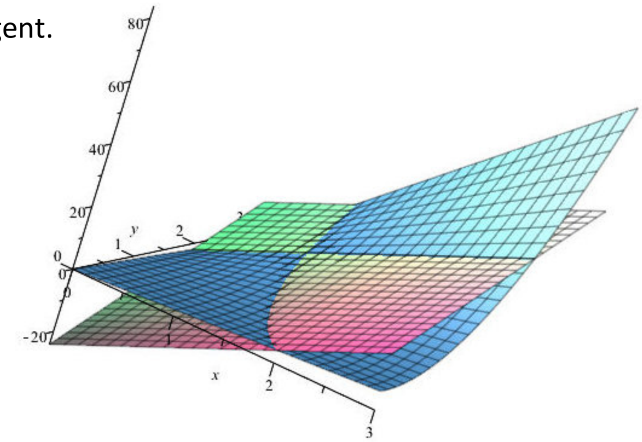
On peut maintenant trouver l'équation du plan puisqu'on sait que la normale est $\vec{n} = 14\vec{i} + 11\vec{j} - \vec{k}$ et que le plan passe par le point (1, 2, 12). L'équation du plan tangent est

$$14(x-1)+11(y-2)-(z-12)=0$$

On peut simplifier pour obtenir

$$14x-14+11y-22-z+12=0$$
$$z=14x+11y-24$$

Voici la surface et son plan tangent.



____

3) Applications en physique

Plusieurs vecteurs en physique sont en fait le gradient d'une fonction de plusieurs variables.

Par exemple, on avait vu en mécanique qu'on peut trouver les composantes de la force sur un objet à partir de l'énergie potentielle de l'objet (qui est une fonction de plusieurs variables). Les formules étaient

$$F_x=-\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y=-\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z=-\frac{\partial U}{\partial z}$$

On peut écrire cette équation sous la forme

$$\vec{F}=-\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}-\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

et, donc, sous la forme suivante.

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}U$$

Le vecteur force dépend donc du gradient de l'énergie potentielle.

Sans aucun doute, l'exemple le plus connu se retrouve en électricité. Le champ électrique est lié au gradient du potentiel par $\vec{E}=-\vec{\nabla}V$.

Exemple

L'énergie potentielle d'un objet est donnée par la formule suivante.

$$U = 4\tfrac{J}{m^2}\cdot x^2 + 2\tfrac{J}{m}\cdot(x+y+z) - 3\tfrac{J}{m^3}\cdot xyz$$

Quelle est la force sur cet objet quand il est à la position *x* = 1 m, *y* = 2 m et *z* = - 4 m ?

On trouve la force avec le gradient de l'énergie potentielle.

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -\vec{\nabla}U \\
&= -\vec{\nabla}\left(4\tfrac{J}{m^2}\cdot x^2 + 2\tfrac{J}{m}\cdot(x+y+z) - 3\tfrac{J}{m^3}\cdot xyz\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\left(4\tfrac{J}{m^2}\cdot x^2 + 2\tfrac{J}{m}\cdot(x+y+z) - 3\tfrac{J}{m^3}\cdot xyz\right)\vec{i} - \frac{\partial}{\partial y}\left(4\tfrac{J}{m^2}\cdot x^2 + 2\tfrac{J}{m}\cdot(x+y+z) - 3\tfrac{J}{m^3}\cdot xyz\right)\vec{j} \\
&\qquad -\frac{\partial}{\partial z}\left(4\tfrac{J}{m^2}\cdot x^2 + 2\tfrac{J}{m}\cdot(x+y+z) - 3\tfrac{J}{m^3}\cdot xyz\right)\vec{k} \\
&= -\left(8\tfrac{J}{m^2}\cdot x + 2\tfrac{J}{m} - 3\tfrac{J}{m^3}\cdot yz\right)\vec{i} - \left(2\tfrac{J}{m} - 3\tfrac{J}{m^3}\cdot xz\right)\vec{j} - \left(2\tfrac{J}{m} - 3\tfrac{J}{m^3}\cdot xy\right)\vec{k}
\end{aligned}$$

Au point (1 m, 2 m, -4 m), la force est

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -\left(8\tfrac{J}{m^2}\cdot 1m + 2\tfrac{J}{m} - 3\tfrac{J}{m^3}\cdot(2m)(-4m)\right)\vec{i} - \left(2\tfrac{J}{m} - 3\tfrac{J}{m^3}\cdot(1m)(-4m)\right)\vec{j} \\
&\qquad -\left(2\tfrac{J}{m} - 3\tfrac{J}{m^3}\cdot(1m)(2m)\right)\vec{k} \\
&= -(8N + 2N + 24N)\vec{i} - (2N + 12N)\vec{j} - (2N - 6N)\vec{k} \\
&= -34N\vec{i} - 14N\vec{j} + 4N\vec{k}
\end{aligned}$$

____

SÉRIE D'EXERCICES 10

Au point donné pour les fonctions suivantes, déterminez la dérivée directionnelle maximale et la direction (θ, en degrés) pour laquelle on a cette dérivée directionnelle maximale.

1. $z = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right)$ au point (1,1) (($x + y$) est en radians)

2. $f = \ln\left(\sqrt{2x-3y}\right)$ au point (1,0)

3. $f = \frac{\cosh(xy)}{xy}$ au point (2,1)

4. Déterminez les deux directions (θ) pour lesquelles la dérivée directionnelle est nulle pour la fonction suivante au point donné.

$$z = \frac{xy}{x+y} \quad \text{au point (-4,5)}$$

5. La profondeur d'un lac est donnée par la fonction suivante.

$$P = 100m - 0,01m^{-1}x^2 - 0,04m^{-1}y^2$$

Un pêcheur se déplace en chaloupe à la surface du lac. Sur son échosondeur, il peut voir la profondeur du lac. À quel rythme change la profondeur dans les situations suivantes ?

a) Dans quelle direction (θ, direction par rapport au nord, en degrés) doit-il se déplacer pour que la profondeur du lac augmente le plus rapidement quand il est au point (10 m, 10 m) ?
b) Dans quelle direction (θ, direction par rapport au nord, en degrés) doit-il se déplacer pour que la profondeur du lac diminue plus rapidement quand il est au point (10 m, 10 m) ?
c) Dans quelle direction (θ, direction par rapport au nord, en degrés) doit-il se déplacer pour que la profondeur du lac ne change pas quand il est au point (10 m, 10 m) (2 réponses) ?

6. L'altitude du sol dans une région est donnée par la fonction

$$h = 100m + 100m\cos\left(\frac{x^2+y^2}{(500m)^2}\right) \text{(On travaille en rad)}$$

Un marcheur est au point (200 m, 400 m).

a) Dans quelle direction (θ, direction par rapport au nord, en degrés) doit-il se déplacer pour que l'altitude diminue le plus rapidement ?
b) Quelle est la pente (le taux de variation instantanée) dans cette direction ?

Trouver un vecteur unitaire normal aux courbes décrites par les fonctions suivantes au point donné.

7. $y = \ln(x)$ à $x = 2$

8. $y = e^{3x}$ à x = -1

9. $y = 5x^2 - 2x + 6$ à $x = 1$

10. $x^2 + 4y^2 = 8$ à x = -2 et $y = 1$

Trouver un vecteur unitaire normal aux surfaces décrites par les fonctions suivantes au point donné

11. $z = \cosh(-x+2y)$ au point (1,1)

12. $z = \dfrac{xy}{x+2y} + 3x + 2y$ au point (1,0)

13. $z = \sqrt{x^2 y + xy^2}$ au point (2,1)

Trouver l'équation du plan tangent à la surface décrite par les fonctions suivantes au point donné.

14. $z = 3x^2 - y^2 + 4x + 7y - 9$ au point (0,0)

15. $z = \cos\left(2x + y + \frac{\pi}{2}\right)$ au point (0,0) (L'angle dans le cosinus est en radians)

16. $z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$ au point (6,0)

8. Dérivation implicite

Fonction de 1 variable

Avec les dérivées partielles, on peut obtenir la valeur de la dérivée d'une fonction d'une seule variable même si on ne parvient pas à isoler y ou x dans la fonction. Autrement dit, on cherche à calculer

$$\frac{dy}{dx}$$

si on a une fonction de la forme

$$F(x,y) = 0$$

On peut alors trouver dy/dx à partir de la différentielle de F.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

Puisque la fonction est nulle, la différentielle est nulle. On a alors

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} dy = -\frac{\partial F}{\partial x} dx$$

Si on isole dy/dx, on arrive à

Dérivée d'une fonction implicite

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}$$

Exemple

Calculer dy/dx au point (1,1) pour cette équation :

$$x^3 - 6xy^2 + y^3 = -4$$

Difficile d'isoler x ou y dans cette équation, mais ce n'est pas grave. Pour trouver la dérivée, on travaille avec

$$F = x^3 - 6xy^2 + y^3 + 4 = 0$$

On a alors

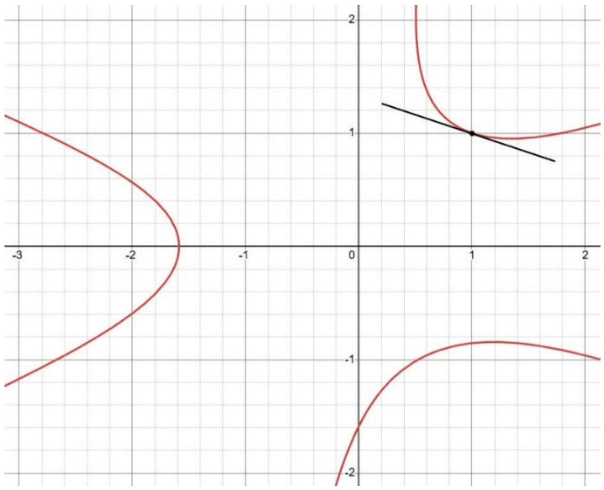
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} \\ &= -\frac{3x^2 - 6y^2}{-12xy + 3y^2} \\ &= \frac{x^2 - 2y^2}{4xy - y^2} \end{aligned}$$

Au point (1,1) la dérivée est

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1^2 - 2 \cdot 1^2}{4 \cdot 1 \cdot 1 - 1^2} \\ &= \frac{1-2}{4-1} \\ &= \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

Voyons si cette réponse semble être en accord avec ce qu'on peut voir sur la représentation graphique. Voici le graphique obtenu avec cette équation.

On voit que la pente au point (1,1) est bel et bien -1/3.



Exemple

Calculer dy/dx si

$$y\ln x + xy^3 = 4$$

Difficile d'isoler x ou y dans cette fonction, mais ce n'est pas grave. Pour trouver la dérivée, on travaille avec la fonction

$$F = y\ln x + xy^3 - 4 = 0$$

On a alors

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} \\ &= -\frac{y\left(\frac{1}{x}\right)+y^3}{\ln x + 3xy^2} \\ &= \frac{-\left(y+xy^3\right)}{x\ln x + 3x^2y^2}\end{aligned}$$

Fonction de 2 variables

On veut maintenant trouver une façon de calculer

$$\frac{\partial z}{\partial x} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}$$

si on a une fonction implicite

$$F(x,y,z)=0$$

(ce qui signifie que z n'est pas isolé dans cette équation).

On va faire la démonstration pour la dérivée partielle par rapport à x ici, la preuve pour la dérivée partielle par rapport à y est presque identique.

On peut trouver la dérivée partielle à partir de la différentielle de F. Cette différentielle est

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz$$

Puisque la fonction est nulle, la différentielle est nulle. On a alors

$$0=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz$$

On sait que z dépend de x et y. On devrait donc avoir

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

En utilisant cette valeur dans l'équation précédente, on arrive à

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)\\&=\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy\end{aligned}$$

Si on fait la dérivée partielle par rapport à x, c'est que y est constant et que $dy = 0$. On a alors

$$\begin{gathered}0=\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx\\\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\end{gathered}$$

Si on isole $\partial z/\partial x$, on arrive à

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$$

En procédant de la même façon pour la dérivée partielle par rapport à y. on arrive à

Dérivée partielle d'une fonction implicite

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$$

Exemple

Calculer $\partial z/\partial x$ et $\partial z/\partial y$ au point (3,2,1) si

$$x^2+y^2z-9=z^3y^2$$

Difficile d'isoler z dans cette fonction, mais ce n'est pas grave. Pour trouver la dérivée, on travaille avec la fonction

$$F=x^2+y^2z-9-z^3y^2=0$$

Pour la dérivée partielle par rapport à x, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}\\&=\frac{-2x}{y^2-3z^2y^2}\end{aligned}$$

Au point (3,2,1), cette dérivée vaut

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2\cdot 3}{2^2-3\cdot 1^2\cdot 2^2}=\frac{-6}{4-12}=\frac{3}{4}$$

Pour la dérivée partielle par rapport à y, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}\\&=\frac{-\left(2yz-2z^3y\right)}{y^2-3z^2y^2}\end{aligned}$$

Au point (3,2,1), cette dérivée vaut

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\left(2\cdot 2\cdot 1-2\cdot 1^3\cdot 2\right)}{2^2-3\cdot 1^2\cdot 2^2}=\frac{-(4-4)}{4-6}=0$$

____

SÉRIE D'EXERCICES 11

Pour les fonctions implicites suivantes, calculez dy/dx.

1. $ye^{x}+x^{2}=\ln\left(x\right)$

2. $xy=\sin\left(xy\right)$

3. $x^{3}+3x^{2}y-3xy^{2}-1=0$ au point (1,0)

Utiliser l'approximation $\Delta y\approx\frac{dy}{dx}\Delta x$ pour calculer la variation de la valeur de y.

4. $x^{2}y+\ln\left(x+y\right)=0$ à $x=1$ et $y=0$ si x passe de 1 à 1,01.

5. $xy=\sin\left(x+y\right)$ à $x=0$ et $y=0$ si x passe de 0 à 0,02.

Pour les fonctions implicites suivantes, calculez $\partial z/\partial x$ et $\partial z/\partial y$ au point donné.

6. $x^{3}z+5xy^{2}-6xz+3y=11$ à $x=1$, $y=2$ et $z=3$

7. $xy-\frac{\pi}{2}=\arcsin\left(xyz\right)-z$ à $x=1$, $y=-1$ et $z=1$

8. $\frac{4xy+3z}{xz-y}=1$ à $x=-1$, $y=2$ et $z=3/2$

Utiliser l'approximation $\Delta z\approx\frac{\partial z}{dx}\Delta x+\frac{\partial z}{dy}\Delta y$ pour calculer la variation de la valeur de z.

9. $x^{2}y+yz^{2}+zy^{2}=3$ à $x=1$, $y=1$ et $z=1$ si x passe de 1 à 1,01 et y passe de 1 à 0,99

10. $6ze^{z-1}=xy$ à $x=2$, $y=3$ et $z=1$ si x passe de 2 à 2,02 et y passe de 3 à 3,03.

9. *Dérivation de fonctions composées*

On va maintenant trouver la dérivée d'une fonction de deux variables quand ces deux variables dépendent à leur tour d'autres variables.

Fonction d'une variable

Dans ce cas, on a une fonction de 2 variables

$$f(u,v)$$

et ces deux variables dépendent à leur tour d'une seule autre variable (disons x). En clair, cela signifie que la fonction dépend en fait d'une seule variable x.

Évidemment, on peut faire le remplacement. Par exemple, supposons qu'on ait

$$\begin{aligned} &f = u^2 + v^2 \\ &u = 2x \qquad\qquad v = 5x^2 \end{aligned}$$

et qu'on cherche la valeur de df/dx à x = 1. On peut remplacer u et v pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(u^2 + v^2\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left((2x)^2 + \left(5x^2\right)^2\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(4x^2 + 25x^4\right) \\ &= 8x + 100x^3 \end{aligned}$$

À x = 1, cette dérivée vaut 108.

Mais parfois, ce genre de remplacement peut donner des fonctions très compliquées. Il y a heureusement un moyen de faire autrement. On peut aussi calculer cette dérivée

$$\frac{df}{dx}$$

sans avoir à remplacer u et v par ce que valent ces variables en fonction de x. On a

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= df \cdot \frac{1}{dx} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv\right)\frac{1}{dx} \end{aligned}$$

Ce qui donne

Règle de dérivation en chaine pour une fonction de 1 variable

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

Voyons ce qu'on obtient avec notre exemple

$$f = u^2 + v^2$$
$$u = 2x \qquad v = 5x^2$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} \\ &= (2u)(2) + (2v)(10x)\end{aligned}$$

À x = 1, on a u = 2 et v = 5. La dérivée vaut donc

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= (2\cdot 2)(2) + (2\cdot 5)(10\cdot 1) \\ &= 108\end{aligned}$$

C'est le même résultat qu'auparavant.

Exemple

Que vaut df/dx à x = 1 si

$$f = e^{3u-2v}$$
$$u = 3x^2 \qquad v = \sqrt{x^2+3}$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} \\ &= \left(3e^{3u-2v}\right)(6x) + \left(-2e^{3u-2v}\right)\left(\frac{1}{2}\left(x^2+3\right)^{-\frac{1}{2}}(2x)\right) \\ &= e^{3u-2v}\left(18x - \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}\right)\end{aligned}$$

Quand x = 1, u = 3 et v = 2. On a donc

$$\begin{aligned}\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=1} &= e^{3\cdot 3-2\cdot 2}\left(18\cdot 1 - \frac{2\cdot 1}{\sqrt{1^2+3}}\right) \\ &= e^5(18-1) \\ &= 2523\end{aligned}$$

Exemple

L'énergie cinétique d'un objet de 10 kg est donnée par

$$E_k = 5kg\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$$

À quel rythme change l'énergie cinétique à t = 1 s si les composantes de la vitesse sont données par

$$\begin{aligned} v_x &= 3\tfrac{m}{s^2}t + 5\tfrac{m}{s} \\ v_y &= 2\tfrac{m}{s^3}t^2 - 1\tfrac{m}{s^2}t - 6\tfrac{m}{s} \\ v_z &= 4\tfrac{m}{s^2}t - 2\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{dE_k}{dt} &= \frac{\partial E_k}{\partial v_x}\frac{dv_x}{dt} + \frac{\partial E_k}{\partial v_y}\frac{dv_y}{dt} + \frac{\partial E_k}{\partial v_z}\frac{dv_z}{dt} \\ &= \left(5kg \cdot 2v_x\right)\left(3\tfrac{m}{s^2}\right) + \left(5kg \cdot 2v_y\right)\left(4\tfrac{m}{s^3}t - 1\tfrac{m}{s^2}\right) + \left(5kg \cdot 2v_z\right)\left(4\tfrac{m}{s^2}\right) \\ &= \left(30N \cdot v_x\right) + \left(10N \cdot v_y\right)\left(4\tfrac{1}{s}t - 1\right) + \left(40N \cdot v_z\right) \end{aligned}$$

Quand t = 1 s, v_x = 8 m/s et v_y = -5 m/s et v_z = 2 m/s. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{dE_k}{dt} &= \left(30N \cdot 8\tfrac{m}{s}\right) + \left(10N \cdot -5\tfrac{m}{s}\right)\left(4\tfrac{1}{s} \cdot 1s - 1\right) + \left(40N \cdot 2\tfrac{m}{s}\right) \\ &= 240W + -150W + 80W \\ &= 170W \end{aligned}$$

L'énergie cinétique augmente donc au rythme de 170 joules par secondes.

____

Fonction de 2 variables

Dans ce cas, on a une fonction de 2 variables

$$f\left(u, v\right)$$

Dans laquelle les deux variables u et v dépendent à leur tour de deux autres variables (disons x et y). En clair, cela signifie que la fonction dépend en fait des variables x et y. Évidemment, on peut faire le remplacement. Par exemple, supposons qu'on ait

$$\begin{aligned} &f = u^2 + v^2 \\ &u = 2x + y^2 \qquad v = x^2 + 5y \end{aligned}$$

et qu'on cherche la valeur de $\partial f/\partial x$ quand x = 1 et y = 2.

Évidemment, on peut remplacer. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(u^2+v^2\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(2x+y^2\right)^2+\left(x^2+5y\right)^2\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(4x^2+4xy^2+y^4+x^4+10x^2y+25y^2\right) \\ &= 8x+4y^2+4x^3+20xy\end{aligned}$$

À x = 1 et y = 2, cette dérivée vaut 68.

Mais parfois, ce genre de remplacement peut donner des fonctions très compliquées. Il y a toutefois un moyen de faire autrement. On peut aussi calculer ces dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}$$

sans avoir à remplacer u et v par ce que valent ces variables en fonction de x et y.

On va faire la preuve pour la dérivée partielle par rapport à x. (La preuve pour la dérivée partielle par rapport à y est presque identique.) Dans ce cas, y est constant et dy = 0. On a alors

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx \qquad \text{et} \qquad dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx$$

Ainsi, la différentielle de f est

$$\begin{aligned}df &= \frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}dx\end{aligned}$$

On va ensuite diviser par dx pour obtenir la dérivée partielle. (On change alors les d en ∂ pour la dérivée partielle puisqu'on a dit que y était une constante.)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

En procédant de la même façon pour la dérivée partielle par rapport à y, on arrive à

Règles de dérivation en chaine pour une fonction de 2 variables

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Voyons ce qu'on obtient avec notre exemple

$$f=u^2+v^2$$
$$u=2x+y^2 \qquad v=x^2+5y$$

La dérivée partielle par rapport à x est

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\&=(2u)(2)+(2v)(2x)\\&=4u+4vx\end{aligned}$$

À x = 1 et y = 2, on a u = 6 et v = 11. Avec ces valeurs, on trouve que la dérivée vaut 68.

Exemple

Quelles sont les valeurs de $\partial z/\partial x$ et $\partial z/\partial y$ et en termes de x et y si

$$z=uv$$
et
$$u=xy^2 \qquad v=y\sin x$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\&=v\left(y^2\right)+u\left(y\cos x\right)\\&=y^3\sin x+xy^3\cos x\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\\&=v(2xy)+u(\sin x)\\&=2xy^2\sin x+xy^2\sin x\end{aligned}$$

SÉRIE D'EXERCICES 12

Calculez dz/dx dans les cas suivants.

1. $z = u^3 - v^3$ si $u = \dfrac{1}{x+1}$ et $v = \dfrac{x}{x+1}$ quand $x = 2$.

2. $z = \ln(r+s)$ si $r = e^{-x}$ et $s = x^3 - x^2$ quand $x = 4$.

3. $z = p^2 - q\tan w$ si $p = \cos^2 x$, $q = \sin x$ et $w = 2x$ quand $x = \pi/6$ rad.

4. L'aire d'un triangle est donnée par

$$A = \frac{1}{2}bh$$

où b est la longueur de la base et h est la hauteur du triangle. Toutefois, la longueur des côtés varie avec le temps selon les équations

$$b = 5m - 2\tfrac{m}{s}t \quad \text{et} \quad h = 5m + 2\tfrac{m}{s}t^2$$

À quel rythme varie l'aire du triangle (dA/dt) à t = 1 s ?

5. La température de 8,424 mol d'un gaz est donnée par

$$PV = 70\tfrac{J}{K}T$$

Toutefois, la pression P et le volume V varient avec le temps selon

$$P = 100kPa \cdot e^{t/10s} \quad \text{et} \quad V = \frac{5m^3}{2s^{-1}t}$$

À quel rythme varie la température du gaz (dT/dt) à t = 10 s ?

Calculez $\partial z/\partial x$ et $\partial z/\partial y$ et dans les cas suivants.

6. $z = u\cos v$ si $u = x^2 + y^2$ et $v = xy$ quand $x = 1$ et $y = 0$.

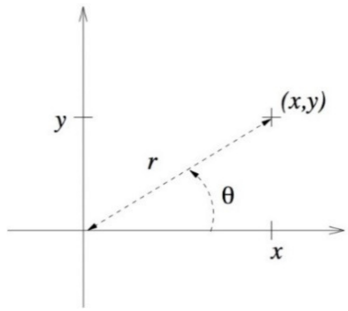
7. $z = rs + 4s + 3r$ si $r = x + \sinh y$ et $s = 3y + \sinh x$ quand $x = 0$ et $y = 0$.

8. $z = e^{pq}$ si $p = 2x + y - 1$ et $q = 3xy + 2x - 3y - 2$ quand $x = 0$ et $y = 0$.

9. $z = u^3 + v + w^2$ si $u = xe^y$, $v = ye^x$ et $w = xy^2$ quand $x = 1$ et $y = 2$.

10. On peut donner la position d'un objet avec des coordonnées polaires.

Cette façon de donner la position est souvent utilisée en physique. Par exemple, dans cet exercice, on vous donne la formule de l'énergie potentielle d'un objet avec r et θ plutôt qu'avec x et y.



images.math.cnrs.fr/Decrire-l-evolution-d-un-nuage-de.html

$$U = \frac{1500Jm^2}{r^2}\sin 2\theta$$

À partir de la formule de l'énergie potentielle, les composantes en x et y de la force se trouvent avec

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

Vous devez donc déterminer les composantes en x et y de la force agissant sur l'objet au point x = 3 m et y = 4 m, sachant que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan\frac{y}{x}$.

11. Une fonction w dépend de deux variables x et y pour lesquelles on a $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

Montrez que $\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$

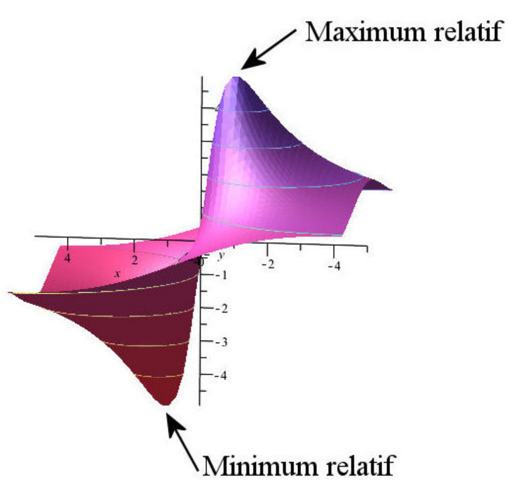
10. Extrémums d'une fonction

Avec la dérivée directionnelle, on peut trouver les extrémums relatifs d'une fonction.

On a un maximum relatif à un point si la valeur de la fonction est plus petite partout dans le voisinage de ce point.

On a un minimum relatif à un point si la valeur de la fonction est plus grande partout dans le voisinage de ce point.

Quand on est au maximum, la valeur de la fonction diminue dans toutes les directions. Quand on est au minimum, la valeur de la fonction augmente dans toutes les directions.



Autrement dit, si la fonction représente l'altitude du sol, les maximums relatifs sont les sommets des montagnes et les minimums relatifs sont les points les plus bas des vallées.

On parle de maximum relatif, parce que c'est un maximum local. Il y a peut-être un autre maximum plus haut ailleurs. Autrement dit, si on est au sommet d'une montagne, il y a peut-être une montagne plus haute ailleurs. La plus haute montagne de toutes représenterait le maximum absolu.

1re condition

En arrivant vers un maximum, la fonction est croissante, ce qui implique que la dérivée directionnelle est positive. Une fois passé le maximum, la fonction décroit, ce qui implique que la dérivée directionnelle est négative. Au maximum, on est passé d'une dérivée positive à une dérivée négative. Cela signifie que la dérivée directionnelle doit être nulle au maximum.

En arrivant vers un minimum, la fonction est décroissante, ce qui implique que la dérivée directionnelle est négative. Une fois passé le minimum, la fonction croit, ce qui implique que la dérivée directionnelle est positive. Au minimum, on est passé d'une dérivée négative à une dérivée positive. Cela signifie que la dérivée directionnelle doit être nulle au minimum.

Dans les deux cas, on a donc

$$\frac{df}{ds} = 0$$

Ce qui signifie que

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta = 0$$

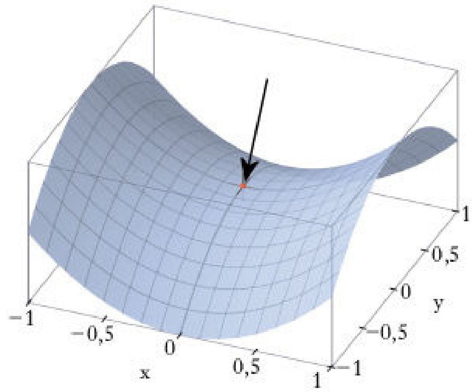
doit être vrai pour toutes les directions possibles. Peu importe la valeur de l'angle, on doit obtenir 0. Cela ne peut être vrai que si les deux dérivées partielles sont nulles. Notre première condition est donc la suivante.

Première condition pour les extrémums relatifs d'une fonction

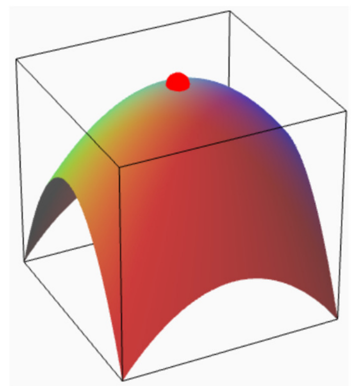
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Avec ces équations, on va trouver les *points critiques* qui sont les points où la dérivée directionnelle est toujours nulle.

2^{e} condition

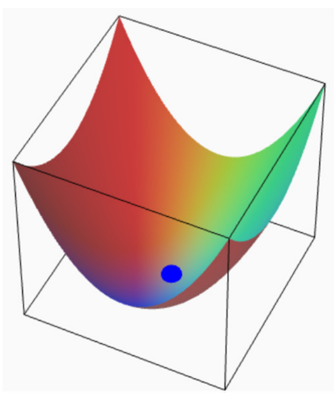


Cette première n'est pas suffisante. En effet, dans la situation montrée sur la figure, on répond à la condition puisque la pente dans la direction de l'axe des x est nulle (ce qui signifie que $\partial f / \partial x = 0$) et la pente dans la direction de l'axe des y est nulle (ce qui signifie que $\partial f / \partial y = 0$), mais il n'y a pas de maximum.

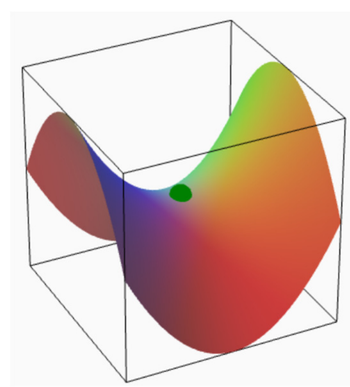


Pour s'assurer qu'on a un maximum, on doit calculer la deuxième dérivée directionnelle.

Si la deuxième dérivée est toujours négative, peu importe la direction, c'est que la valeur de la fonction va commencer à diminuer dans toutes les directions. On a alors un maximum (comme au point rouge sur cette figure).



Si la deuxième dérivée est toujours positive, peu importe la direction, c'est que la valeur de la fonction va commencer à augmenter dans toutes les directions. On a alors un minimum (comme au point bleu sur cette figure).



Si la deuxième dérivée parfois négative et parfois positive, c'est que la valeur de la fonction va commencer à diminuer dans certaines directions et va commencer à augmenter dans d'autres directions. On a alors un point de selle (comme au point vert sur cette figure).

mathinsight.org/local_extrema_introduction_two_variables pour les 3 figures

On doit se rappeler finalement qu'on ne peut pas conclure si la deuxième dérivée est nulle pour une ou plusieurs directions. Si c'est le cas, on ne sait pas comment la fonction va commencer à changer pour cette direction et on ne peut pas savoir si on a un maximum, un minimum. (On sait cependant qu'on a un point de selle si la deuxième dérivée change de signe, même s'il y a des directions pour lesquelles la deuxième dérivée est nulle.)

On doit donc calculer la 2e dérivée directionnelle d'une fonction. On va la trouver à partir de la différentielle totale de la fonction.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Si on fait la différentielle de cette différentielle, on obtient

$$\begin{aligned} d^2 f &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) \\ &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial f}{\partial x}d^2 x + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial f}{\partial y}d^2 y \end{aligned}$$

Mais puisque la première condition impose $\partial f/\partial x = 0$ et $\partial f/\partial y = 0$, les 2e et 4e termes sont nuls. On a alors

$$d^2 f = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} d^2 f &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}dy\right)dy \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2 \end{aligned}$$

La deuxième dérivée directionnelle est donc

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$$

Mais puisque

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\theta$$

on a

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\theta$$

Si la valeur est toujours positive, peu importe θ, on a un minimum.

Si la valeur est toujours négative, peu importe θ, on a un maximum.

Exemple

Trouvez les extrémums relatifs de la fonction suivante.

$$z = x^3 + y^2 - 12x - 6y + 10$$

La première condition en x nous donne

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$
$$3x^2 - 12 = 0$$

Cette équation nous donne x = 2 et x = -2.

La première condition en y nous donne

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$
$$2y - 6 = 0$$

Cette équation nous donne y = 3.

Les points critiques sont donc (-2,3) et (2,3).

La deuxième dérivée directionnelle nous donne

$$\begin{aligned}\frac{d^2 z}{ds^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta \\ &= 6x\cos^2\theta + 0\cdot\sin\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta \\ &= 6x\cos^2\theta + 2\sin^2\theta\end{aligned}$$

Au point (2,3), on a

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = 12\cos^2\theta + 2\sin^2\theta$$

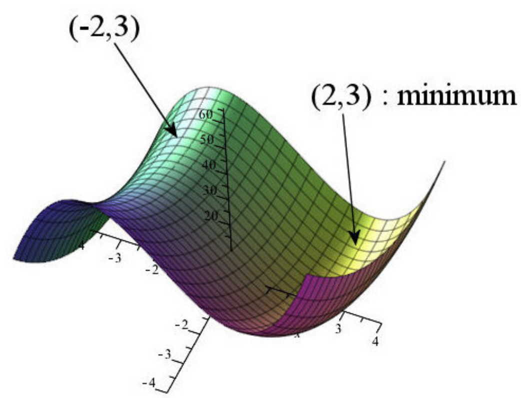
Cette deuxième dérivée est toujours positive, peu importe la valeur de l'angle. On a donc un minimum à cet endroit.

Au point (-2,3), on a

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = -12\cos^2\theta + 2\sin^2\theta$$

Cette deuxième dérivée change de signe selon la valeur de l'angle (par exemple, elle est négative à 0° et positive à 90°). Il n'y a donc pas d'extrémum à ce point.

Il n'y a donc qu'un seul minimum relatif à (2,3). Voici d'ailleurs le graphique de cette surface.



____

Ce n'est pas toujours facile de savoir si la deuxième dérivée directionnelle change de signe selon l'angle, surtout si $\partial^2 f / \partial x \partial y$ n'est pas nul. Pour faciliter notre travail, on va poser

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = A \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = B \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = C$$

La deuxième dérivée directionnelle devient donc

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = A\cos^2\theta + 2C\sin\theta\cos\theta + B\sin^2\theta$$

Voyons différents cas possibles.

Si $A = 0$ et $B = 0$

Dans ce cas, la deuxième dérivée directionnelle est

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = 2C\sin\theta\cos\theta$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme suivante.

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = C\sin 2\theta$$

(puisque $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$.) Comme $C\sin 2\theta$ change de signe selon l'angle, **on a un point de selle.**

Si $A = 0$ (et $B \neq 0$)

Dans ce cas, la deuxième dérivée directionnelle est

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = 2C\sin\theta\cos\theta + B\sin^2\theta$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme suivante.

$$\begin{aligned}\frac{d^2f}{ds^2} &= \frac{1}{B}\left(2BC\sin\theta\cos\theta + B^2\sin^2\theta\right)\\ &= \frac{1}{B}\left(B^2\sin^2\theta + 2BC\sin\theta\cos\theta + C^2\cos^2\theta - C^2\cos^2\theta\right)\\ &= \frac{1}{B}\left(\left(B\sin\theta + C\cos\theta\right)^2 - \left(C^2\right)\cos^2\theta\right)\end{aligned}$$

Dans ce cas, la deuxième dérivée change de signe selon l'angle. La partie $\left(B\sin\theta + C\cos\theta\right)^2$ est toujours positive ou nulle. Si on ajoute le terme négatif $C^2\cos^2\theta$, le signe change selon l'angle. Par exemple, la valeur est positive à 90°, mais elle est négative quand $\left(B\sin\theta + C\cos\theta\right) = 0$, donc quand $\tan\theta = -C/B$. **On a donc un point de selle.**

Si $B = 0$ (et $A \neq 0$)

Dans ce cas, la deuxième dérivée directionnelle est

$$\frac{d^2f}{ds^2} = A\cos^2\theta + 2C\sin\theta\cos\theta$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme suivante.

$$\begin{aligned}\frac{d^2f}{ds^2} &= \frac{1}{A}\left(A^2\cos^2\theta + 2CA\sin\theta\cos\theta\right)\\ &= \frac{1}{A}\left(A^2\cos^2\theta + 2CA\sin\theta\cos\theta + C^2\sin^2\theta - C^2\sin^2\theta\right)\\ &= \frac{1}{A}\left(\left(A\cos\theta + C\sin\theta\right)^2 - C^2\sin^2\theta\right)\end{aligned}$$

Dans ce cas, la deuxième dérivée change de signe selon l'angle. La partie $\left(A\cos\theta + C\sin\theta\right)^2$ est toujours positive ou nulle. Si on ajoute le terme négatif $C^2\sin^2\theta$, le signe change selon l'angle. Par exemple, la valeur est positive à 0°, mais elle est négative quand $\left(A\cos\theta + C\sin\theta\right) = 0$, donc quand $\tan\theta = -A/C$. **On a donc un point de selle.**

Si $A \neq 0$ et $B \neq 0$

Dans ce cas, la deuxième dérivée directionnelle est

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{ds^2} &= \frac{1}{A}\left(A^2\cos^2\theta + 2CA\sin\theta\cos\theta + BA\sin^2\theta\right)\\ &= \frac{1}{A}\left(A^2\cos^2\theta + 2CA\sin\theta\cos\theta + C^2\sin^2\theta + BA\sin^2\theta - C^2\sin^2\theta\right)\\ &= \frac{1}{A}\left(\left(A\cos\theta + C\sin\theta\right)^2 + \left(AB - C^2\right)\sin^2\theta\right)\end{aligned}$$

Il y a alors 4 cas possibles :

1) Si $A > 0$ et $AB - C^2 > 0$, alors la deuxième dérivée est toujours positive **et on a un minimum.**

   La partie $\left(A\cos\theta + C\sin\theta\right)^2$ est toujours positive ou nulle. Si on ajoute le terme positif $\left(AB - C^2\right)\sin^2\theta$, on reste positif (les deux termes ne sont pas nuls au même angle). En divisant par un nombre positif, le résultat final est toujours positif.

2) Si $A < 0$ et $AB - C^2 > 0$, alors la deuxième dérivée est toujours négative **et on a un maximum.**

   La partie $\left(A\cos\theta + C\sin\theta\right)^2$ est toujours positive ou nulle. Si on ajoute le terme positif $\left(AB - C^2\right)\sin^2\theta$, on reste positif (les deux termes ne sont pas nuls au même angle). En divisant par un nombre négatif, le résultat final est toujours négatif.

3) Si $AB - C^2 < 0$, alors la deuxième dérivée change de signe selon l'angle et **on a un point de selle**.

   La partie $\left(A\cos\theta + C\sin\theta\right)^2$ est toujours positive ou nulle. Si on ajoute le terme négatif $\left(AB - C^2\right)\sin^2\theta$, le signe change selon l'angle. Par exemple, la valeur est positive à 0°, mais elle est négative quand $\left(A\cos\theta + C\sin\theta\right) = 0$, donc quand $\tan\theta = -A/C$.

4) Si $AB - C^2 = 0$, alors on n'a **pas assez d'information** pour déterminer.

   Dans ce cas, $\left(A\cos\theta + C\sin\theta\right)^2$ semble toujours positif, mais il est nul pour un certain angle (quand $\tan\theta = -A/C$).

On voit qu'il y a un extrémum uniquement si $AB - C^2 > 0$ et qu'on a un maximum si $A < 0$ (ou si $B < 0$) et on a un minimum si $A > 0$ (ou si $B > 0$). (A et B doivent avoir le même signe si $AB - C^2 > 0$. C'est pourquoi on a l'autre condition entre parenthèses.)

En examinant tous les cas présentés, on constate aussi qu'un a toujours un point de selle si $AB - C^2 < 0$. (C'est ce qui arrive si $A = 0$ ou $B = 0$.)

Ainsi, on arrive à la conclusion suivante.

Deuxième condition pour les extrémums relatifs d'une fonction

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = A \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = B \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = C$$

On a un extrémum si $AB - C^2 > 0$. Si c'est le cas, on a un maximum si $A < 0$ (ou si $B < 0$) et on a un minimum si $A > 0$ (ou si $B > 0$)

Exemple

Trouvez les extrémums relatifs de la fonction suivante.

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$

La première condition en x nous donne

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$
$$3x^2 - 3y = 0$$

Cette équation nous donne $y = x^2$.

La première condition en y nous donne

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$
$$3y^2 - 3x = 0$$

Cette équation nous donne $x = y^2$.

En mettant les deux conditions ensemble, on arrive à

$$x = y^2$$
$$x = \left(x^2\right)^2$$
$$x = x^4$$

Cette équation nous donne $x = 0$ et $x = 1$. Quand $x = 0$, $y = 0$ et quand $x = 1$, $y = 1$. Les points critiques sont donc (0,0) et (1,1).

Voyons ce qu'on obtient pour la deuxième condition à ces points. Les dérivées secondes sont

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3$$

$$A = 6x \qquad B = 6y \qquad C = -3$$

Au point (1,1), on a donc

$$A = 6 \qquad B = 6 \qquad C = -3$$

Ce qui nous donne

$$AB - C^2 = 27$$

Comme $AB - C^2$ est positif et que A (ou B) est positif, on a un minimum.

Au point (0,0), on a

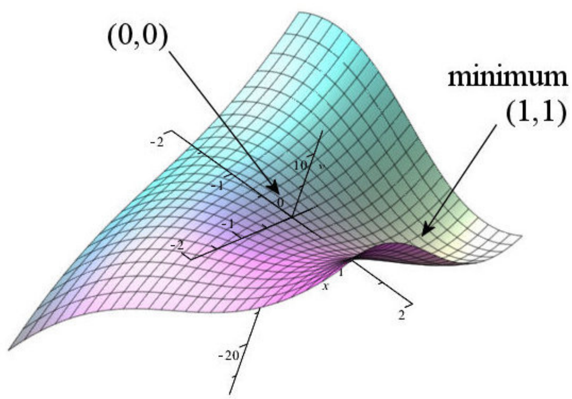
$$A = 0 \qquad B = 0 \qquad C = -3$$

Ce qui nous donne

$$AB - C^2 = -9$$

Comme $AB - C^2$ est négatif, c'est un point de selle.

Il n'y a donc qu'un seul minimum relatif à (1,1).



____

Notez que AB - C^2 est appelé le Hessien et est noté Γ (et parfois *H*). On peut le représenter comme le déterminant d'une matrice.

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

SÉRIE D'EXERCICES 13

Trouvez les extrémums des fonctions suivantes.

1. $z = x^2 + 4y^2 + 3x - 2y + 4$

2. $z = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$

3. $z = -2x^2 - y^2 + 4x + 3y + 8$

4. $z = x^3 + 3xy - y^3$

5. $z = x^4 + y^3 + 32x - 27y$

6. $z = \dfrac{-10x}{x^2 + y^2 + 1}$

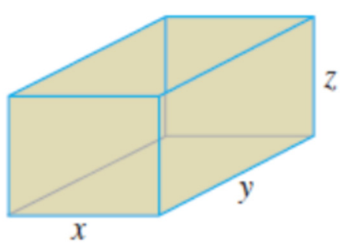
7. Trouver trois nombres positifs dont la somme est 54 et dont le produit xyz est le plus grand possible.

8. Trouvez les coordonnées (x, y, z) du point d'un plan qui est le plus près de l'origine (0, 0, 0) si le plan est décrit par l'équation suivante.

$$3x + 2y + 4z - 1 = 0$$

(Trouvez uniquement les coordonnées du point critique. Il n'est pas nécessaire de montrer qu'il s'agit bel et bien d'un minimum.)

9. Une boite rectangulaire a un volume de 300 cm³. Toutefois, le matériel utilisé pour construire le fond et le dessus de la boite coute 1,5 fois plus cher que le matériel utilisé pour construire les côtés. Quelles doivent être les dimensions de la boite (hauteur, largeur, profondeur) pour que la boite coute le moins cher possible ?

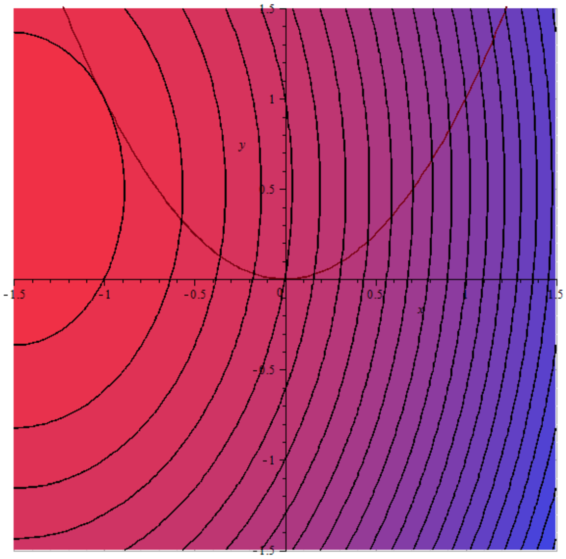


11. Les multiplicateurs de Lagrange

Parfois, on doit trouver le maximum d'une fonction, mais en respectant certaines contraintes. Par exemple, imaginons que la température en fonction de la position sur une plaque dans le plan xy est donnée par

$$t = 2x^2 + y^2 + 6x - y + 100$$

On pourrait alors chercher la température maximale ou minimale atteinte le long d'une trajectoire particulière sur la plaque (disons $y = x^2$, en rouge sur le graphique suivant).



Évidemment, on peut faire le remplacement $y = x^2$ dans la fonction pour obtenir

$$\begin{aligned} t &= 2x^2 + x^4 + 6x - x^2 + 100 \\ &= x^4 + x^2 + 6x + 100 \end{aligned}$$

et on pourrait alors chercher le maximum ou le minimum de cette fonction. On a alors

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(x^4 + x^2 + 6x + 100\right) = 0$$

$$4x^3 + 2x + 6 = 0$$

On peut alors résoudre cette équation (ce n'est pas facile de résoudre une équation du 3^{e} degré, mais on peut facilement constater que x = -1 est une solution.)

Comme la valeur de la deuxième dérivée à cet endroit est positive,

$$\left[\frac{d^2\left(4x^3 + 2x + 6\right)}{dx^2}\right]_{x=-1} = \left[12x^2 + 2\right]_{x=-1} = 14$$

il s'agit d'un minimum. On a donc un minimum à x = -1 et y = 1. C'est ce que semble indiquer la figure. À cet endroit, la trajectoire vient juste frôler la courbe de niveau t = 96 qui est la plus basse qu'elle touche.

Toutefois, il existe une autre façon d'obtenir ce résultat. Il s'agit de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Elle peut être particulièrement utile parce que la méthode employée précédemment peut devenir très fastidieuse, surtout si les fonctions sont implicites.

Supposons qu'on cherche les extrémums d'une fonction $f(x,y)$ (la température dans notre exemple) et qu'on doive suivre une contrainte donnée par $g(x,y) = 0$ ($x^2 - y = 0$ dans notre exemple), alors le théorème de Lagrange affirme qu'aux extrémums on a

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$$

où λ est un nombre réel appelé *multiplicateur de Lagrange.* Tentons de comprendre pourquoi cette équation est vraie.

1) *On atteint la valeur extrême quand la trajectoire est perpendiculaire au gradient de la fonction* $\vec{\nabla} f$ *(donc quand la trajectoire est parallèle aux courbes de niveau)*.

   On le voyait très bien sur notre exemple : on a atteint le minimum quand notre trajectoire est devenue parallèle à une courbe de niveau. C'est en fait toujours ce qui va se produire. Si la trajectoire traversait des courbes de niveau, c'est qu'on se déplacerait vers un endroit où la fonction croit ou décroit et on ne serait pas à un extrémum. Cela implique qu'aux extrémums, **la trajectoire est perpendiculaire au gradient** (rappelez-vous, le gradient est toujours perpendiculaire aux courbes de niveau).

   Voici une preuve plus formelle de cela. On peut imaginer qu'on se déplace en fonction du temps le long de la trajectoire. Dans ce cas, la position en x et y de la trajectoire dépendra du temps.

$$x = h(t) \qquad \text{et} \qquad y = k(t)$$

   En se déplaçant le long de la trajectoire, la valeur de la fonction $f(x,y)$ va changer en fonction du temps. Sa valeur sera donc

$$f\left(h(t), k(t)\right)$$

   Quand cette fonction atteindra un extrémum, on aura évidemment

$$\frac{df}{dt} = 0$$

   Comme la règle des fonctions composées dit que

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

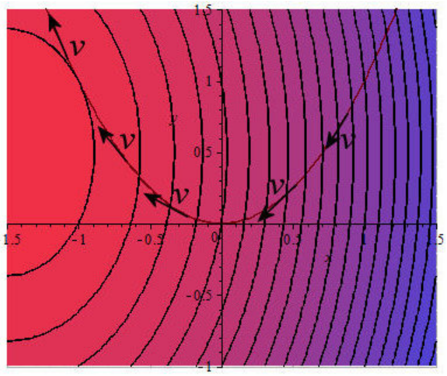
   on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}\right)=0$$

Le premier vecteur est le gradient de la fonction et le deuxième terme est la vitesse de déplacement le long de la trajectoire. Or, ce vecteur est toujours dans la direction du déplacement, donc dans la direction de la trajectoire, comme sur la figure. On a donc



$$\vec{\nabla} f\cdot\vec{v}=0$$

Si le produit scalaire entre les deux vecteurs est nul à l'extrémum, c'est qu'ils sont perpendiculaires. Le gradient est donc perpendiculaire à la trajectoire aux extrémums.

2) *Le gradient $\vec{\nabla} g$ est perpendiculaire à la trajectoire.*

Rappelez-vous comment on trouve un vecteur perpendiculaire à une courbe : on écrit la fonction $g\ (x,y)$ comme une fonction de deux variables $z = g\ (x,y)$ et on fait le gradient de cette fonction $\vec{\nabla} g$. Le vecteur obtenu est perpendiculaire à la trajectoire.

3) *Puisque $\vec{\nabla} f$ et $\vec{\nabla} g$ sont tous deux perpendiculaires à la trajectoire aux extrémums, alors ce sont des vecteurs parallèles. On a donc $\vec{\nabla} f=\lambda\vec{\nabla} g$ aux extrémums.*

En composantes, $\vec{\nabla} f=\lambda\vec{\nabla} g$ devient

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}\right)=\lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial g}{\partial y}\vec{j}\right)$$

Pour que cette équation soit vraie, il fait que les composantes en x soient égales et que les composantes en y soient égales. On a alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x}\qquad\text{et}\qquad\frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}$$

Ainsi, pour trouver les extrémums, on doit résoudre les équations suivantes.

Méthode de Lagrange pour trouver les extrémums

On cherche les extrémums d'une fonction f avec la condition $g\,(x,y) = 0$.

On doit résoudre le système d'équations suivant.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}$$
$$g = 0$$

Voyons ce qu'on obtient avec notre exemple. On cherchait alors le maximum de

$$t = 2x^2 + y^2 + 6x - y + 100$$

En respectant la condition $g = x^2 - y = 0$. Les trois équations donnent alors

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \quad \rightarrow \quad 4x + 6 = \lambda(2x)$$
$$\frac{\partial t}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \quad \rightarrow \quad 2y - 1 = \lambda(-1)$$
$$g = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - y = 0$$

On utilise la valeur de λ de la 2^e équation ($\lambda = -2y + 1$) dans la 1re équation pour obtenir

$$4x + 6 = (-2y + 1)(2x)$$
$$4x + 6 = -4xy + 2x$$
$$2x + 6 = -4xy$$
$$x + 3 = -2xy$$

On utilise alors la 3^e équation pour remplacer y. On a alors

$$x + 3 = -2xy$$
$$x + 3 = -2xx^2$$
$$2x^3 + x + 3 = 0$$

La solution de cette équation est x = -1. Il y a donc un extrémum à (-1, 1). C'est ce qu'on a obtenu précédemment.

Est-ce un maximum ou un minimum (ou ni l'un ni l'autre) ?

Il existe des critères pour déterminer si l'extrémum est un maximum, un minimum ou ni l'un ni l'autre, mais ils sont plutôt compliqués. Le plus simple est souvent de trouver la valeur de la fonction à l'extrémum et de la comparer avec les valeurs de la fonction pour des points de chaque côté de l'extrémum.

Par exemple, dans notre exemple, la température est de 96 à l'extrémum. On peut alors facilement calculer la valeur de la fonction ailleurs sur la trajectoire. Par exemple, elle est de 100 à (0,0) et de 108 à (2,4). Comme la valeur est plus élevée de chaque côté de l'extrémum, on a un minimum.

Si les valeurs avaient été plus basses de chaque côté, on aurait eu un maximum. Si on avait eu une valeur plus grande d'un côté et un autre plus petite de l'autre côté, il n'y aurait pas de maximum ou de minimum.

Attention aux solutions pour lesquelles λ = 0

Il se peut qu'on tombe sur une solution où λ = 0. Cela voudrait dire que le gradient de la fonction est nul. C'est possible que cela arrive si la trajectoire passe exactement sur un extrémum de la fonction. C'est alors une véritable solution.

Parfois, on peut avoir l'impression qu'il y a une solution avec λ = 0 si seulement une composante du gradient est nulle. Toutefois, cette solution ne pourra pas satisfaire en même temps les deux équations avec des λ. Dans ce cas, il faut rejeter cette solution. (Il y aura une telle fausse solution dans le prochain exemple.)

Exemple

Trouvez les extrémums de la fonction $f = xy$ si les points doivent être sur l'ellipse $4x^2 + y^2 = 4$.

L'équation de la contrainte est

$$g = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$$

Les trois équations de la méthode de Lagrange sont donc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \qquad \rightarrow \qquad y = \lambda(8x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \qquad \rightarrow \qquad x = \lambda(2y)$$

$$g = 0 \qquad \rightarrow \qquad 4x^2 + y^2 - 4 = 0$$

En utilisant la première équation dans la deuxième, on a

$$x = 2\lambda \cdot 8\lambda x$$

$$x - 16\lambda^2 x = 0$$

$$x\left(1-16\lambda^2\right)=0$$

Il y a une première solution x = 0 qui vous donne les deux points (0, 2) et (0,-2). Toutefois, cette solution correspond à λ = 0 si on se fie à l'équation $x=\lambda(2y)$. On constate alors qu'il y a un problème puisque l'équation $y=\lambda(8x)$ ne peut pas être vraie si λ = 0. C'est donc une fausse solution.

Selon l'équation $x\left(1-16\lambda^2\right)=0$, il y a aussi la solution λ = ± ¼. Avec l'équation $y=\lambda(8x)$, cette solution nous amène à

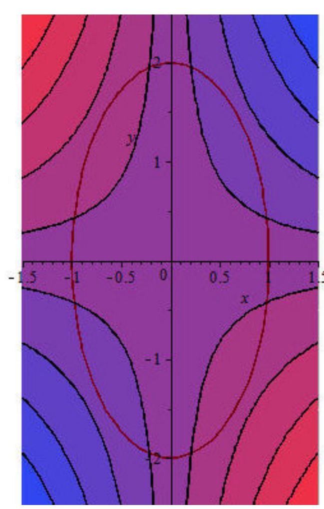
$$\begin{gathered} y=\pm\frac{1}{4}8x \\ y=\pm 2x \end{gathered}$$

L'équation de la contrainte donne alors

$$\begin{gathered} 4x^2+y^2-4=0 \\ 4x^2+(\pm 2x)^2-4=0 \\ 4x^2+4x^2-4=0 \\ x^2=\frac{1}{2} \end{gathered}$$

Si x^2 = ½, on doit avoir $y^2 = 2$. On a alors les extrémums suivants.

Point	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$	$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$	$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right)$
f (x,y)	1	-1	1	-1
	max	min	max	min



Imaginons qu'on se déplace le long de l'ellipse dans le sens contraire des aiguilles d'une montre à partir du point le plus haut de l'ellipse, soit le point (0,2). À cet endroit la fonction vaut 0.

À partir de ce point, la fonction décroit pour atteindre -1 au point ($-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}$). Après ce point, la fonction croit pour atteindre 1 à l'extrémum suivant ($-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}$). Le point ($-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}$) est donc un minimum.

Avant le point ($-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}$), la fonction croit pour atteindre 1. Après ce point, la fonction décroit pour atteindre -1 à l'extrémum suivant ($\sqrt{2}/2,\ -\sqrt{2}$). Le point ($-\sqrt{2}/2,\ -\sqrt{2}$) est donc un maximum.

Avant le point ($\sqrt{2}/2,\ -\sqrt{2}$), la fonction décroit pour atteindre -1. Après ce point, la fonction croit pour atteindre 1 à l'extrémum suivant ($\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}$). Le point ($\sqrt{2}/2,\ -\sqrt{2}$) est donc un minimum.

Avant le point ($\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}$), la fonction croit pour atteindre 1. Après ce point, la fonction décroit pour atteindre -1 à l'extrémum suivant ($-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}$) Le point ($\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}$) est donc un maximum.

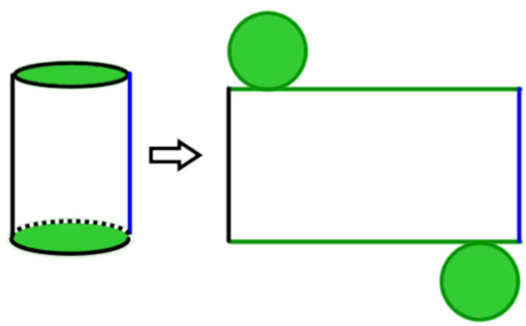
Exemple

On doit construire une boite cylindrique ayant une surface de 18 m². Quelles sont les dimensions (rayon et hauteur) de la boite qui permettent d'avoir le plus grand volume ?

Le volume d'un cylindre est

$$V = \pi r^2 h$$

C'est notre fonction à maximiser. Toutefois, il y a une contrainte : la surface doit être de 18 m². Cette surface est égale à la surface d'un rectangle (le côté) et deux fois la surface d'un cercle.



www.alloprof.qc.ca/BV/pages/m1487.aspx

On a donc

$$2\pi r^2 + 2\pi rh = 18m^2$$

On peut écrire cette contrainte sous la forme

$$g = 2\pi r^2 + 2\pi rh - 18m^2 = 0$$

Les équations de Lagrange sont donc

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \lambda \frac{\partial g}{\partial r} \qquad \rightarrow \qquad 2\pi rh = \lambda(4\pi r + 2\pi h)$$
$$\frac{\partial V}{\partial h} = \lambda \frac{\partial g}{\partial h} \qquad \rightarrow \qquad \pi r^2 = \lambda(2\pi r)$$
$$g = 0 \qquad \rightarrow \qquad 2\pi r^2 + 2\pi rh - 18m^2 = 0$$

La deuxième équation nous donne

$$\pi r^2 = \lambda(2\pi r)$$
$$r^2 = 2r\lambda$$

On a une solution r = 0, qui ne fait aucun sens ici (et qui n'est pas une vraie solution de toute façon). Il reste donc

$$r = 2\lambda$$

On peut ensuite remplacer cette valeur de λ dans la première équation. On obtient alors

$$2\pi rh = \lambda(4\pi r + 2\pi h)$$
$$2\pi rh = \frac{r}{2}(4\pi r + 2\pi h)$$
$$4h = 4r + 2h$$
$$2h = 4r$$
$$h = 2r$$

On utilise finalement cette valeur dans la 3e équation pour obtenir

$$2\pi r^2 + 2\pi rh - 18m^2 = 0$$
$$2\pi r^2 + 2\pi r(2r) - 18m^2 = 0$$
$$2\pi r^2 + 4\pi r^2 - 18m^2 = 0$$
$$6\pi r^2 - 18m^2 = 0$$
$$\pi r^2 - 3m^2 = 0$$
$$r = 0,9772m$$

De là on trouve h = 1,9544 m et que le volume est 5,8632 m³.

On s'assure qu'il s'agit d'un maximum en calculant la valeur du volume pour des valeurs plus grande et plus petite que le r à l'extrémum. À r = 1 m, le volume est 5,8584 m³ et à r = 0,95 m, le volume est 5,8565 m³. Notre extrémum est donc un maximum.

____

La méthode précédente est toujours valide si on a affaire à des fonctions de plus de 2 variables. Avec trois variables, $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$ et la contrainte $g\,(x,y,z) = 0$ (qui a maintenant 3 variables), nous donne les équations suivantes

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z}$$
$$g = 0$$

Exemple

On doit construire une boite rectangulaire sans couvercle ayant une surface de 12 m². Quelles sont les dimensions (longueur, largeur et hauteur) de la boite qui permettent d'avoir le plus grand volume ?

Le volume de cette boite est (x est la longueur, y est la largeur et z est la hauteur.)

$$V = xyz$$

C'est notre fonction à maximiser. Toutefois, il y a une contrainte : la surface doit être de 12 m². Pour cette boite, on a deux côtés ayant l'aire xz, deux côtés ayant l'aire yz et le fond de la boite qui a l'aire xy.

On a donc

$$2xz + 2yz + xy = 12m^2$$

On peut écrire cette contrainte sous la forme

$$g = 2xz + 2yz + xy - 12m^2 = 0$$

Les équations de Lagrange sont donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x} & &\rightarrow & yz &= \lambda(2z + y) \\
\frac{\partial V}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial y} & &\rightarrow & xz &= \lambda(2z + x) \\
\frac{\partial V}{\partial z} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial z} & &\rightarrow & xy &= \lambda(2x + 2y) \\
g &= 0 & &\rightarrow & 2xz + 2yz + xy - 12m^2 &= 0
\end{aligned}$$

Il n'y a pas de méthode bien définie pour résoudre de tels systèmes d'équations linéaires. Il faut taponner et faire preuve d'un peu d'ingéniosité. Pour résoudre ces équations, on peut multiplier la première équation par x, la deuxième par y et la troisième par z. On a alors

$$\begin{aligned}
xyz &= \lambda(2xz + xy) \\
xyz &= \lambda(2yz + xy) \\
xyz &= \lambda(2xz + 2yz) \\
2xz + 2yz &+ xy - 12m^2 = 0
\end{aligned}$$

En égalant les côtés droits des 2 premières équations, on arrive à

$$\begin{aligned}
\lambda(2xz + xy) &= \lambda(2yz + xy) \\
xz &= yz \\
x &= y
\end{aligned}$$

En égalant les côtés droits des 2e et 3e équations, on a

$$\begin{aligned}
\lambda(2yz + xy) &= \lambda(2xz + 2yz) \\
2yz + xy &= 2xz + 2yz \\
xy &= 2xz \\
y &= 2z
\end{aligned}$$

En substituant $x = y$ dans l'équation $2xz + 2yz + xy - 12m^2 = 0$, on arrive à

$$\begin{aligned}
2yz + 2yz + yy - 12m^2 &= 0 \\
4yz + y^2 - 12m^2 &= 0
\end{aligned}$$

Puis en substituant $y = 2z$ dans cette équation, on trouve la valeur de z.

$$\begin{aligned}
4(2z)z + (2z)^2 - 12m^2 &= 0 \\
8z^2 + 4z^2 &= 12m^2 \\
12z^2 &= 12m^2 \\
z &= 1m
\end{aligned}$$

De là, on trouve que y = 2 m et x = 2 m.

____

SÉRIE D'EXERCICES 14

Trouvez les extrémums des fonctions suivantes sous les contraintes indiquées. Donnez la valeur de la fonction à ces extrémums.

1. $f = x^2 + y^2 \quad ; \quad 2x + 3y = 4$

2. $f = 2x^2 + xy - y^2 + y \quad ; \quad 2x + 3y = 1$

3. $f = y^2 - 4xy + 4x^2 \quad ; \quad x^2 + y^2 = 1$

4. $f = x^2 + y^2 + z^2 \quad ; \quad x + y + z = 24$

5. $f = xyz \quad ; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3$

6. Quel est le point du cercle $x^2 + y^2 = 4$ le plus près du point (2, 3) ?

7. Une entreprise fabrique des ski-doos dans deux usines différentes. S'il y a x ski-doos fabriqués à l'usine d'Amos et y ski-doos fabriqués à l'usine de Senneterre, le cout de production (en dollars) est

$$C = 2x^2 + xy + y^2 + 1000$$

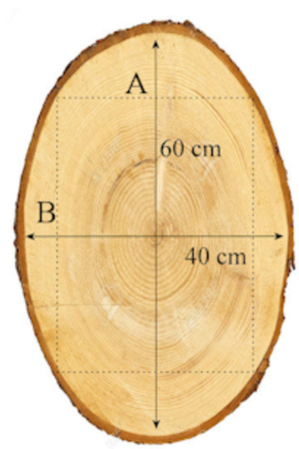
L'entreprise reçoit une commande de 500 ski-doos. Combien doit-elle en fabriquer dans chaque usine pour que le cout de production soit le plus petit ?

8. On doit fabriquer une boite cylindrique ayant un volume de 300 cm³. Sachant que le matériel composant le côté de la boite coute 0,5 ¢/cm² et que le cout du matériel qui forme les bouts (fond et couvercle) de la boite coute 0,8 ¢/cm², déterminer le cout et les dimensions de la boite la moins chère possible.

9. La résistance d'une poutre rectangulaire est proportionnelle à sa largeur et au carré de son épaisseur.

$$R = kAB^2$$

(k est une constante, A est la largeur et B est l'épaisseur).



Notez que même si on indique sur la figure que A est dans le sens horizontal du tronc, il pourrait aussi être dans le sens vertical. Il faut donc considérer les deux possibilités.

Déterminer les dimensions de la poutre rectangulaire la plus résistante qu'on peut tailler à partir d'un tronc de section elliptique ayant un grand axe de 60 cm et un petit axe de 40 cm. (Les lignes en pointillés sur la figure représentent une des dimensions possibles pour la poutre.)

Indice : L'équation de l'ellipse qui décrit le bord du tronc est

$$\frac{x^2}{(20cm)^2} + \frac{y^2}{(30cm)^2} = 1$$

10. Dans une pièce, la température (en °C) est donnée par

$$T = 1\tfrac{°C}{m^2} \cdot x^2 + 2\tfrac{°C}{m^2} \cdot y^2 + 4\tfrac{°C}{m} \cdot z + 10°C$$

À quel endroit la température est-elle minimale sur le plan

$$x + 2y + z = 10m$$

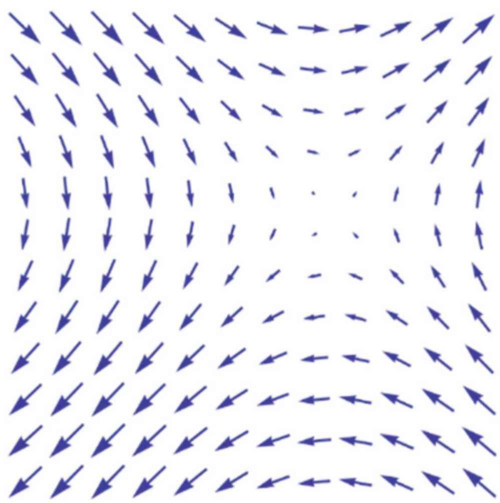
et quelle est cette température minimale ?

12. Divergence et rotationnel

L'opérateur $\vec{\nabla}$ est très utilisé en sciences. Il permet d'obtenir le gradient d'une fonction scalaire, mais il permet aussi d'obtenir bien d'autres choses.

On peut appliquer cet opérateur à un champ vectoriel. Un champ vectoriel est une quantité vectorielle qui peut varier d'un endroit à l'autre. Ce pourrait être un champ électrique, la vitesse d'un fluide ou un champ gravitationnel, par exemple. Voici comment on représente un champ vectoriel bidimensionnel.

(On remarque assez facilement que le gradient d'une fonction scalaire est un champ vectoriel.)



en.wikipedia.org/wiki/Vector_field

La divergence

Avec l'opérateur $\vec{\nabla}$, on peut calculer la divergence d'un champ vectoriel. La divergence est

$$\text{div}\vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

Voici comment on calcule la divergence du champ $\vec{V} = 3xy\vec{i} + y^2 z\vec{j} + (x + zy)\vec{k}$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) \cdot \left(3xy\vec{i} + y^2 z\vec{j} + (x + zy)\vec{k} \right) \\
&= \frac{\partial(3xy)}{\partial x} + \frac{\partial\left(y^2 z\right)}{\partial y} + \frac{\partial(x + zy)}{\partial z} \\
&= 3y + 2yz + y
\end{aligned}$$

Au point (1, 2, 3), la divergence est

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{V} &= 3\cdot 2+2\cdot 2\cdot 3+2\\ &= 20\end{aligned}$$

Plusieurs lois de la physique peuvent s'écrire avec une divergence. Par exemple, deux des 4 équations de Maxwell peuvent s'écrire sous la forme suivante.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

On voit que la divergence du champ électrique est liée à la densité de charge à cet endroit et que la divergence du champ magnétique est toujours nulle.

On peut donner une interprétation rapide de ce qu'est la divergence en supposant que le champ vectoriel représente le mouvement d'un fluide. Supposons qu'on veut connaitre la divergence à un point, on imagine un petit cube à cet endroit. S'il sort plus de fluide dans le cube qu'il en entre (donc si le cube perd du fluide), alors la divergence est positive. S'il entre plus de fluide dans le cube qu'il en sort (donc si le cube accumule du fluide), alors la divergence est négative.

Le rotationnel

Avec l'opérateur $\vec{\nabla}$, on peut aussi calculer le rotationnel d'un champ vectoriel. Le rotationnel est

$$\text{rot}\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V}$$

Voici comment on calcule le rotationnel du champ $\vec{V} = 3xy\vec{i} + y^2z\vec{j} + (x+zy)\vec{k}$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\times\left(3xy\vec{i}+y^2z\vec{j}+(x+zy)\vec{k}\right)\\ &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 3xy & y^2z & (x+zy)\end{vmatrix}\\ &= \left(\frac{\partial(x+zy)}{\partial y}-\frac{\partial(y^2z)}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial(x+zy)}{\partial x}-\frac{\partial(3xy)}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial(y^2z)}{\partial x}-\frac{\partial(3xy)}{\partial y}\right)\vec{k}\\ &= (z-y^2)\vec{i}-\vec{j}-3x\vec{k}\end{aligned}$$

Au point (1, 2, 3), le rotationnel est

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = -\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$$

Plusieurs lois de la physique peuvent s'écrire avec un rotationnel. Par exemple, deux des 4 équations de Maxwell peuvent s'écrire sous la forme suivante.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On voit que le rotationnel du champ électrique est lié à la variation du champ magnétique à cet endroit et que le rotationnel du champ magnétique est lié à la variation du champ électrique.

On peut donner une interprétation rapide de ce qu'est le rotationnel en supposant que le champ vectoriel représente le mouvement d'un fluide. Supposons qu'on veut connaitre le rotationnel à un point, on imagine qu'on place un petit objet à cet endroit. Si le petit objet commence à tourner, c'est que le rotationnel n'est pas nul.

Solutions des exercices

__Série d'exercices 1__

1. -3,0509 (-11/$\sqrt{13}$)
2. 0
3. 1,412 ($\sqrt{2}$)

__Série d'exercices 2__

1. $\Delta_x f = 12x\Delta x + 6(\Delta x)^2 + 3y\Delta x$

$$\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = 12x + 6\Delta x + 3y$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = 12x + 3y$$

$$\Delta_y f = 3x\Delta y + 2y\Delta y + (\Delta y)^2$$

$$\frac{\Delta_y f}{\Delta y} = 3x + 2y + \Delta y$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f}{\Delta y}=3x+2y$$

2. $\Delta_x f=3x^2y^2\Delta x+3xy^2(\Delta x)^2+y^2(\Delta x)^3$

$$\frac{\Delta_x f}{\Delta x}=3x^2y^2+3xy^2\Delta x+y^2(\Delta x)^2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x}=3x^2y^2$$

$$\Delta_y f=2x^3y\Delta y+x^3(\Delta y)^2$$

$$\frac{\Delta_y f}{\Delta y}=2x^3y+x^3\Delta y$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f}{\Delta y}=2x^3y$$

3. $\Delta_x f=\sin(x+y)(\cos\Delta x-1)+\cos(x+y)\sin\Delta x$

$$\frac{\Delta_x f}{\Delta x}=\sin(x+y)\left(\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}\right)+\cos(x+y)\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x}=\cos(x+y)$$

$$\Delta_y f=\sin(x+y)(\cos\Delta y-1)+\cos(x+y)\sin\Delta y$$

$$\frac{\Delta_y f}{\Delta y}=\frac{\Delta_x f}{\Delta x}=\sin(x+y)\left(\frac{\cos\Delta y-1}{\Delta y}\right)+\cos(x+y)\frac{\sin\Delta y}{\Delta y}$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f}{\Delta y}=\cos(x+y)$$

<u>Série d'exercices 3</u>

1. $\frac{\partial z}{\partial x}=8x^3y^3-y^2 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=6x^4y^2-2xy+3$

2. $\frac{\partial z}{\partial x}=8x\left(x^2+y^2\right)^3 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=8y\left(x^2+y^2\right)^3$

3. $\frac{\partial z}{\partial x}=\sin\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x^2}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$

4. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{2\sqrt{4-xy}}\sin\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\sqrt{4-xy}}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{2\sqrt{4-xy}}\sin\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x\sqrt{4-xy}}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

5. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{v}{\sqrt{1-u^2v^2}}-\frac{2uv^2}{\sqrt{1-u^4v^4}}$ $\quad\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u}{\sqrt{1-u^2v^2}}-\frac{2u^2v}{\sqrt{1-u^4v^4}}$

6. $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{2}{s}\cosh\left(\frac{r}{s}\right)\sinh\left(\frac{r}{s}\right)$ $\quad\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{-2r}{s^2}\cosh\left(\frac{r}{s}\right)\sinh\left(\frac{r}{s}\right)$

7. $\frac{\partial z}{\partial x}=\left(y\ln(xy)+\frac{1}{x}\right)e^{xy}$ $\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x\ln(xy)+\frac{1}{y}\right)e^{xy}$

8. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$ $\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$

9. $\frac{\partial h}{\partial r}=\frac{1}{r}$ $\quad\frac{\partial h}{\partial s}=\frac{1}{s}$ $\quad\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{1}{t}$

10. $\frac{\partial p}{\partial u}=\frac{3}{1-(3u+2v)^2}$ $\quad\frac{\partial p}{\partial v}=\frac{2}{1-(3u+2v)^2}$

12. a) -0,0172 °C/h. C'est à ce rythme qu'augmente la température en fonction du temps à une profondeur de 2 m. (En fait, elle diminue)
b) 1,823 °C/m. C'est à ce rythme qu'augmente la température avec la profondeur à une profondeur de 2 m.

Série d'exercices 4

1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2y^2$ $\quad\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12xy^2-2x^2+6$ $\quad\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4y^3-4xy$

2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2}{x+y}-\frac{4x}{(x+y)^2}+\frac{2x^2}{(x+y)^3}$ $\quad\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x^2}{(x+y)^3}$ $\quad\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-2x}{(x+y)^2}+\frac{2x^2}{(x+y)^3}$

3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-\cos x}{y^2}$ $\quad\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{6\cos x}{y^4}$ $\quad\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2\sin x}{y^3}$

4. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y\cosh(xy)+xy^2\sinh(xy)$ $\quad\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^3\sinh(xy)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\cosh(xy)+x^2y\sinh(xy)$

5. $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=ye^{xy}(2+xy)$

Série d'exercices 5

1. $df=\left(16xy^3-4y^3+3y^2\right)dx+\left(24x^2y^2-12xy^2+6xy\right)dy$

2. $df=\frac{y}{(x+y)^2}dx-\frac{x}{(x+y)^2}dy$

3. $df = \left(-\frac{\sin(xy)}{xy} - \frac{\cos(xy)}{x^2 y^2} \right) dx + \left(-\frac{\sin(xy)}{y^2} - \frac{2\cos(xy)}{xy^3} \right) dy$

4. $df = \frac{xy\,\text{sech}^2\left(x^2 y^2\right)}{\sqrt{\tanh\left(x^2 y^2\right)}}\left(ydx + xdy \right)$

Série d'exercices 6

1. -0,094
2. 0,134
3. -0,02
4. -1,62 m/s
5. -66,5 Pa

Série d'exercices 7

1. a) 13,75 ± 0,11 cm b) 60,45 ± 0,39° c) 40,54 ± 0,64 cm²
2. 54,55 ± 0,55 Ω

Série d'exercices 8

1. 9,611
2. 0,3536 ($\sqrt{2}/4$)
3. 1
4. -0,7071 ($-\sqrt{2}/2$)
5. 1,006 ($9/(4\sqrt{5})$)
6. -31,36
7. a) -0,8 m/m b) 0,8485 m/m
8. a) 169,67 m b) 0,2296 c) 116,6° (en tournant vers l'est) et 63,4° (en tournant vers l'ouest).

Série d'exercices 9

1. $6\vec{j}$
2. $0,2759\vec{i} - 1,7241\vec{j}$
3. $-0,2236\vec{i} - 0,4472\vec{j}$
4. $3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$
5. $2\sqrt{6}$

Série d'exercices 10

1. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ à 225°

2. 0,9014 ($\sqrt{13}/4$) à -56,31°

3. 1,9518 à 63,43°

4. -57,38° et 122,62°

5. a) 165,96° (vers l'ouest)
b) 14,04° (vers l'est)
c) 104,04° (vers l'est) et 75,96° (vers l'ouest)

6. a) 26,57° (vers l'est) b) -0,25665

7. $\vec{n}=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i}-\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}\right)$

8. $\vec{n}=\pm\left(0{,}1477\vec{i}-0{,}9890\vec{j}\right)$

9. $\vec{n}=\pm\left(\frac{8}{\sqrt{65}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{65}}\vec{j}\right)$

10. $\vec{n}=\pm\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\vec{i}+\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}\right)$

11. $\vec{n}=\pm\left(-0,41797\vec{i}+0,83595\vec{j}-0,35566\vec{k}\right)$

12. $\vec{n}=\pm\left(\frac{3}{\sqrt{19}}\vec{i}+\frac{3}{\sqrt{19}}\vec{j}-\frac{1}{\sqrt{19}}\vec{k}\right)$

13. $\vec{n}=\pm\left(\frac{5}{\sqrt{113}}\vec{i}+\frac{8}{\sqrt{113}}\vec{j}-\frac{12}{\sqrt{678}}\vec{k}\right)$

14. $z=4x+7y-9$

15. $z=-2x-y$

16. $z=-\frac{3x}{4}+\frac{25}{2}$

Série d'exercices 11

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{1-xye^{x}-2x^{2}}{xe^{x}}$

2. $\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x}$

3. -1

4. -0,005

5. -0,02

6. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{11}{5}$ $\qquad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{23}{5}$

7. $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 1$

8. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-13}{8}$ $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{4}$

9. 1/150

10. 0,01

Série d'exercices 12

1. -5/27

2. $\frac{40 - e^{-4}}{48 + e^{-4}} \approx 0,832634$

3. $-\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{11}{2} \approx -6,799$

4. -1 m²/s

5. 0

6. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

7. $\frac{\partial z}{\partial x} = 7$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 15$

8. $\frac{\partial z}{\partial x} = -6e^2 \approx -44,33$ $\frac{\partial z}{\partial y} = e^2 \approx 7,389$

9. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3e^6 + 2e + 32 \approx 1247,7$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 3e^6 + e + 32 \approx 1245,0$

10. $F_x = 8,448N$ $F_y = 22,464N$

Série d'exercices 13

1. Minimum à (-3/2, 1/4)

2. Minimum à (4, 2), point de selle à (4/3, 2/3)

3. Maximum à (1, 3/2)

4. Minimum à (1, -1), point de selle à (0, 0)

5. Minimum à (-2, 3), point de selle à (-2, -3)

6. Minimum à (1, 0), maximum à (-1, 0)

7. 18, 18 et 18

8. x = 3/29, y = 2/29 et z = 4/29

9. $x = \sqrt[3]{200}cm \approx 5,848cm,\ \ y = \sqrt[3]{200}cm \approx 5,848cm,\ \ z = 300 / 200^{2/3}cm = 8,772cm$

Série d'exercices 14

1. Minimum à (8/13, 12 /13). La fonction vaut alors 16/13.

2. Minimum à (-1/16, 3/8). La fonction vaut alors 7/32.

3. Minimum à $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ et $\left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$. La fonction vaut alors 0.

Maximum à $\left(\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ et $\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$. La fonction vaut alors 5.

4. Minimum à (8, 8, 8). La fonction vaut alors 192.

5. Minimum à (-1, 1, 1), (1, -1 ,1), (1, 1, -1) et (-1, -1, -1). La fonction vaut alors -1
Maximum à (1, 1, 1), (1, -1,-1), (-1, -1, 1) et (-1, 1, -1). La fonction vaut alors 1

6. $\left(\frac{4}{\sqrt{13}},\frac{6}{\sqrt{13}}\right)$

7. 125 à Amos et 375 à Senneterre

8. Rayon = 3,102 cm, hauteur = 9,926 cm. La boite coute alors 145,08 ¢.

9. $\text{largeur} = \frac{40}{\sqrt{3}} cm \approx 23{,}094 cm$ $\qquad$ $\text{hauteur} = 20\sqrt{6} cm \approx 48{,}990 cm$

10. Au point (2 m, 2 m, 4 m). La température est alors 38 °C