3. Les fonctions de plusieurs variables

1. Définition

Qu'est-ce qu'une fonction de plusieurs variables ?

Parfois, on a affaire à des fonctions de plusieurs variables. Par exemple, on calcule le volume d'un cylindre avec la formule suivante.

$$V = \pi R^2 H$$

On voit que le volume dépend de deux variables : le rayon du cylindre R et la hauteur du cylindre H. Il s'agit d'une fonction de 2 variables.

On peut aussi avoir une fonction qui dépend de plus de deux variables. Par exemple, cette fonction w dépend de 3 variables.

$$w = xyz$$

Exemple

Calculer la valeur de la fonction suivante aux points donnés.

$$z = \sqrt{x+y}$$

a) Si x = 1 et y = 1

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x+y} \\ &= \sqrt{1+1} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

b) Si x = 1 et y = -2

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x+y} \\ &= \sqrt{1+-2} \\ &= \sqrt{-1} \end{aligned}$$

Oups, il n'y a pas de solution dans ce cas. (On va se contenter de travailler avec les nombres réels ici.)

____

Domaine des fonctions de plusieurs variables

Le domaine d'une fonction correspond simplement aux valeurs des variables pour lesquelles la fonction existe (pour les nombres réels). Par exemple, pour la fonction

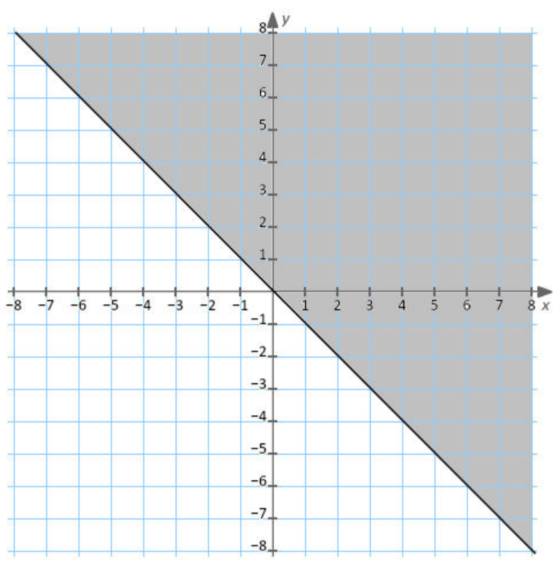
$$z = \sqrt{x+y}$$

Le point (1,1) est un point qui fait partie du domaine.

Le point (1,-2) est un point qui ne fait pas partie du domaine (puisque la fonction n'existe pas avec ces valeurs de x et y.)

Pour une fonction de 2 variables, on peut représenter graphiquement le domaine dans un plan cartésien. Dans le cas de la fonction $z = \sqrt{x+y}$, la fonction existe si

$$x + y \geq 0$$



Ce domaine est représenté en gris dans ce graphique.

(Si on avait $x + y > 0$, la ligne $y = -x$, qui est la limite entre la zone grise et la zone blanche, ne fera pas partie du domaine. Dans ce cas, on l'aurait tracé en pointillé pour indiquer qu'elle n'est pas incluse dans le domaine.)

En fait, il y a principalement 4 éléments d'une fonction qui peuvent restreindre le domaine d'une fonction.

1) Une racine carrée

S'il y a une racine $\sqrt{f(x,y)}$ dans notre fonction, ce qu'il y a dans la racine ne peut pas être négatif. Cela mène à la contrainte suivante.

$$f(x,y) \geq 0$$

2) Une division

S'il y a une division par $f(x,y)$ dans notre fonction, ce diviseur ne peut pas être nul. Cela mène à la contrainte suivante.

$$f(x,y) \neq 0$$

3) Un logarithme

S'il y a un logarithme de fonction $\ln\left(f\left(x,y\right)\right)$ ou $\log\left(f\left(x,y\right)\right)$ dans notre fonction, ce qu'il y a dans le logarithme ne peut pas être négatif ou nul. Cela mène à la contrainte suivante.

$$f\left(x,y\right)>0$$

4) Une fonction trigonométrique inverse

Plusieurs fonctions trigonométriques inverses ont des domaines limités. Par exemple, on ne peut pas faire d'arccosinus ou d'arcsinus de nombre plus grand que 1 ou plus petit que -1. Ainsi, s'il y a un arcsinus $\arcsin\left(f\left(x,y\right)\right)$ dans notre fonction, ce qu'il y a dans l'arcsinus ne peut pas être plus petit que -1 ou plus grand que 1. Cela mène à la contrainte suivante.

$$-1\leq f\left(x,y\right)\leq 1$$

Exemple

Quel est le domaine de cette fonction ?

$$z=\frac{\sqrt{x+y}}{x}$$

On doit avoir

$x+y\geq 0$ (Pour éviter une racine d'un nombre négatif.)
$x\neq 0$ (Pour éviter une division par 0.)

____

SÉRIE D'EXERCICES 1

Calculer la valeur des fonctions suivantes.

1. $z=5x^2y+xy^2$ à $x=1$ et $y=3$

2. $f=xyz+xy+yz$ à $x=-1$ et $y=1$ et $z=2$

3. $y=\sqrt{u^2+v^2}-wx$ à $u=3$, $v=4$, $w=-1$ et $x=-2$

Quel est le domaine des fonctions suivantes ?

4. $z = \dfrac{3x+6y}{x-y}$

5. $z = \ln\left(x^2 + y^2 - 1\right)$

6. $z = \sqrt{9 - x^2 - 9y^2}$

2. Représentation graphique des fonctions de 2 variables

Il y a plusieurs façons de représenter graphiquement une fonction de 2 variables. Notre fonction sera

$$z = f\left(x, y\right)$$

Quand une quantité (*z* ici) peut varier d'un endroit à un autre (si on interprète *x* et *y* comme une position), on a affaire à un champ. Comme cette quantité est un scalaire (*z* est simplement un chiffre ici), on parle de champ scalaire. On cherche donc des façons de représenter un champ scalaire.

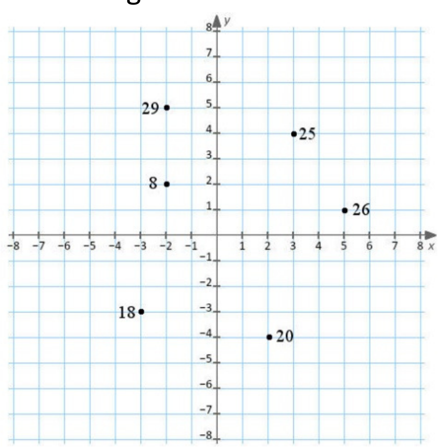
Représentation en deux dimensions

Donner quelques valeurs

Dans cette première façon de représenter une fonction, on donne simplement sa valeur selon la position. Par exemple, voici une représentation de la fonction

$$z = x^2 + y^2$$

On n'a pas donné la valeur de beaucoup de points sur ce graphique. Évidemment, plus on donne de points, plus on a une bonne idée de comment change la fonction selon les valeurs de (x,y).



On pourrait imaginer que la fonction nous donne l'altitude du sol selon la position. Dans cette représentation, on a simplement donné la hauteur du sol à quelques endroits.

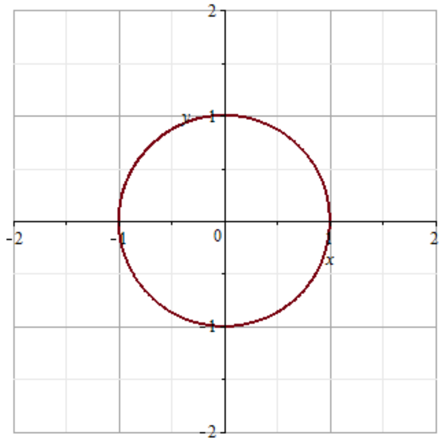
On pourrait aussi imaginer que la fonction donne la température selon la position x et y. dans cette représentation, on a simplement indiqué la température à quelques endroits.

Les courbes de niveau

On peut représenter la fonction en indiquant les courbes pour lesquelles la fonction z a une certaine valeur. Par exemple, on peut tracer la courbe pour laquelle z = 1 de la fonction $z = x^2 + y^2$. Si z = 1, on a

$$x^2 + y^2 = 1$$

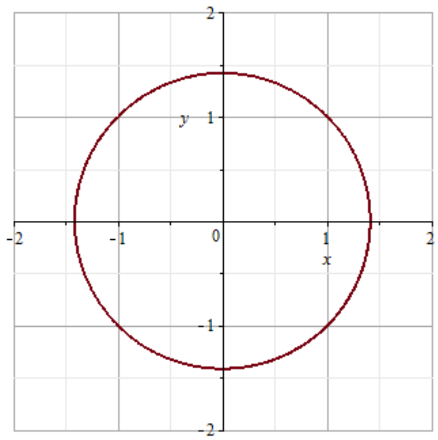
La courbe de cette équation est



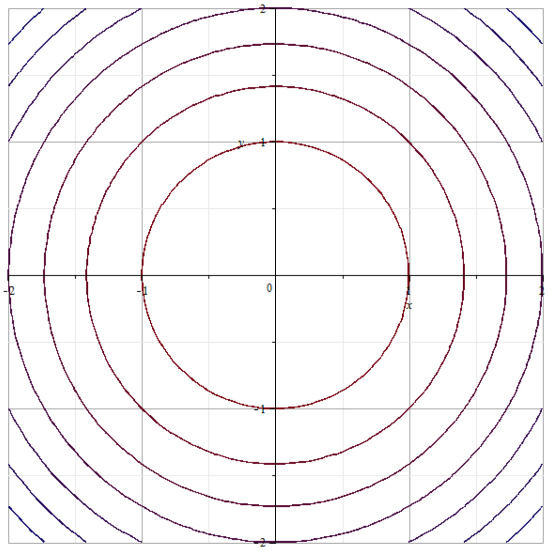
On peut ensuite tracer la courbe pour laquelle z = 2. Si z = 2, on a

$$x^2 + y^2 = 2$$

La courbe de cette équation est



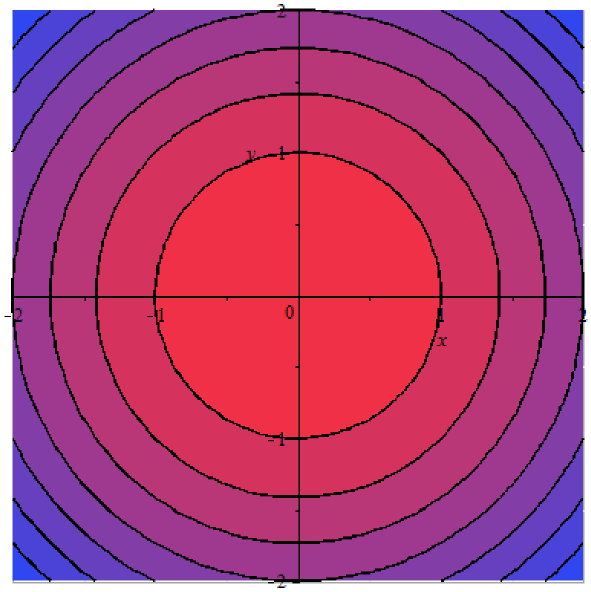
En combinant plusieurs de ces courbes, on arrive à



Sur cette figure, on a les courbes de niveau pour z = 1 (plus petit cercle), jusqu'à z = 7 (plus grand cercle.)

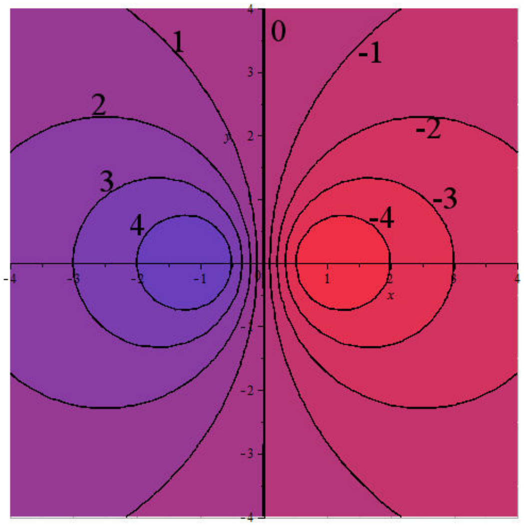
Cette représentation est meilleure puisqu'on voit mieux les variations de la fonction. Si elle représente la température, on voit immédiatement que la température augmente à mesure qu'on s'éloigne de (0,0). Si elle représente l'altitude, on voit que l'altitude augmente à mesure qu'on s'éloigne de (0,0). Ce n'était pas du tout évident quand on représentait uniquement quelques valeurs ici et là.

On pourrait même ajouter un peu de couleur pour illustrer encore mieux les variations. Ici, on passe du rouge pour les basses valeurs de z au bleu pour les grandes valeurs de z.



Voici les courbes de niveau pour une fonction un peu plus compliquée.

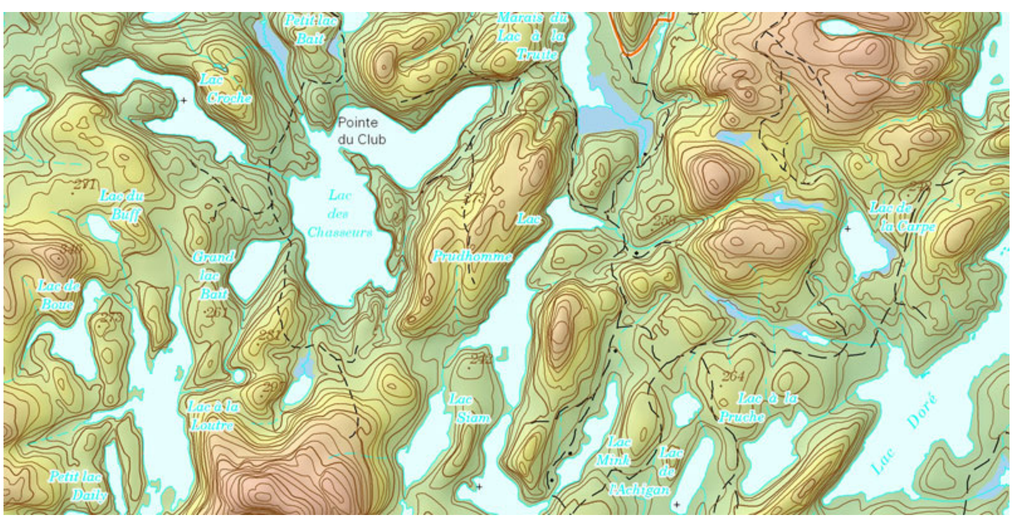
$$z = \frac{-10x}{x^2 + y^2 + 1}$$



Dans le fond, c'est cette représentation qu'on utilise sur les cartes topographiques pour montrer l'altitude du terrain.

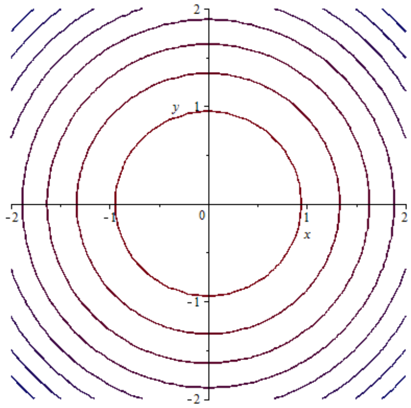
www.gps-globe.com/fr/cartographies-france-ign/571-quart-de-france-ign-sud-ouest-1-25-000.html

On a aussi la version utilisant les couleurs.



www.macarte.ca/topographique.php

__Comment tracer les lignes de niveau avec Maple__



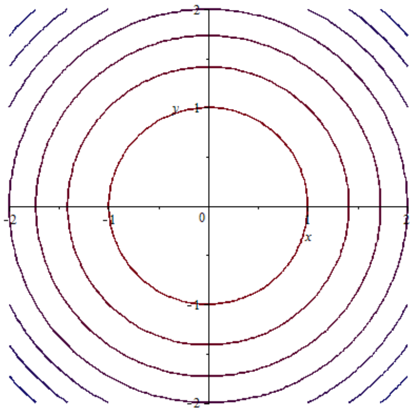
Il faut premièrement écrire

$$with(plots)$$

Pour activer la commande qu'on utilisera ici. On obtient ensuite la courbe de niveau de la fonction $z = x^2 + y^2$ avec la commande

$$contourplot\left(x^2 + y^2, x = -2\,..2, y = -2\,..2\right)$$

On obtient alors ce qu'on voit sur la figure de droite.

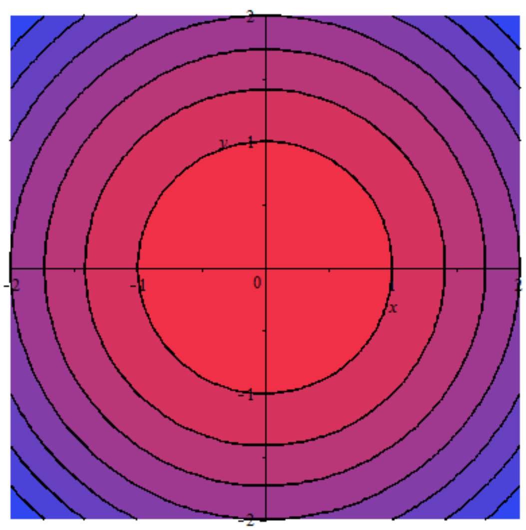


C'est bien, mais on ne sait pas les valeurs des lignes de niveau. On peut régler ce problème en spécifiant les valeurs désirées pour les lignes de niveau.

$$contourplot\left(x^2 + y^2, x = -2\,..2, y = -2\,..2, contours = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]\right)$$

Finalement, on peut ajouter de la couleur avec l'option filledregions.

$$contourplot\left(x^2 + y^2, x = -2\,..2, y = -2\,..2, contours = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], filledregions = true\right)$$



SÉRIE D'EXERCICES 2

Trouver l'équation des courbes de niveau suivantes.

1. La courbe de niveau de $z = y \arctan x$ qui passe par le point (1,4).

2. La courbe de niveau de $z = \left(2x + y^2\right)e^{xy}$ qui passe par le point (0,2)

Avec Maple, tracez les lignes de niveau des fonctions suivantes.

3. $z = x - y + 4$ (On veut les lignes de niveau pour $z = 0, 1, 2, 3, \ldots, 8$ dans la région $-2 < x < 2$, $-2 < y < 2$)

4. $z = 3x^2 + 18xy + 6y^2$ (On veut les lignes de niveau pour $z = -5, 0, 5, 10, \ldots, 25$ dans la région $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$)

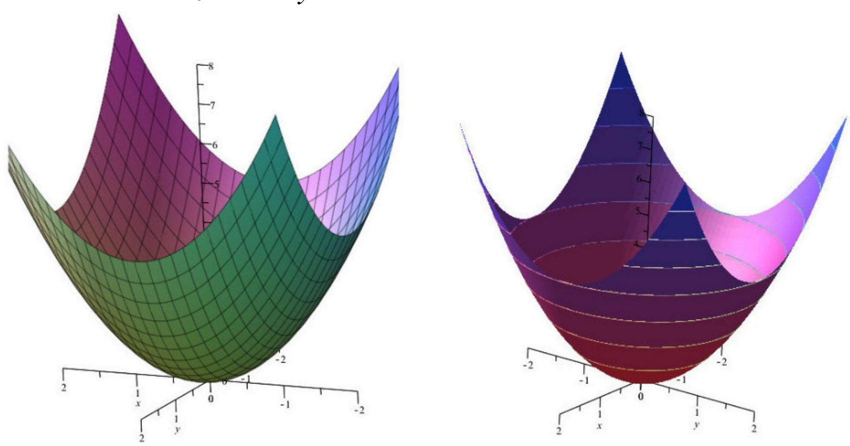
5. $3x + 2y - 5z = 4$ (On veut les lignes de niveau pour $z = -5, -4, -3, -2, \ldots, 5$ dans la région $-5 < x < 5$, $-5 < y < 5$)

6. $x^2 + 9y^2 + z^2 = 9$ (On veut les lignes de niveau pour $z = 0$, ½, 1, 1½, 2 et 2½ dans la région $-3 < x < 3$, $-1 < y < 1$)

7. $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ (On veut les lignes de niveau pour $z = 0, 1, 2, 3, \ldots, 10$ dans la région $-4 < x < 4$, $-4 < y < 4$)

Représentation des fonctions en trois dimensions

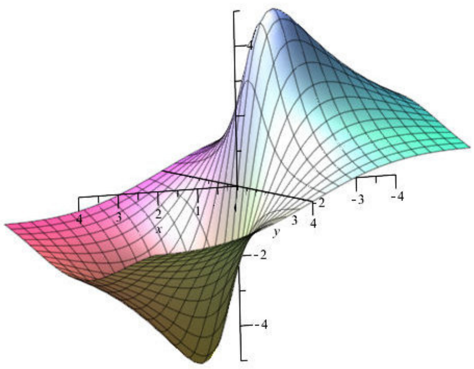
On peut aussi représenter la fonction en interprétant z comme une hauteur au-dessus du plan xy. (Évidemment, c'est au-dessous du plan si z est négatif.) Par exemple, voici des graphiques de la fonction $z = x^2 + y^2$.



On voit bien que la valeur est plus petite à x = 0 et y = 0 et que la valeur de la fonction augmente à mesure qu'on s'éloigne du centre (puisque la surface est de plus en plus haute au-dessus du plan xy). Dans le graphique de droite, on retrouve les courbes obtenues précédemment.

À droite, on a la surface de la fonction

$$z = \frac{-10x}{x^2 + y^2 + 1}$$



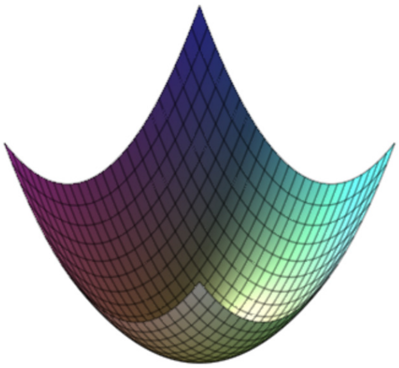
Traçage des graphiques de fonctions explicites avec Maple

Autrefois, c'était tout un défi de faire ces représentations en trois dimensions. Aujourd'hui, c'est beaucoup plus facile avec les ordinateurs. Souvent, on peut même tourner le graphique dans toutes les directions avec la souris pour l'examiner.

Avec des logiciels comme Maple, on peut tracer la courbe de notre fonction $z = x^2 + y^2$ avec la commande suivante.

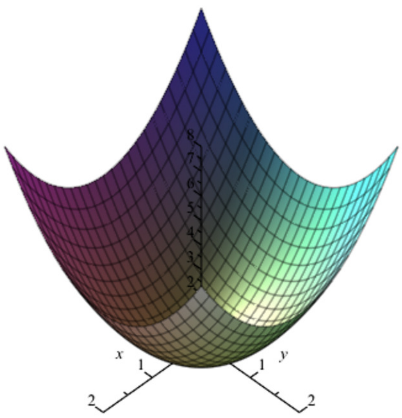
$$plot3d\left(x^2 + y^2, x = -2..2, y = -2..2\right)$$

Cette commande trace le graphique de la fonction entre x = -2 et 2 et entre y = -2 et 2. On obtient alors le graphique de droite.



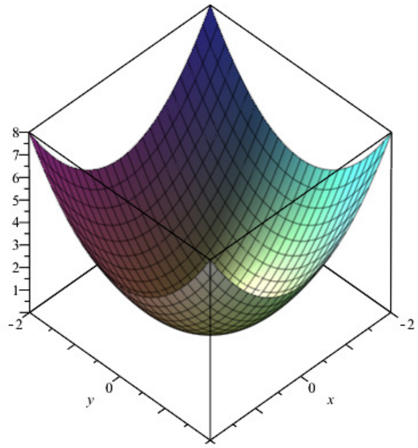
Il y a une multitude d'options, mais ici on va examiner seulement 2 de ces options.

Il y a premièrement l'option des axes. Voici quelques variantes de cette option.

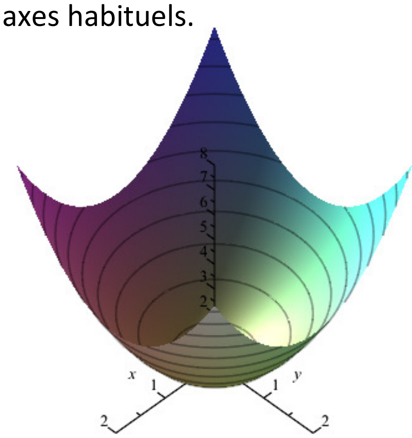


$$plot3d\left(x^2 + y^2, x = -2..2, y = -2..2, axes = normal\right)$$

$$plot3d\left(x^2+y^2, x=-2..2, y=-2..2, axes=boxed\right)$$

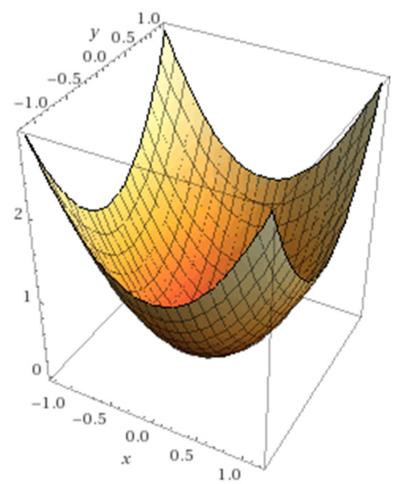


Cette dernière façon de montrer les axes est souvent utilisée parce que les valeurs ne sont pas cachées par la surface, comme c'est le cas avec les axes habituels.



Pour avoir les lignes de niveau, on utilise l'option *style = patchcontour.*

$$plot3d\left(x^2+y^2, x=-2..2, y=-2..2, axes=normal, style=patchcontour\right)$$



Il est relativement facile de trouver des applications sur le net qui permettent de tracer de telles courbes. Par exemple, on obtient le graphique de droite en écrivant plot x^2+y^2 dans la ligne de commande du site de Wolfram.
(https://www.wolframalpha.com/)

Par contre, avec Wolfram (à moins d'avoir la version pro), on ne peut pas tourner le graphique.

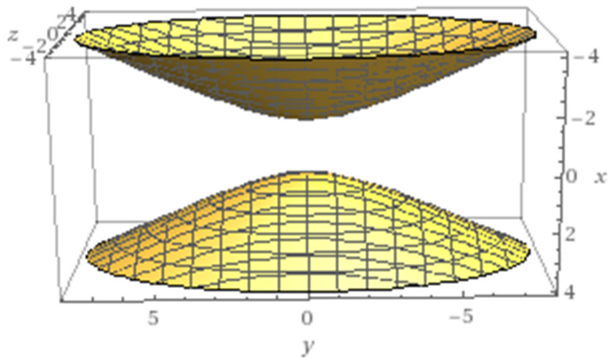
<u>Traçage des graphiques de fonctions implicites avec Maple</u>

On peut aussi tracer le graphique même si z n'est pas isolé dans l'équation. Par exemple, supposons qu'on veut tracer le graphique de

$$x^2-\frac{1}{4}y^2-z^2=1$$

Pour Wolfram, ça ne change rien à la commande. On écrit simplement plot x^2-(y^2)/4-z^2=1

dans la ligne de commande pour obtenir le graphique suivant.



C'est simple, mais on a peu de contrôle sur le résultat final (à moins d'avoir la version pro). On ne peut pas changer les limites du graphique et, curieusement, l'axe des *x* est vertical.

La commande est un peu plus complexe avec Maple, mais le résultat est meilleur (parce qu'on a plus de contrôle sur le résultat).

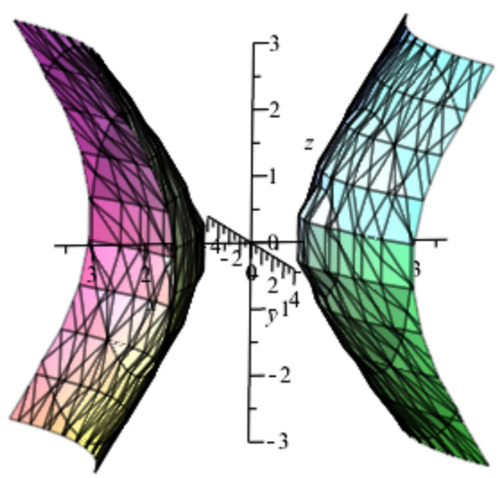
Encore une fois, on active la commande qu'on utilisera avec

$$with(plots)$$

Ensuite, on tape la commande

$$implicitplot3d\left(x^2 - \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, x=-4..4, y=-4..4, z=-3..3, axes = normal\right);$$

On obtient alors le graphique suivant.



La visualisation d'une fonction est très importante pour des fonctions de 2 variables. Dans ce chapitre sur les dérivées partielles et le chapitre suivant sur les intégrales multiples, nous ferons constamment référence à ces graphiques en 3 dimensions.

SÉRIE D'EXERCICES 3

Avec Maple ou Wolfram, tracez les surfaces représentant les fonctions suivantes.

1. $z = x - y + 4$ (On veut la région $-2 < x < 2$, $-2 < y < 2$ et des axes normaux.)

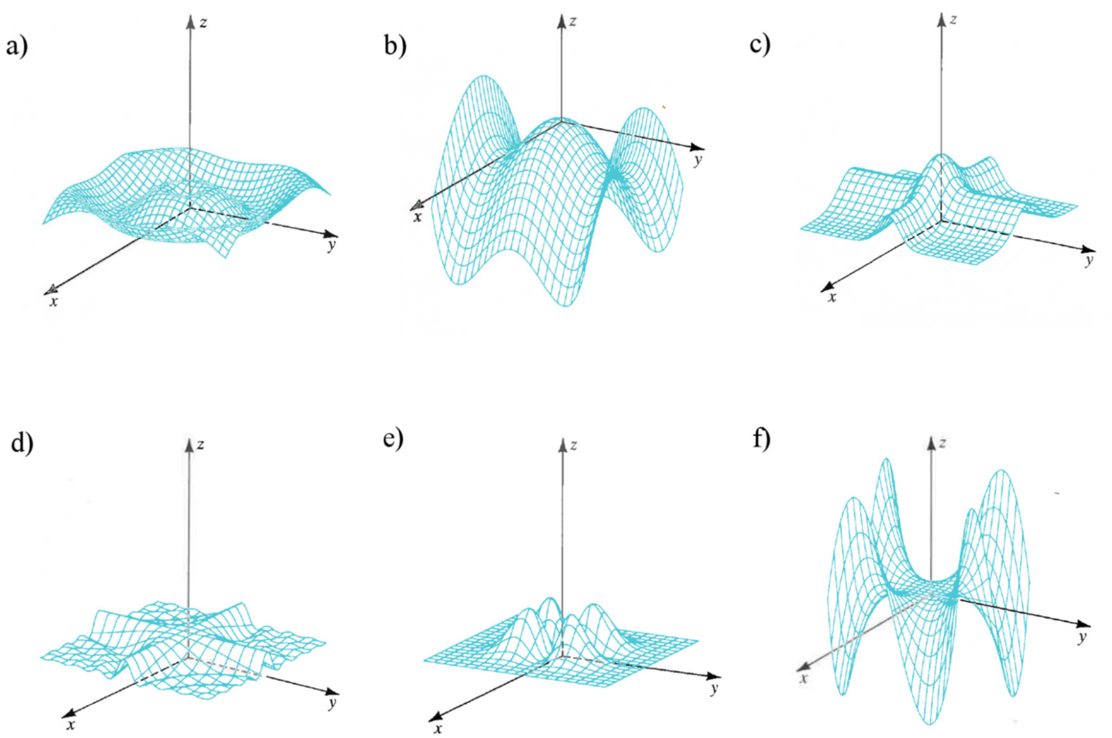
2. $z = 3x^2 + 18xy + 6y^2$ (On veut la région $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$ et des axes normaux.)

3. $3x + 2y - 5z = 4$ (On veut la région $-5 < x < 5$, $-5 < y < 5$ et des axes normaux.)

4. $x^2 + 9y^2 + z^2 = 9$ (On veut la région $-4 < x < 4$, $-2 < y < 2$, $-4 < z < 4$ et des axes normaux.)

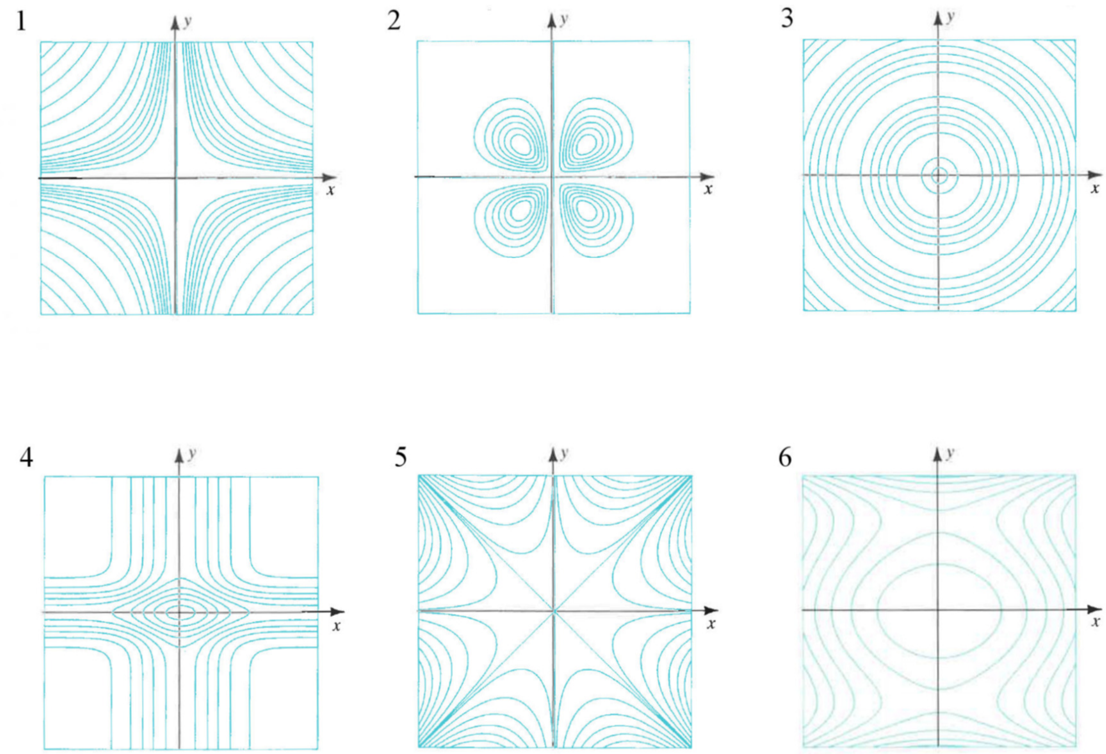
5. $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ (On veut la région $-4 < x < 4$, $-4 < y < 4$, $-4 < z < 4$ et des axes normaux.)

6. Associer correctement les surfaces suivantes



Analyse, Swokowski, De Boeck Université, 1993

aux courbes de niveau suivantes.

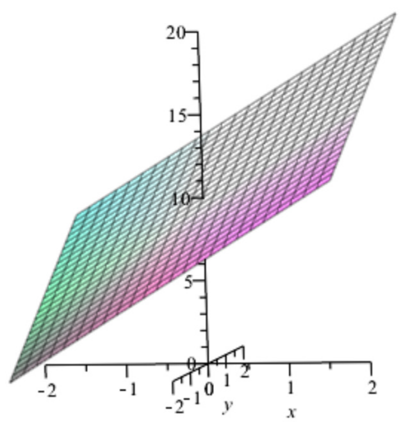


Analyse, Swokowski, De Boeck Université, 1993

Graphique des équations de degré 1

Une équation de degré 1 est de la forme $z = Ax + By + C$ où A et B sont des constantes.

Dans ce cas, la surface qui représente la fonction en 3 dimensions est toujours une surface plane. Par exemple, on peut voir le graphique de $z = 3x + 2y + 10$ à droite.



Comme vous l'avez vu en algèbre linéaire, il est possible de trouver le vecteur normal du plan pour avoir une idée de l'orientation de ce dernier. Pour ce faire, il faut envoyer toutes les variables du même côté pour isoler la constante. On a alors une équation de la forme suivante.

$$ax + by + cz = d$$

Le vecteur normal est alors

$$\vec{n} = (a, b, c)$$

Point d'intersection du plan avec les axes

Avec un plan, on trouve facilement les points d'intersection du plan avec les axes. Au point de croisement du plan avec l'axe des x, les valeurs de y et z sont nuls. On n'a donc qu'à mettre $y = 0$ et $z = 0$ dans l'équation pour trouver le point d'intersection.
La règle est la même pour les autres axes.

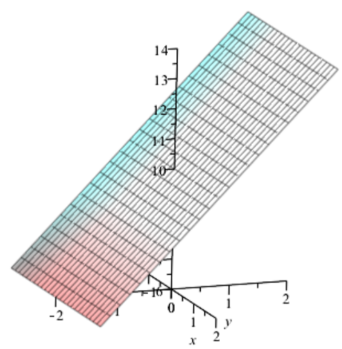
> On met $y = 0$ et $z = 0$ dans l'équation pour trouver le point d'intersection avec l'axe des x.
>
> On met $x = 0$ et $z = 0$ dans l'équation pour trouver le point d'intersection avec l'axe des y.
>
> On met $x = 0$ et $y = 0$ dans l'équation pour trouver le point d'intersection avec l'axe des z.

Par exemple, le point d'intersection du plan $z = 3x + 2y + 10$ avec l'axe des x est

$$0 = 3x + 0 + 10$$
$$x = -\frac{10}{3}$$

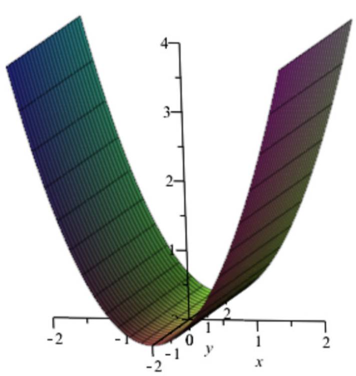
Cette valeur semble en accord avec ce qu'on peut voir sur le graphique.

Variable absente dans l'équation



Parfois, il arrive qu'une variable soit absente dans l'équation. Par exemple on pourrait avoir l'équation $z = 2y + 10$.

Puisqu'il n'y a pas de x, cela signifie que la surface ne change pas même si on change de place le long de l'axe des x. Le plan est donc toujours à la même distance de l'axe des x et le plan est donc parallèle à l'axe des x.



En fait, ce constat est toujours vrai.

Par exemple, voici le graphique de $z = x^2$.

C'est le graphique d'une parabole étiré le long de l'axe des y. C'est ce qui arrive quand y est absent.

Graphique des équations de degré 2

Dans une fonction de degré 2, une ou plusieurs variables sont au carré. La forme la plus générale est

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

où les lettres de *A* à *J* sont des constantes.

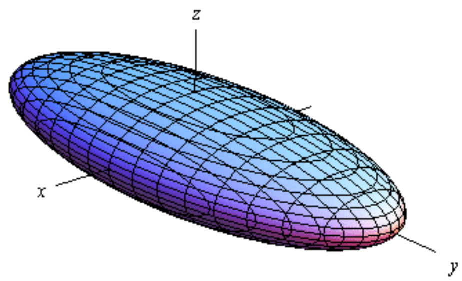
Pour ces fonctions quadratiques, Euler a montré qu'il n'y a que 6 formes possibles (ou des rotations, translations, étirements ou compressions de ces 6 formes.) Ces formes sont :

1) L'ellipsoïde

Si l'ellipsoïde est centré sur l'origine et que les axes de l'ellipsoïde correspondent aux axes de coordonnées, l'équation de l'ellipsoïde est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Cette équation donne une ellipse va de $-a$ à a en x, de $-b$ à b en y et de $-c$ à c en z.

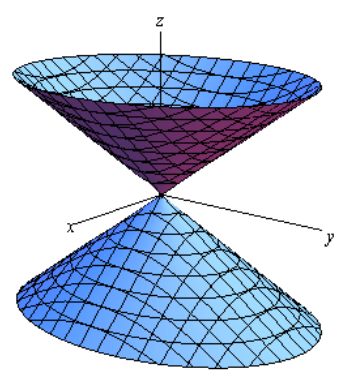


tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/QuadricSurfaces.aspx
pour les 7 figures de cette section

2) Le cône

Si le cône est centré sur l'origine et que son axe correspond à l'axe des z (comme sur la figure) l'équation du cône est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Si on augmente la valeur de a, le cône s'étire davantage dans le sens de l'axe des x.

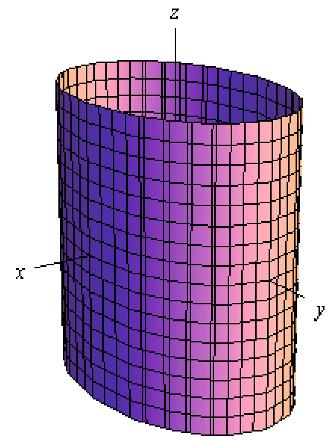
Si on augmente la valeur de b, le cône s'étire davantage dans le sens de l'axe des y.

Si on augmente la valeur de c, le cône s'étire davantage dans le sens de l'axe des z.

Si on veut que l'axe du cône soit l'axe des x, on met le signe négatif en face de x^2/a^2 plutôt que devant z^2/c^2.

Si on veut que l'axe du cône soit l'axe des y, on met le signe négatif en face de y^2/b^2 plutôt que devant z^2/c^2.

3) Le cylindre



Si le cylindre est centré sur l'origine et que son axe est l'axe des z (comme sur la figure), alors l'équation du cône est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

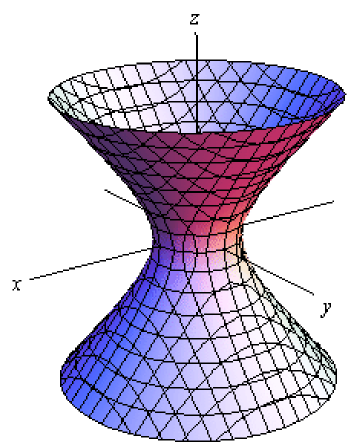
C'est une ellipse étirée le long de l'axe des z. (Rappelez-vous, la surface est toujours à la même distance de l'axe de la variable absente dans l'équation.)

Dans le plan xy, cette équation donne une ellipse va de $-a$ à a en x, de $-b$ à b en y.

Si le cylindre suit l'axe des x, on a $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Si le cylindre suit l'axe des y, on a $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

4) L'hyperboloïde (à 1 ou 2 nappes)



Il y a deux types d'hyperboloïdes. Il y a premièrement l'hyperboloïde à une nappe.

Si l'hyperboloïde est centré sur l'origine et que son axe est l'axe des z (comme sur la figure), alors l'équation de l'hyperboloïde est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

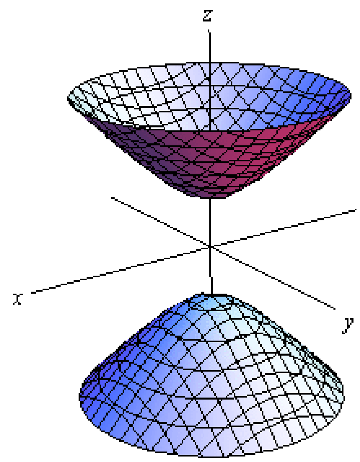
L'intersection de cet hyperboloïde avec le plan xy est ellipse va de $-a$ à a en x et de $-b$ à b en y.

Si on augmente la valeur de c, l'hyperboloïde s'étire davantage dans le sens de l'axe des z.

Si on veut que l'axe de symétrie de l'hyperboloïde soit l'axe des x, on met le signe négatif en face de x^2/a^2 plutôt que devant z^2/c^2.

Si on veut que l'axe de symétrie de l'hyperboloïde soit l'axe des y, on met le signe négatif en face de y^2/b^2 plutôt que devant z^2/c^2.

Il y a ensuite l'hyperboloïde à deux nappes.



Si l'hyperboloïde est centré sur l'origine et que son axe est l'axe des z (comme sur la figure), alors l'équation de l'hyperboloïde est

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

La plus petite distance entre cet hyperboloïde et l'origine est c.

Si on augmente la valeur de a, l'hyperboloïde s'étire davantage dans le sens de l'axe des x.

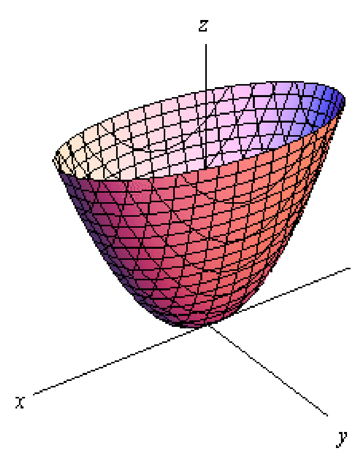
Si on augmente la valeur de b, l'hyperboloïde s'étire davantage dans le sens de l'axe des y.

Si on augmente la valeur de c, l'hyperboloïde s'étire davantage dans le sens de l'axe des z.

Si on veut que l'axe de l'hyperboloïde soit l'axe des x, on met le signe positif en face de x^2/a^2 plutôt que devant z^2/c^2.

Si on veut que l'axe de l'hyperboloïde soit l'axe des y, on met le signe positif en face de y^2/b^2 plutôt que devant z^2/c^2.

5) Le paraboloïde



Si le paraboloïde passe par l'origine et que son axe est l'axe des z (comme sur la figure), alors l'équation du paraboloïde est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$

Le graphique montré sur la figure est un cas où c est positif. Si c était négatif, la surface serait sous le plan xy.

Si on augmente la valeur de a, le paraboloïde s'étire davantage dans le sens de l'axe des x.

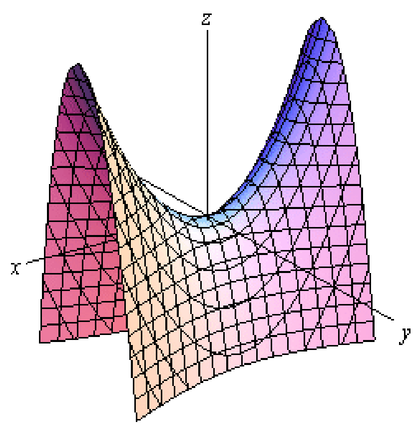
Si on augmente la valeur de b, le paraboloïde s'étire davantage dans le sens de l'axe des y.

Si on augmente la valeur de c, le paraboloïde s'étire davantage dans le sens de l'axe des z.

Si l'axe du paraboloïde est l'axe des x, l'équation est $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x}{a}$.

Si l'axe du paraboloïde est l'axe des y, l'équation est $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{y}{b}$.

6) Le paraboloïde hyperbolique



Si le paraboloïde hyperbolique passe par l'origine et que les plans de symétrie sont les plans $x = 0$ et $y = 0$ (comme sur la figure), alors l'équation du paraboloïde est

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$

Si c est positif, alors la surface monte en x et diminue en y (comme sur la figure).

Si c est négatif, alors la surface diminue en x et monte en y.

Si on augmente la valeur de a, le paraboloïde hyperbolique s'étire davantage dans le sens de l'axe des x.

Si on augmente la valeur de b, le paraboloïde hyperbolique s'étire davantage dans le sens de l'axe des y.

Si on augmente la valeur de c, le paraboloïde hyperbolique s'étire davantage dans le sens de l'axe des z.

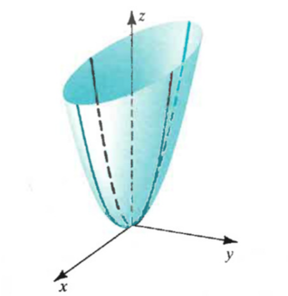
Si l'axe du paraboloïde hyperbolique est l'axe des x, l'équation est $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{x}{a}$.

Si l'axe du paraboloïde hyperbolique est l'axe des y, l'équation est $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{y}{b}$.

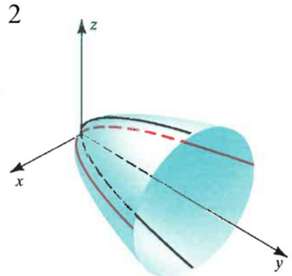
SÉRIE D'EXERCICES 4

Associer chaque graphique à l'une des équations de la page suivante. (Attention, il y a plus d'équations que de graphiques. Certaines équations n'ont pas de graphique…)

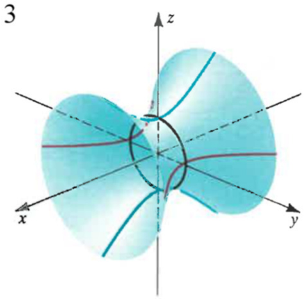
1



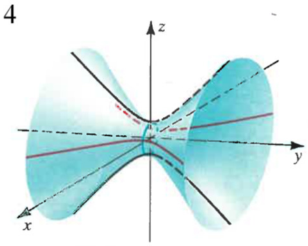
2



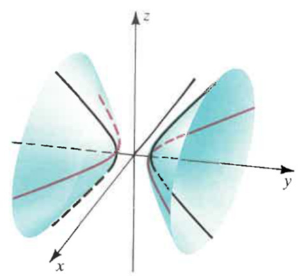
3



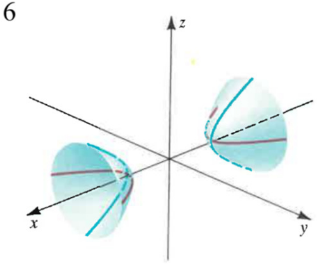
4



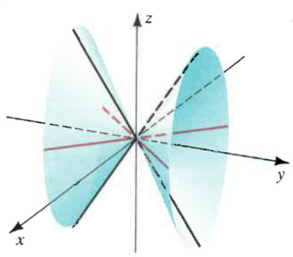
5



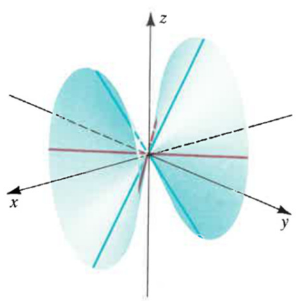
6



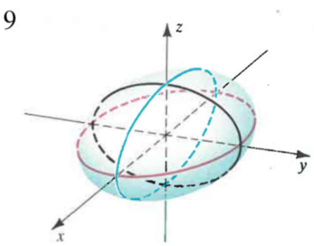
7



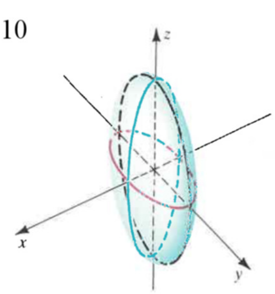
8



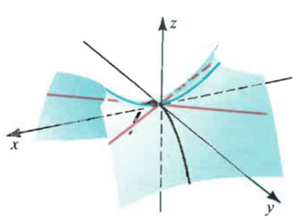
9



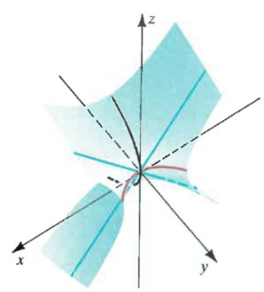
10



11



12



Analyse, Swokowski, De Boeck Université, 1993

A. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$

B. $x=z^2+\frac{y^2}{4}$

C. $y^2+z^2-x^2=1$

D. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=0$

E. $z=\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}$

F. $z^2-\frac{x^2}{4}-y^2=1$

G. $\frac{z^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=0$

H. $\frac{x^2}{4}-y^2-z^2=1$

I. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}$

J. $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$

K. $z=\frac{x^2}{9}+y^2$

L. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$

M. $y=\frac{z^2}{9}-\frac{x^2}{4}$

N. $y=\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{4}$

O. $z^2+\frac{x^2}{4}-y^2=1$

P. $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}-\frac{y^2}{4}=0$

Q. $y^2-\frac{x^2}{4}-z^2=1$

R. $x^2+\frac{y^2}{4}-z^2=1$

3. *Représentation graphique des fonctions de 3 variables*

On peut aussi représenter des fonctions de 3 variables. Toutefois, la seule option possible ici consiste à tracer les courbes de niveau. En effet, l'équivalent de représenter une fonction de deux variables par une surface en trois dimensions consisterait à représenter la fonction de 3 variables par un volume dans un espace à quatre dimensions. Comme on ne peut représenter un tel espace à quatre dimensions, on va oublier cette façon de faire.

Les surfaces de niveau

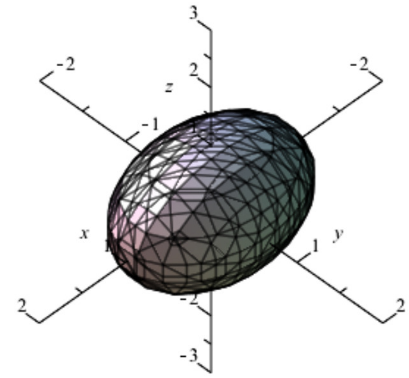
Avec une fonction de 3 variables, les courbes de niveau sont en fait des surfaces de niveau en trois dimensions. On va prendre la fonction de 3 variables suivantes pour illustrer cela.

$$f = x^2 + 2y^2 + z^2$$

Regardons ce qu'on obtient si on trouve toutes les positions pour lesquelles la fonction à la même valeur. Par exemple, trouvons toutes les positions pour lesquelles f = 1. On a alors

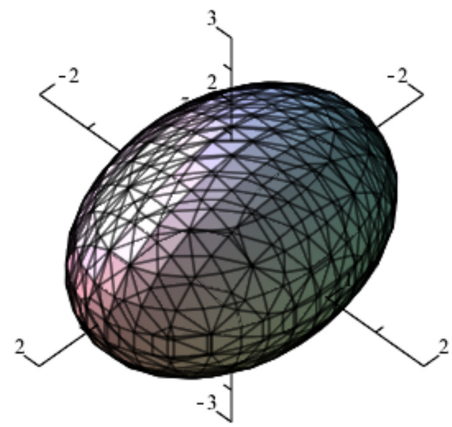
$$1 = x^2 + 2y^2 + z^2$$

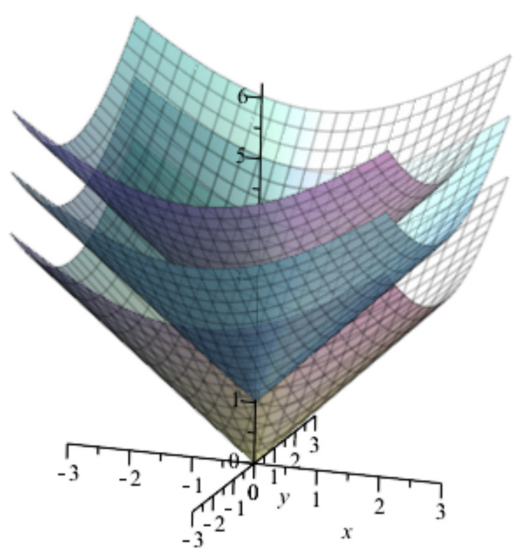
Cette équation de 3 variables est bel et bien l'équation d'une surface (montrée sur la figure de droite).



Trouvons d'autres surfaces de niveau. Voici la surface de niveau pour f = 2.

C'est un ellipsoïde un peu plus grand.

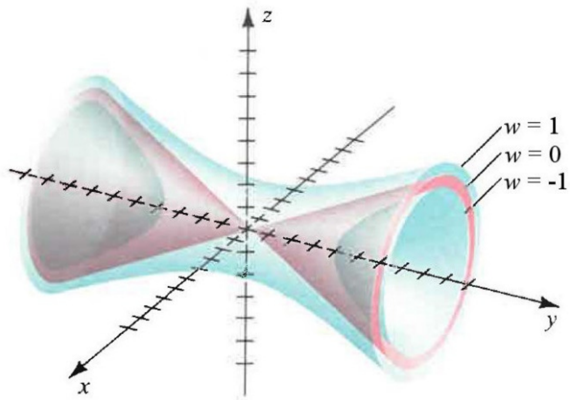




On peut montrer toutes ces surfaces sur un même graphique. Par exemple, on peut voir, à gauche, les surfaces de niveau (w = 0, w = 1 et w = 2) de la fonction

$$w = \sqrt{x^2 + y^2} - z$$

Voici les courbes de niveau (w =-1, w = 0 et w =1) de la fonction $w = x^2 - y^2 + z^2$.

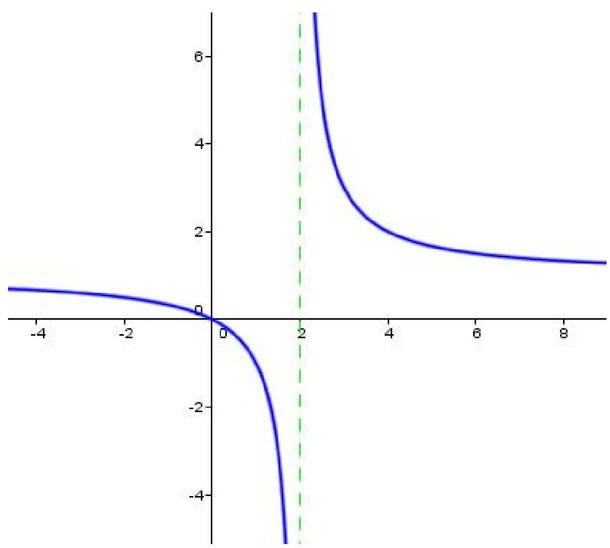


Analyse, Swokowski, De Boeck Université, 1993

4. Les limites

Différents chemins possibles pour tendre vers un point

On se rappelle qu'en calcul différentiel à une variable, on calculait la limite d'une fonction en approchant le point par la gauche et par la droite le long de l'axe des *x.* Très souvent, la limite d'une fonction donnait simplement la valeur de cette fonction, mais pas toujours. Par exemple, la limite n'existait pas parfois. Prenons ce graphique pour illustrer cela.



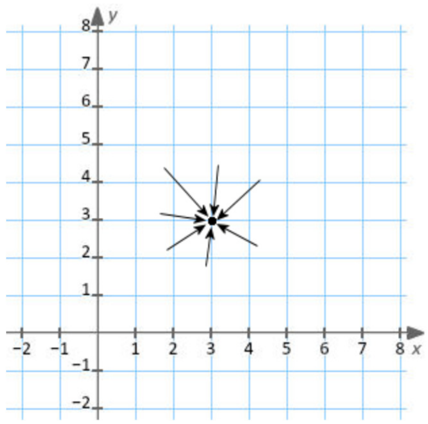
socratic.org/calculus/limits/determining-when-a-limit-does-not-exist

Faisons la limite de cette fonction quand x tend vers 0. En s'approchant de x = 0 par la gauche, la fonction diminue toujours pour s'approcher de 0. En s'approchant de x = 0 par la droite, la fonction augmente toujours pour s'approcher de 0. Comme on obtient la même valeur pour les deux directions, il y a une limite, qui est 0.

La situation est bien différente si on fait la limite de cette fonction quand x tend vers 2. En s'approchant de $x = 2$ par la gauche, la fonction diminue toujours pour s'approcher de -∞. En s'approchant de $x = 2$ par la droite, la fonction augmente toujours pour s'approcher de ∞. Comme on obtient différentes valeurs pour les deux directions, il n'y a pas de limite.

On aura un peu la même chose pour une fonction qui dépend de 2 variables. Il suffira de s'approcher du point (x, y) pour voir vers quelle valeur tend la fonction. Si cette valeur est la même pour toutes les directions, alors la limite existe. Si elle est différente, alors la limite n'existe pas.

Le problème, c'est qu'avec une fonction de plusieurs variables, il n'y a pas que 2 chemins possibles pour s'approcher du point. Si on veut faire la limite vers (x,y), il y a une infinité de chemins dans le plan xy qui mène à ce point.



Pour que la limite existe, il faudra s'assurer qu'on tend toujours vers la même valeur, peu importe le chemin pris pour s'approcher du point.

Calcul de la limite

La plupart du temps, il n'est pas nécessaire de vérifier la valeur de la limite pour tous ces chemins. On met les coordonnées du point dans la fonction. Si on obtient une valeur, cette valeur est la limite de cette fonction.

Exemple

Quelle est la valeur de cette limite ?

$$\lim_{(x,y)\to(3,2)} 5x^2 + 4xy - 1$$

La limite est

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(3,2)} 5x^2 + 4xy - 1 &= 5(3)^2 + 4\cdot 3\cdot 2 - 1 \\ &= 68\end{aligned}$$

____

Ce qui pose problème, c'est quand le calcul de la valeur de la fonction nous donne une forme indéterminée. On se rappelle que les formes indéterminées sont

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0,\quad 1^\infty$$

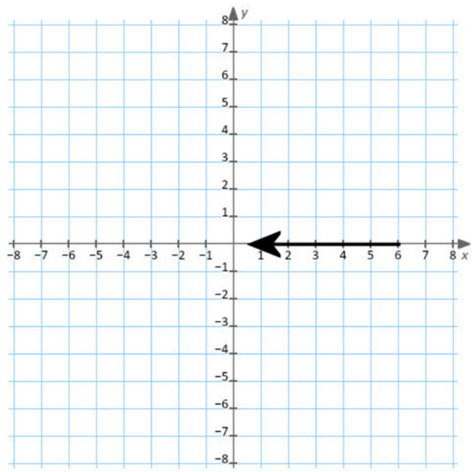
Par exemple, on obtient une des formes indéterminées quand on calcule la limite suivante.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$$

On pourrait peut-être appliquer la règle de l'Hospital, mais on ne sait pas comment appliquer cette règle pour des fonctions de plusieurs variables.

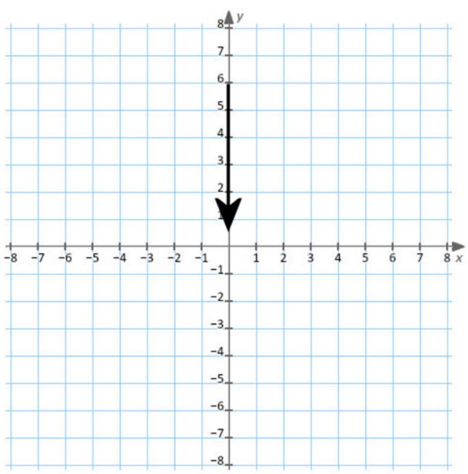
On va donc calculer la limite en prenant plusieurs chemins pour voir si on obtient toujours la même réponse.

Le premier chemin qu'on va prendre est un chemin qui s'approche de (0, 0) en suivant l'axe des x. Sur ce chemin, x tend vers 0 et y = 0. La limite devient donc



$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot 0}{x^2+0^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{0}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{0}{2}\\ &= 0\end{aligned}$$

(On a appliqué la règle de l'Hospital 2 fois aux deux dernières lignes.)

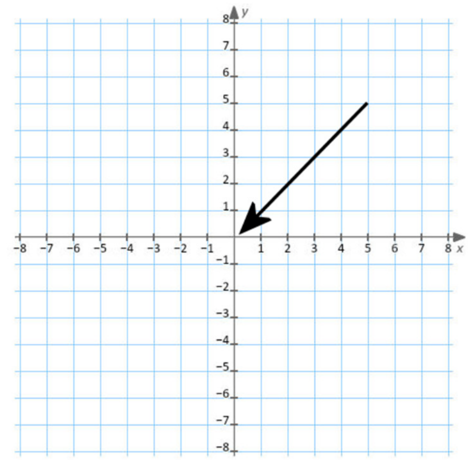


Le deuxième chemin qu'on va prendre est un chemin qui s'approche de (0, 0) en suivant l'axe des y. Sur ce chemin, y tend vers 0 et x = 0. La limite devient donc

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0}\frac{2\cdot 0\cdot y}{0^2+y^2} &= \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{0}{2y}\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{0}{2}\\ &= 0\end{aligned}$$

On obtient la même réponse et on se dit que la limite existe. Toutefois, on est loin d'avoir fait tous les chemins possibles.

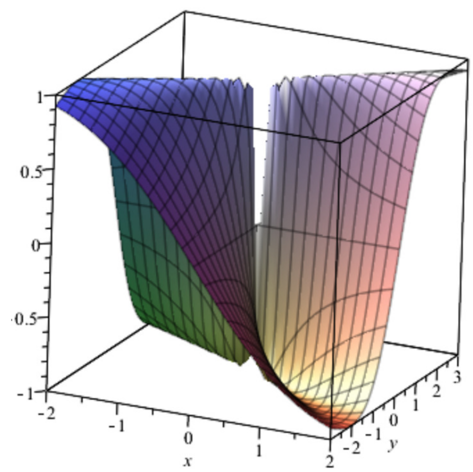
Regardons ce qui arrive avec un 3e chemin qui s'approche de (0, 0) en suivant une droite à 45°. Sur ce chemin, $y = x$ et x (ou y, c'est comme vous voulez) tend vers 0. La limite devient donc



$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot x\cdot x}{x^2+x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{2x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4x}{4x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4}{4}\\ &= 1\end{aligned}$$

On obtient une valeur différente ! Puisque la valeur n'est pas la même pour tous les chemins, la limite n'existe pas.

Ce graphique de la fonction aide un peu à comprendre pourquoi les limites sont différentes.



Là, vous vous dites surement qu'il y a une quantité infinie de chemin et qu'il faudrait faire tous ces chemins pour s'assurer que la valeur est toujours la même. Ça peut être long si on se rend compte seulement au 1000e chemin que la valeur de la limite est différente pour ce chemin.

En fait, il y a une façon de considérer plusieurs chemins en même temps. Dans notre exemple, on doit se diriger vers le point (0,0) et tous les chemins en ligne droite qui passent par (0,0) sont des droites dont l'équation est $y = mx$. Pour faire la limite en suivant ces droites, on va donc remplacer *y* par *mx* et ensuite faire la limite quand x tend vers 0. On a alors

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot x\cdot mx}{x^2+(mx)^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{2mx^2}{(1+m^2)x^2}\\ &= \frac{2m}{(1+m^2)}\end{aligned}$$

Ce résultat montre clairement que la valeur de la limite dépend de m. Voyons si cette formule donne les mêmes résultats qu'on a obtenus précédemment.

Quand on approche le long d'une ligne qui suit l'axe des x (notre premier chemin), la pente est m = 0 et la limite vaut alors 0. C'est ce qu'on avait obtenu.

Quand on approche le long d'une ligne à 45° qui suit $y = x$ (notre troisième chemin), la pente est m = 1 et la limite vaut alors 1. C'est ce qu'on avait obtenu.

Quand on approche le long d'une ligne qui suit l'axe des y (notre deuxième chemin), la pente est $m = \infty$. Dans ce cas, c'est difficile de trouver la valeur puisqu'il faudrait faire la limite quand la pente tend vers l'infinie. Toutefois, c'est dangereux de faire une limite d'un résultat obtenu avec une limite. On traitera de ces cas plus loin.

Si notre limite n'est pas vers le point (0,0), l'équation des droites qui passent par le point est légèrement plus compliquée. L'équation de toutes les droites qui passent par le point (a,b) est

$$y - b = m(x - a)$$

En résumé, la limite s'obtient ainsi

- On pose $y - b = m(x - a)$
- On fait la limite quand x tend vers 0
- Si le résultat dépend de m, la limite n'existe pas. Si le résultat ne dépend pas de m, la limite existe et la valeur obtenue est la limite.

Exemple

Quelle est la valeur de cette limite ?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3\sin x + 5y^2 \tan x}{x}$$

En mettant les valeurs x = 0 et y = 0 dans l'équation, on obtient une la forme indéterminée 0/0. On va donc trouver la limite en posant que $y = mx$ et en faisant ensuite la limite quand x tend vers 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3\sin x + 5y^2 \tan x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{3\sin x + 5m^2 x^2 \tan x}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(3\frac{\sin x}{x} + 5m^2 x \tan x \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(3\frac{\sin x}{x} \right) + \lim_{x\to 0} 5m^2 x \tan x \\
&= 3 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} + 0
\end{aligned}$$

$$= 3 \cdot 1$$
$$= 3$$

(On a appliqué la règle de l'Hospital à la 4e ligne.)

La limite est donc 3.

____

Même si on n'obtient pas une forme indéterminée, il faut faire bien attention quand la limite donne une division par 0 pour certaines valeurs de m.

Exemple

Quelle est la valeur de cette limite ?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2 y}$$

En mettant les valeurs x = 0 et y = 0 dans l'équation, on obtient une la forme 1/0. Ce n'est pas une forme indéterminée, mais on doit s'assurer que le signe est toujours le même. En remplaçant y par mx, on arrive à

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2 y} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{mx^3}$$

Or, on a la situation suivante :

Si on approche par le 1er quadrant, x et m sont positifs et la limite est

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{mx^3} = +\infty \quad \text{si } m \text{ est positif}$$

Si on approche par le 2e quadrant, x et m sont négatifs et la limite est

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{mx^3} = +\infty \quad \text{si } m \text{ est négatif}$$

Si on approche par le 3e quadrant, x est négatif et m est positif et la limite est

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{mx^3} = -\infty \quad \text{si } m \text{ est positif}$$

Si on approche par le 4e quadrant, x est positif et m est négatif et la limite est

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{mx^3} = -\infty \quad \text{si } m \text{ est négatif}$$

Puisque la réponse n'est pas toujours la même, la limite n'existe pas.

Une subtilité

Parfois, on semble obtenir une réponse qui ne dépend pas de m, mais ce n'est pas le cas. Voici un exemple pour illustrer cela. On va calculer la limite suivante.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$$

En remplaçant y par mx, on arrive à

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 mx}{x^4 + m^2 x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x^3 m}{x^4 + m^2 x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2xm}{x^2 + m^2} \\
&= \frac{0}{m^2}
\end{aligned}$$

On semble obtenir 0, mais on a une valeur indéterminée si $m = 0$. Pour déterminer ce qui se produit dans ce cas-là, on va arriver dans la même direction que la droite ayant une pente nulle (donc qui suit l'axe des x), mais en suivant une trajectoire courbe. On va utiliser la trajectoire donnée par $y = x^2$. Avec une telle trajectoire, on arrive bel et bien à (0,0) dans la direction de l'axe des x. Avec cette trajectoire, on remplace y par x^2 pour obtenir

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 x^2}{x^4 + x^4} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{x^4 + x^4} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{2x^4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Comme on obtient une valeur différente de ce qu'on avait précédemment, la limite n'existe pas.

Ainsi, si on note qu'il y a une forme indéterminée pour la valeur de la limite pour certaines valeurs de m, on tente d'arriver dans la même direction que cette direction problématique, mais en suivant une trajectoire courbe qui a la même pente au point où on veut connaitre la limite.

(De façon correcte, il aurait fallu, dans notre premier exemple, vérifier ce qui se produit si $m = \infty$ parce dans ce cas, la deuxième limite n'est peut-être pas 0. Rassurez-vous, elle demeurait 0 même si $m = \infty$.)

Exemple

Quelle est la valeur de cette limite ?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

En mettant les valeurs $x = 0$ et $y = 0$ dans l'équation. On obtient la forme indéterminée 0/0. On va donc trouver la limite en posant que $y = mx$ et en faisant ensuite la limite quand x tend vers 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 (mx)^2}{x^2 + (mx)^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{m^2 x^4}{x^2 \left(1+m^2\right)} \\
&= \frac{m^2}{1+m^2} \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2} \\
&= \frac{m^2}{1+m^2} \cdot 0
\end{aligned}$$

On dirait que la limite existe et qu'elle est nulle. Il y a toutefois un problème si m est infini puisqu'on obtient alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{\infty}{\infty} \cdot 0 \quad \text{si } m \text{ est infini}$$

qui est une forme indéterminée. Pour contourner ce problème, on va arriver au point (0,0) en suivant la trajectoire $y = \sqrt{x}$. Cette courbe a une pente infinie à $x = 0$. Avec cette trajectoire, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \left(\sqrt{x}\right)^2}{x^2 + \left(\sqrt{x}\right)^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2 + x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{2x+1}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{2}\\&=0\end{aligned}$$

Comme on a encore le même résultat, on en conclut que la limite est 0.

____

Souvent, quand on fait une limite vers (0,0), on a un problème si $m = 0$ ou si $m = \pm\infty$. On peut souvent examiner ce qui se passe si $m = 0$ en prenant $y = x^n$ et on peut souvent examiner ce qui se passe si $m = \infty$ en prenant $y = \sqrt[n]{x}$.

Exemple

Quelle est la valeur de cette limite ?

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x+y-2}{x^2+y^2-2}$$

En mettant les valeurs $x = 1$ et $y = 1$ dans l'équation, on obtient une la forme indéterminée 0/0. On va donc trouver la limite en posant que $(y - 1) = m\,(x - 1)$ et en faisant ensuite la limite quand x tend vers 1.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x+y-2}{x^2+y^2-2}&=\lim_{x\to 1}\frac{x+\left(m\left(x-1\right)+1\right)-2}{x^2+\left(m\left(x-1\right)+1\right)^2-2}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x+mx-m+1-2}{x^2+m^2\left(x-1\right)^2+2m\left(x-1\right)+1-2}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x+mx-m-1}{x^2+m^2\left(x-1\right)^2+2m\left(x-1\right)-1}\end{aligned}$$

C'est encore de la forme 0/0. En appliquant la règle de l'Hospital, on arrive à

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x+y-2}{x^2+y^2-2}&=\lim_{x\to 1}\frac{1+m}{2x+2m^2\left(x-1\right)+2m}\\&=\frac{1+m}{2+2m}\\&=\frac{1+m}{2\left(1+m\right)}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

La limite semble être ½.

Toutefois, même si les termes avec m se sont annulés, il faut quand même vérifier ce qui se produit si ces termes valent 0 (ce qui nous donne alors 0/0) ou s'ils valent ∞ (ce qui nous donne alors ∞/∞).

Commençons avec 0/0. Dans ce cas, on doit avoir $1+m=0$. Si $1+m$ est 0, c'est que m = -1. On va donc approcher du point (1,1) en suivant une trajectoire courbe qui a une pente de -1 au point (1,1). On peut y arriver avec la trajectoire $y = 1/x$. (Il faut parfois faire preuve de créativité pour trouver la trajectoire qui a la bonne pente.) On a alors

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y-2}{x^2+y^2-2} = \lim_{x\to 1} \frac{1+\frac{1}{x}-2}{x^2+\frac{1}{x^2}-2}$$

Pour trouver la valeur de cette limite, on doit appliquer la règle de l'Hospital 2 fois.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y-2}{x^2+y^2-2} &= \lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{2x-\frac{2}{x^3}} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{x^3}}{2+\frac{6}{x^4}} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Comme on obtient une valeur différence, la limite n'existe pas. (Comme on sait déjà que la limite n'existe pas, on n'a pas besoin de vérifier ce qui se produit si m = ∞.)

SÉRIE D'EXERCICES 5

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2}{3+xy}$

2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{xy-y}{x^2-x+2xy-2y}$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y^3}{2y^5-2x^5}$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{x^2+y^2}$

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{4+x}{2-y}$

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy}{5x^4+2y^4}$

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xe^x+y}{y\ln(x+2)}$

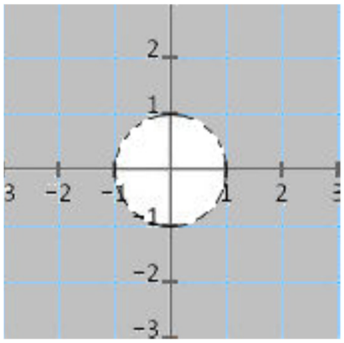
10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(1+y^2)\sin x}{x}$

11. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2}{x^2-2y}$

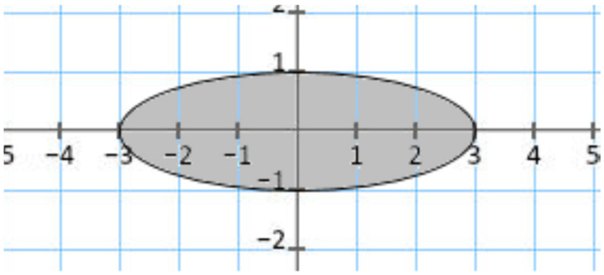
Solutions des exercices

Série d'exercices 1

1. 24
2. -1
3. 3
4. Tout le plan *xy*, sauf la droite $y = x$.
5.



6.

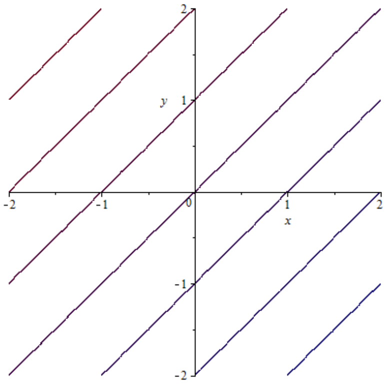


Série d'exercices 2

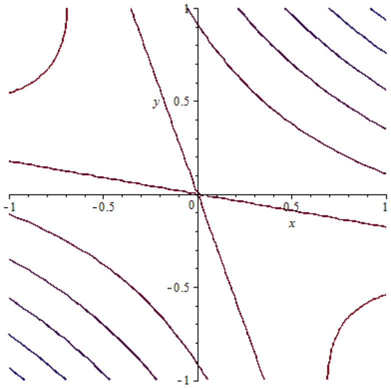
1. $y = \dfrac{\pi}{\arctan x}$

2. $4 = \left(2x + y^2\right)e^{xy}$

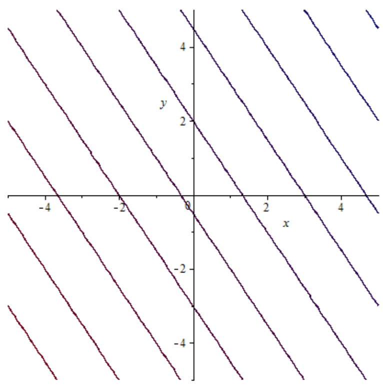
3.



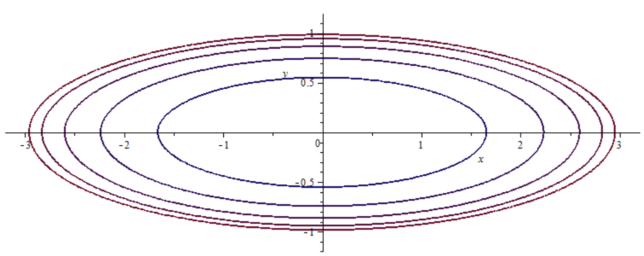
4.



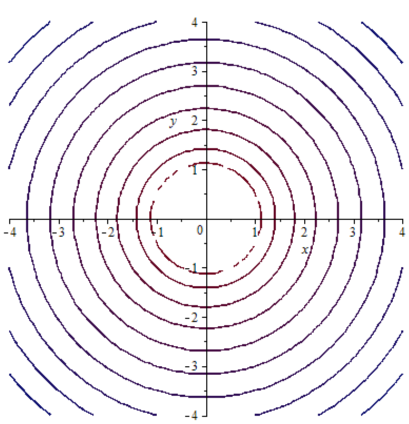
5.



6.

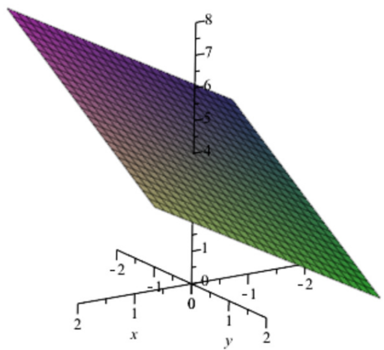


7.

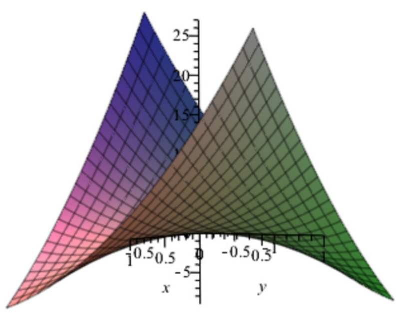


<u>Série d'exercices 3</u>

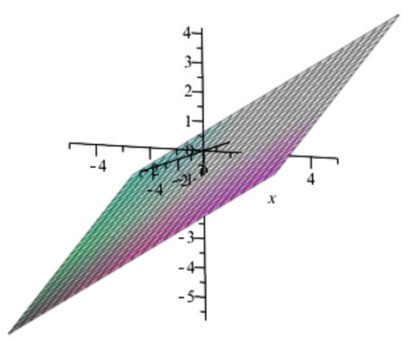
1.



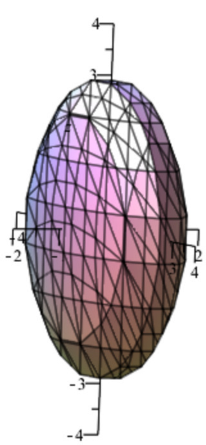
2.



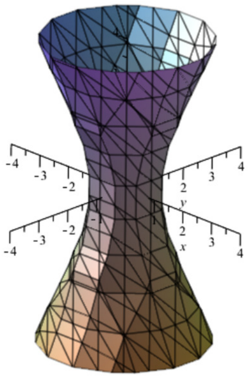
3.



4.



5.



6. a3 b6 c4 d1 e2 f5

Série d'exercices 4

1K 2N 3C 4O 5Q 6H 7P 8G 9A 10J 11E 12M

Série d'exercices 5

1. -2/3
2. 0
3. N'existe pas
4. 2/5
5. N'existe pas
6. 0
7. 6
8. N'existe pas
9. N'existe pas
10. 1
11. 0