

Solutionnaire du chapitre 2

1.1

$$\sinh(1) = 1,1752$$

1.2

$$\cosh(2) = 3,7622$$

1.3

$$\tanh(3) = 0,9951$$

1.4

$$\begin{aligned}\operatorname{sech}(1) &= \frac{1}{\cosh(1)} \\ &= 0,6481\end{aligned}$$

1.5

$$\begin{aligned}\operatorname{csch}(2) &= \frac{1}{\sinh(2)} \\ &= 0,2757\end{aligned}$$

1.6

$$\begin{aligned}\operatorname{coth}(2) &= \frac{1}{\tanh(2)} \\ &= 1,0373\end{aligned}$$

1.7

$$\begin{aligned}\cosh x + \sinh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{2e^x}{2} \\ &= e^x\end{aligned}$$

1.8

$$\begin{aligned}\cosh x - \sinh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{2e^{-x}}{2} \\ &= e^{-x}\end{aligned}$$

1.9

$$\begin{aligned}\sinh(-x) &= \frac{e^{(-x)} - e^{-(-x)}}{2} \\ &= \frac{e^{-x} - e^x}{2} \\ &= -\frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= -\sinh x\end{aligned}$$

1.10

$$\begin{aligned}\cosh(-x) &= \frac{e^{(-x)} + e^{-(-x)}}{2} \\ &= \frac{e^{-x} + e^x}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \cosh x\end{aligned}$$

1.11

$$\begin{aligned}
 \tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x &= \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} + \frac{1}{\cosh^2 x} \\
 &= \frac{\sinh^2 x + 1}{\cosh^2 x} \\
 &= \frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

1.12

$$\begin{aligned}
 \sinh(x+y) &= \frac{e^{(x+y)} - e^{-(x+y)}}{2} \\
 &= \frac{e^x e^y - e^{-x} e^{-y}}{2} \\
 &= \frac{e^x e^y}{2} - \frac{e^{-x} e^{-y}}{2}
 \end{aligned}$$

Mais puisque

$$e^x = \cosh x + \sinh x \quad \text{et} \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

on a

$$\begin{aligned}
 \sinh(x+y) &= \frac{(\cosh x + \sinh x)(\cosh y + \sinh y)}{2} - \frac{(\cosh x - \sinh x)(\cosh y - \sinh y)}{2} \\
 &= \frac{\cancel{\cosh x \cosh y} + \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y + \cancel{\sinh x \sinh y}}{2} \\
 &\quad - \frac{\cancel{\cosh x \cosh y} - \cosh x \sinh y - \sinh x \cosh y + \cancel{\sinh x \sinh y}}{2} \\
 &= \frac{2 \cosh x \sinh y + 2 \sinh x \cosh y}{2} \\
 &= \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y
 \end{aligned}$$

1.13

$$\begin{aligned}\cosh(x+y) &= \frac{e^{(x+y)} + e^{-(x+y)}}{2} \\ &= \frac{e^x e^y + e^{-x} e^{-y}}{2} \\ &= \frac{e^x e^y}{2} + \frac{e^{-x} e^{-y}}{2}\end{aligned}$$

Mais puisque

$$e^x = \cosh x + \sinh x \quad \text{et} \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

on a

$$\begin{aligned}\cosh(x+y) &= \frac{(\cosh x + \sinh x)(\cosh y + \sinh y)}{2} + \frac{(\cosh x - \sinh x)(\cosh y - \sinh y)}{2} \\ &= \frac{\cosh x \cosh y + \cancel{\cosh x \sinh y} + \cancel{\sinh x \cosh y} + \sinh x \sinh y}{2} \\ &\quad + \frac{\cosh x \cosh y - \cancel{\cosh x \sinh y} - \cancel{\sinh x \cosh y} + \sinh x \sinh y}{2} \\ &= \frac{2 \cosh x \cosh y + 2 \sinh x \sinh y}{2} \\ &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y\end{aligned}$$

1.14

Version 1

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cosh x + \sinh x} &= \frac{1}{\cosh x + \sinh x} \cdot \frac{\cosh x - \sinh x}{\cosh x - \sinh x} \\ &= \frac{\cosh x - \sinh x}{\cosh^2 x - \cosh x \sinh x + \sinh x \cosh x - \sinh^2 x} \\ &= \frac{\cosh x - \sinh x}{\cosh^2 x - \sinh^2 x} \\ &= \frac{\cosh x - \sinh x}{1} \\ &= \cosh x - \sinh x\end{aligned}$$

Version 2

$$\begin{aligned}
 (\cosh x + \sinh x)^{-1} &= (e^x)^{-1} \\
 &= e^{-x} \\
 &= \cosh x - \sinh x
 \end{aligned}$$

1.15

$$\begin{aligned}
 \tanh(x+y) &= \frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)} \\
 &= \frac{\cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y}{\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y}
 \end{aligned}$$

Si on divise le numérateur et le dénominateur par $\cosh x \cosh y$, on a

$$\begin{aligned}
 \tanh(x+y) &= \frac{\cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y}{\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y} \\
 &= \frac{\frac{\cosh x \sinh y}{\cosh x \cosh y} + \frac{\sinh x \cosh y}{\cosh x \cosh y}}{\frac{\cosh x \cosh y}{\cosh x \cosh y} + \frac{\sinh x \sinh y}{\cosh x \cosh y}} \\
 &= \frac{\frac{\sinh y}{\cosh y} + \frac{\sinh x}{\cosh x}}{1 + \frac{\sinh x}{\cosh x} \cdot \frac{\sinh x}{\cosh x}} \\
 &= \frac{\tanh y + \tanh x}{1 + \tanh x \cdot \tanh y}
 \end{aligned}$$

1.16

$$\begin{aligned}
 (\cosh x + \sinh x)^n &= (e^x)^n \\
 &= e^{nx} \\
 &= \cosh nx + \sinh nx
 \end{aligned}$$

2.1

$$\begin{aligned}
 \frac{d \sinh 5x}{dx} &= \cosh(5x) \cdot \frac{d(5x)}{dx} \\
 &= \cosh(5x) \cdot 5 \\
 &= 5 \cosh 5x
 \end{aligned}$$

2.2

$$\begin{aligned}\frac{d \cosh x^4}{dx} &= \sinh(x^4) \cdot \frac{d(x^4)}{dx} \\ &= \sinh(x^4) \cdot 4x^3 \\ &= 4x^3 \sinh(x^4)\end{aligned}$$

2.3

$$\begin{aligned}\frac{d(x^2 \tanh \sqrt{x})}{dx} &= \frac{d(x^2)}{dx} \tanh \sqrt{x} + x^2 \frac{d(\tanh \sqrt{x})}{dx} \\ &= 2x \tanh \sqrt{x} + x^2 \operatorname{sech}^2(\sqrt{x}) \cdot \frac{d(\sqrt{x})}{dx} \\ &= 2x \tanh \sqrt{x} + x^2 \operatorname{sech}^2(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} \\ &= 2x \tanh \sqrt{x} + \frac{1}{2} x^{3/2} \operatorname{sech}^2 \sqrt{x}\end{aligned}$$

2.4

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\coth \frac{2}{x^2}\right)}{dx} &= -\operatorname{csch}^2 \frac{2}{x^2} \cdot \frac{d\left(\frac{2}{x^2}\right)}{dx} \\ &= -\operatorname{csch}^2 \frac{2}{x^2} \cdot \frac{-4}{x^3} \\ &= \frac{4}{x^3} \operatorname{csch}^2 \frac{2}{x^2}\end{aligned}$$

2.5

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(\frac{\operatorname{sech} x^2}{x^2+4}\right)}{dx} &= \frac{\frac{d(\operatorname{sech} x^2)}{dx} \cdot (x^2+4) - \operatorname{sech} x^2 \cdot \frac{d(x^2+4)}{dx}}{(x^2+4)^2} \\
&= \frac{-\operatorname{sech} x^2 \tanh x^2 \frac{d(x^2)}{dx} \cdot (x^2+4) - \operatorname{sech} x^2 \cdot 2x}{(x^2+4)^2} \\
&= \frac{-\operatorname{sech} x^2 \tanh x^2 2x \cdot (x^2+4) - \operatorname{sech} x^2 \cdot 2x}{(x^2+4)^2} \\
&= \frac{-\operatorname{sech} x^2 \tanh x^2 2x \cdot (x^2+4)}{(x^2+4)^2} - \frac{\operatorname{sech} x^2 \cdot 2x}{(x^2+4)^2} \\
&= \frac{-\operatorname{sech} x^2 \tanh x^2 2x}{(x^2+4)} - \frac{\operatorname{sech} x^2 \cdot 2x}{(x^2+4)^2} \\
&= -\frac{2x \operatorname{sech} x^2}{x^2+4} \left(\tanh x^2 + \frac{1}{x^2+4} \right)
\end{aligned}$$

2.6

$$\begin{aligned}
\frac{d(\operatorname{csch}^2 3x)}{dx} &= 2 \operatorname{csch} 3x \cdot \frac{d \operatorname{csch} 3x}{dx} \\
&= 2 \operatorname{csch} 3x \cdot (-\operatorname{csch} 3x \operatorname{coth} 3x) \frac{d3x}{dx} \\
&= 2 \operatorname{csch} 3x \cdot (-\operatorname{csch} 3x \operatorname{coth} 3x) \cdot 3 \\
&= -6 \operatorname{csch}^2 3x \cdot \operatorname{coth} 3x
\end{aligned}$$

2.7

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\ln(\cosh(3x)))}{dx} &= \frac{\frac{d \cosh 3x}{dx}}{\cosh 3x} \\
 &= \frac{\sinh 3x \frac{d3x}{dx}}{\cosh 3x} \\
 &= \frac{\sinh 3x \cdot 3}{\cosh 3x} \\
 &= 3 \tanh 3x
 \end{aligned}$$

2.8

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\cosh \sqrt{3x^2 + 2x + 2})}{dx} &= \sinh \sqrt{3x^2 + 2x + 2} \frac{d\sqrt{3x^2 + 2x + 2}}{dx} \\
 &= \sinh \sqrt{3x^2 + 2x + 2} \cdot \frac{1}{2} (3x^2 + 2x + 2)^{-1/2} \frac{d(3x^2 + 2x + 2)}{dx} \\
 &= \sinh \sqrt{3x^2 + 2x + 2} \cdot \frac{1}{2} (3x^2 + 2x + 2)^{-1/2} \cdot (6x + 2) \\
 &= \frac{(3x + 1) \cdot \sinh \sqrt{3x^2 + 2x + 2}}{\sqrt{3x^2 + 2x + 2}}
 \end{aligned}$$

2.9

$$\begin{aligned}
 \frac{d\left(\frac{1}{\tanh^2(x) + 4}\right)}{dx} &= -(\tanh^2(x) + 4)^{-2} \frac{d(\tanh^2(x) + 4)}{dx} \\
 &= -(\tanh^2(x) + 4)^{-2} 2 \tanh x \frac{d(\tanh(x))}{dx} \\
 &= -(\tanh^2(x) + 4)^{-2} 2 \tanh x \operatorname{sech}^2 x \\
 &= -\frac{2 \tanh x \operatorname{sech}^2 x}{(\tanh^2(x) + 4)^2}
 \end{aligned}$$

2.10

$$\begin{aligned}\frac{d(\arctan(\sinh(x)))}{dx} &= \frac{1}{1+\sinh^2 x} \frac{d(\sinh x)}{dx} \\ &= \frac{1}{1+\sinh^2 x} \cosh x\end{aligned}$$

Mais comme $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{d(\arctan(\sinh(x)))}{dx} &= \frac{1}{1+\sinh^2 x} \cosh x \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} \cosh x \\ &= \frac{1}{\cosh x} \\ &= \operatorname{sech} x\end{aligned}$$

2.11 On pose

$$\begin{aligned}u &= 2x+1 \\ du &= 2dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \sinh(2x+1) dx &= \frac{1}{2} \int \sinh(2x+1) 2dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sinh u du \\ &= \frac{1}{2} \cosh u + C \\ &= \frac{1}{2} \cosh(2x+1) + C\end{aligned}$$

2.12 On pose

$$\begin{aligned}u &= \sinh x \\ du &= \cosh x dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\cosh x}{1 + \sinh x} dx &= \int \frac{\cosh x dx}{1 + \sinh x} \\
 &= \int \frac{du}{1 + u} \\
 &= \ln(1 + u) + C \\
 &= \ln(1 + \sinh x) + C
 \end{aligned}$$

2.13 On pose

$$\begin{aligned}
 u &= x^3 \\
 du &= 3x^2 dx
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \int x^2 \sinh(x^3) dx &= \frac{1}{3} \int \sinh(x^3) \cdot 3x^2 dx \\
 &= \frac{1}{3} \int \sinh u du \\
 &= \frac{1}{3} \cosh u + C \\
 &= \frac{1}{3} \cosh x^3 + C
 \end{aligned}$$

2.14 On pose

$$\begin{aligned}
 u &= \sqrt{x} \\
 du &= \frac{1}{2} x^{-1/2} dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sinh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int \sinh \sqrt{x} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\
 &= 2 \int \sinh u \cdot du \\
 &= 2 \cosh u + C \\
 &= 2 \cosh \sqrt{x} + C
 \end{aligned}$$

2.15 On pose

$$\begin{aligned}
 u &= 3x \\
 du &= 3dx
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sinh^2(3x)} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sinh^2(3x)} 3dx \\
 &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sinh^2 u} du \\
 &= \frac{1}{3} \int \operatorname{csch}^2 u du \\
 &= -\frac{1}{3} \coth u + C \\
 &= -\frac{1}{3} \coth 3x + C
 \end{aligned}$$

2.16 On pose

$$\begin{aligned}
 u &= \sinh x \\
 du &= \cosh x dx
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \coth x dx &= \int \frac{\cosh x}{\sinh x} dx \\ &= \int \frac{\cosh x dx}{\sinh x} \\ &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln u + C \\ &= \ln(\sinh x) + C\end{aligned}$$

2.17 On pose

$$\begin{aligned}u &= \sinh x \\ du &= \cosh x dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \sinh x \cosh x dx &= \int u du \\ &= \frac{u^2}{2} + C \\ &= \frac{\sinh^2 x}{2} + C\end{aligned}$$

Autre possibilité

On pose

$$\begin{aligned}u &= \cosh x \\ du &= \sinh x dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \int \sinh x \cosh x dx &= \int \cosh x \sinh x dx \\
 &= \int u du \\
 &= \frac{u^2}{2} + K \\
 &= \frac{\cosh^2 x}{2} + K
 \end{aligned}$$

(Les deux réponses sont équivalentes puisque $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$)

2.18 En utilisant $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, l'intégrale est

$$\begin{aligned}
 \int \cosh^3 x dx &= \int \cosh^2 x \cosh x dx \\
 &= \int (1 + \sinh^2 x) \cosh x dx \\
 &= \int (\cosh x + \sinh^2 x \cosh x) dx \\
 &= \int \cosh x dx + \int \sinh^2 x \cosh x dx
 \end{aligned}$$

La première intégrale est facile à faire. Pour la 2^e intégrale, on pose

$$\begin{aligned}
 u &= \sinh x \\
 du &= \cosh x dx
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \int \sinh^2 x \cosh x dx &= \int u^2 du \\
 &= \frac{u^3}{3} + C \\
 &= \frac{\sinh^3 x}{3} + C
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \int \cosh^3 x dx &= \int \cosh x dx + \int \sinh^2 x \cosh x dx \\
 &= \sinh x + \frac{\sinh^3 x}{3} + C \\
 &= \frac{1}{3} \sinh x (3 + \sinh^2 x) + C
 \end{aligned}$$

2.19 On pose

$$\begin{aligned}
 u &= \cosh x \\
 du &= \sinh x dx
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sinh x}{1 + \cosh^2 x} dx &= \int \frac{\sinh x dx}{1 + \cosh^2 x} \\
 &= \int \frac{du}{1 + u^2} \\
 &= \arctan u + C \\
 &= \arctan(\cosh x) + C
 \end{aligned}$$

2.20 On pose

$$\begin{aligned}
 u &= \cosh x \\
 du &= \sinh x dx
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \int \sinh x \operatorname{sech}^2 x dx &= \int \frac{\sinh x dx}{\cosh^2 x} \\
 &= \int \frac{du}{u^2} \\
 &= -u^{-1} + C \\
 &= -\frac{1}{\cosh x} + C \\
 &= -\operatorname{sech} x + C
 \end{aligned}$$

2.20 L'aire sous la courbe est

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \cosh x dx &= [\sinh x]_{-1}^2 \\ &= \sinh 2 - \sinh(-1) \\ &= 4,8021\end{aligned}$$

3.1

$$\operatorname{arsinh} 1 = 0,8814$$

3.2

$$\operatorname{arcosh} 1 = 1,3170$$

3.3

$$\operatorname{artanh} \frac{1}{2} = 0,5493$$

3.4 On pose premièrement $y = \operatorname{arsech}(x)$. On a alors

$$y = \operatorname{arsech}(x)$$

$$\operatorname{sech} y = x$$

$$\frac{1}{\cosh y} = x$$

$$\cosh y = \frac{1}{x}$$

$$y = \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Puisque $y = \operatorname{arsech}(x)$, on a

$$\operatorname{arsech}(x) = \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

3.5 On pose premièrement $y = \operatorname{arcsch}(x)$. On a alors

$$y = \operatorname{arcsch}(x)$$

$$\operatorname{csch} y = x$$

$$\frac{1}{\sinh y} = x$$

$$\sinh y = \frac{1}{x}$$

$$y = \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Puisque $y = \operatorname{arcsch}(x)$, on a

$$\operatorname{arcsch}(x) = \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

3.6 On pose premièrement $y = \operatorname{arcoth}(x)$. On a alors

$$y = \operatorname{arcoth}(x)$$

$$\operatorname{coth} y = x$$

$$\frac{1}{\tanh y} = x$$

$$\tanh y = \frac{1}{x}$$

$$y = \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Puisque $y = \operatorname{arcoth}(x)$, on a

$$\operatorname{arcoth}(x) = \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

3.7

$$\begin{aligned} \operatorname{arsech}\frac{3}{4} &= \operatorname{arcosh}\frac{4}{3} \\ &= 0,7954 \end{aligned}$$

3.8

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsch} 3 &= \operatorname{arsinh} \frac{1}{3} \\ &= 0,3275\end{aligned}$$

3.9

$$\begin{aligned}\operatorname{arcoth} 2 &= \operatorname{artanh} \frac{1}{2} \\ &= 0,5493\end{aligned}$$

3.10 On pose premièrement $y = \operatorname{artanh}(x)$. On a alors

$$\begin{aligned}x &= \tanh y \\ x &= \frac{\sinh y}{\cosh y} \\ x &= \frac{(e^y - e^{-y})/2}{(e^y + e^{-y})/2} \\ x &= \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \\ xe^y + xe^{-y} &= e^y - e^{-y} \\ x(e^y)^2 + x &= (e^y)^2 - 1 \\ x(e^y)^2 - (e^y)^2 &= -1 - x \\ (e^y)^2(x-1) &= -1 - x \\ (e^y)^2 &= \frac{-1-x}{x-1} \\ (e^y)^2 &= \frac{1+x}{1-x} \\ e^y &= \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \\ y &= \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\end{aligned}$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante

$$y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$y = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{1/2}$$

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

Puisque $y = \operatorname{artanh}(x)$, on a

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

Il y a une restriction pour éviter d'avoir le logarithme d'un nombre négatif ou de 0.

Si $x \geq 1$, le dénominateur dans le logarithme est 0 ou négatif, ce qui n'est pas acceptable.

Si $x \leq -1$, le numérateur dans le logarithme est 0 ou négatif, ce qui n'est pas acceptable.

Cette restriction est bien sensée puisque la fonction $\operatorname{artanh} x$ n'existe qu'entre -1 et 1.

3.11 Version 1

Selon ce qu'on a vu au chapitre 1, on a

$$\arcsin z = -i \ln \left(iz + \sqrt{1-z^2} \right)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \arcsin(ix) &= -i \ln \left(i(ix) + \sqrt{1-(ix)^2} \right) \\ &= -i \ln \left(-x + \sqrt{1+x^2} \right) \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\arcsin(ix) &= -i \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) \\
&= i \ln(-x + \sqrt{1+x^2})^{-1} \\
&= i \ln\left(\frac{1}{-x + \sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= i \ln\left(\frac{1}{-x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= i \ln\left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{-x^2 - x\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+x^2} + (\sqrt{1+x^2})^2}\right) \\
&= i \ln\left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{-x^2 + (\sqrt{1+x^2})^2}\right) \\
&= i \ln\left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{-x^2 + (1+x^2)}\right) \\
&= i \ln\left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{1}\right) \\
&= i \ln(x + \sqrt{1+x^2})
\end{aligned}$$

Or, comme

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

on arrive à

$$\arcsin(ix) = i \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$\arcsin(ix) = i \operatorname{arsinh}(x)$$

Version 2

$$\text{On pose } y = \arcsin(ix)$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 \sin y &= ix \\
 -i \sin y &= x \\
 -i \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} &= x \\
 -\frac{e^{(iy)} - e^{-(iy)}}{2} &= x \\
 -\sinh(iy) &= x \\
 \sinh(-iy) &= x \\
 -iy &= \operatorname{arsinh} x \\
 y &= \frac{\operatorname{arsinh} x}{-i} \\
 y &= i \operatorname{arsinh} x
 \end{aligned}$$

Comme $y = \arcsin(ix)$, on a

$$\arcsin(ix) = i \operatorname{arsinh} x$$

3.12 Version 1

On pose premièrement $y = \operatorname{artanh}(x)$. On a alors

$$\begin{aligned}
 y &= \operatorname{artanh} x \\
 x &= \tanh y \\
 \frac{dx}{dy} &= \operatorname{sech}^2 y
 \end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
 \cosh^2 y - \sinh^2 y &= 1 \\
 1 - \frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y} &= \frac{1}{\cosh^2 y} \\
 1 - \tanh^2 y &= \operatorname{sech}^2 y
 \end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{sech}^2 y$$

$$\frac{dx}{dy} = 1 - \tanh^2 y$$

$$\frac{dx}{dy} = 1 - x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Puisque, $y = \operatorname{artanh}(x)$, on a

$$\frac{d(\operatorname{artanh} x)}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Version 2

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{artanh} x}{dx} &= \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\ln(1+x) - \ln(1-x)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1-x}{(1+x)(1-x)} + \frac{1+x}{(1+x)(1-x)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{(1+x)(1-x)} \right) \\ &= \frac{1}{(1+x)(1-x)} \\ &= \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

3.13

$$\begin{aligned}\frac{d \operatorname{arsinh} 5x}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{25x^2 + 1}} \frac{d5x}{dx} \\ &= \frac{5}{\sqrt{25x^2 + 1}}\end{aligned}$$

3.14

$$\begin{aligned}\frac{d \operatorname{arcosh} x^4}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{(x^4)^2 - 1}} \frac{dx^4}{dx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(x^4)^2 - 1}} 4x^3 \\ &= \frac{4x^3}{\sqrt{x^8 - 1}}\end{aligned}$$

3.15

$$\begin{aligned}\frac{d(x^2 \operatorname{artanh} \sqrt{x})}{dx} &= \frac{d(x^2)}{dx} \operatorname{artanh} \sqrt{x} + x^2 \frac{d(\operatorname{artanh} \sqrt{x})}{dx} \\ &= 2x \operatorname{artanh} \sqrt{x} + x^2 \frac{1}{1 - (\sqrt{x})^2} \frac{d\sqrt{x}}{dx} \\ &= 2x \operatorname{artanh} \sqrt{x} + x^2 \frac{1}{1 - (\sqrt{x})^2} \frac{1}{2} x^{-1/2} \\ &= 2x \operatorname{artanh} \sqrt{x} + \frac{x^{3/2}}{2} \frac{1}{1 - x}\end{aligned}$$

3.16

$$\begin{aligned}
 \frac{d\left(\operatorname{arcoth} \frac{2}{x^2}\right)}{dx} &= \frac{1}{1-\left(\frac{2}{x^2}\right)^2} \frac{d\frac{2}{x^2}}{dx} \\
 &= \frac{1}{1-\left(\frac{2}{x^2}\right)^2} (-4)x^{-3} \\
 &= \frac{-4}{1-\frac{4}{x^4}} \frac{1}{x^3} \\
 &= \frac{-4x^4}{x^4-4} \frac{1}{x^3} \\
 &= \frac{-4x}{x^4-4}
 \end{aligned}$$

3.17

$$\begin{aligned}
 \frac{d\left(\frac{\operatorname{arsech}(x^2)}{x^2+4}\right)}{dx} &= \frac{d(x^2+4)^{-1}}{dx} \operatorname{arsech} x^2 + (x^2+4)^{-1} \frac{d(\operatorname{arsech} x^2)}{dx} \\
 &= -(x^2+4)^{-2} \frac{d(x^2+4)}{dx} \operatorname{arsech} x^2 + (x^2+4)^{-1} \left(\frac{-1}{x^2\sqrt{1-(x^2)^2}}\right) \frac{d(x^2)}{dx} \\
 &= -(x^2+4)^{-2} 2x \operatorname{arsech} x^2 + (x^2+4)^{-1} \left(\frac{-1}{x^2\sqrt{1-(x^2)^2}}\right) 2x \\
 &= -\frac{2x \operatorname{arsech} x^2}{(x^2+4)^2} + \frac{-2x}{(x^2-4)x^2\sqrt{1-x^4}} \\
 &= -\frac{2x}{x^2+4} \left(\frac{\operatorname{arsech} x^2}{x^2+4} + \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^4}}\right)
 \end{aligned}$$

3.18 Au minimum, la dérivée de la fonction est nulle. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{d(8 \cosh x - \sinh x)}{dx} &= 0 \\ 8 \sinh x - \cosh x &= 0 \\ 8 \sinh x &= \cosh x \\ 8 \tanh x &= 1 \\ \tanh x &= \frac{1}{8} \\ x &= \operatorname{artanh} \frac{1}{8} \\ x &= 0,1257 \end{aligned}$$

La valeur minimale de la fonction est alors

$$8 \cosh(0,1257) - \sinh(0,1257) = 7,9373$$

Il faudrait alors s'assurer que c'est un minimum. Si c'est un minimum, la 2^e dérivée de la fonction doit être positive. La deuxième dérivée est

$$\begin{aligned} \frac{d^2(8 \cosh x - \sinh x)}{dx^2} &= \frac{d(8 \sinh x - \cosh x)}{dx} \\ &= 8 \cosh x - \sinh x \end{aligned}$$

La valeur de la deuxième dérivée est donc

$$8 \cosh(0,1257) - \sinh(0,1257) = 7,9373$$

Comme le résultat est positif, il s'agit bel et bien d'un minimum.

3.19 On pose

$$\begin{aligned} u &= 2x \\ du &= 2dx \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{49+4x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{49+(2x)^2}} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{49+(2x)^2}} 2dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{49+u^2}} du \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{arsinh}\left(\frac{u}{7}\right) + C \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{arsinh}\left(\frac{2x}{7}\right) + C
\end{aligned}$$

3.20 On pose

$$\begin{aligned}
u &= 2x \\
du &= 2dx
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{81-4x^2} dx &= \int_0^1 \frac{1}{81-(2x)^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{81-(2x)^2} 2dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{81-u^2} du \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{9} \operatorname{artanh}\left(\frac{u}{9}\right) \right]_0^2 \\
&= \left[\frac{1}{18} \operatorname{artanh}\left(\frac{2}{9}\right) - \frac{1}{18} \operatorname{artanh}\left(\frac{0}{9}\right) \right] \\
&= 0,01256
\end{aligned}$$

Notez qu'on prend l'artanh comme réponse de l'intégrale puisque les valeurs entre les bornes sont inférieures à 9 (qui est la valeur de a).

3.21 On pose

$$u = 2x$$

$$du = 2dx$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_5^6 \frac{1}{81-4x^2} dx &= \int_5^6 \frac{1}{81-(2x)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_5^6 \frac{1}{81-(2x)^2} 2dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{10}^{12} \frac{1}{81-u^2} du \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{9} \operatorname{arcoth} \left(\frac{u}{9} \right) \right]_{10}^{12} \\ &= \left[\frac{1}{18} \operatorname{arcoth} \left(\frac{12}{9} \right) - \frac{1}{18} \operatorname{arcoth} \left(\frac{10}{9} \right) \right] \\ &= \left[\frac{1}{18} \operatorname{artanh} \left(\frac{9}{12} \right) - \frac{1}{18} \operatorname{artanh} \left(\frac{9}{10} \right) \right] \\ &= 0,05405 - 0,08179 \\ &= -0,02774 \end{aligned}$$

Notez qu'on prend l'arcoth comme réponse de l'intégrale puisque les valeurs entre les bornes sont supérieures à 9 (qui est la valeur de a).

3.22 On pose

$$u = e^x$$

$$du = e^x dx$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 25}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{(e^x)^2 - 25}} e^x dx \\
 &= \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 25}} du \\
 &= \operatorname{arcosh}\left(\frac{u}{5}\right) + C \\
 &= \operatorname{arcosh}\left(\frac{e^x}{5}\right) + C
 \end{aligned}$$

3.23 On pose

$$\begin{aligned}
 u &= x^2 \\
 du &= 2x dx
 \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x\sqrt{4-x^4}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2\sqrt{4-(x^2)^2}} 2x dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u\sqrt{4-u^2}} du \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \operatorname{arsech}\left(\frac{u}{2}\right) + C \right) \\
 &= -\frac{1}{4} \operatorname{arsech}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C
 \end{aligned}$$

3.24 On pose

$$\begin{aligned}
 u &= x+1 \\
 du &= dx
 \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 10}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 1 + 9}} dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + 9}} dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{u^2 + 9}} dx \\
&= \operatorname{arsinh}\left(\frac{u}{3}\right) + C \\
&= \operatorname{arsinh}\left(\frac{x+1}{3}\right) + C
\end{aligned}$$

3.25 On pose

$$u = x + 1$$

$$du = dx$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 12x + 5}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 12x + 4 + 1}} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(3x+2)^2 + 1}} dx \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(3x+2)^2 + 1}} 3dx \\
&= \frac{1}{3} \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} du \\
&= \frac{1}{3} [\operatorname{arsinh}(u)]_2^5 \\
&= \frac{1}{3} (\operatorname{arsinh}(5) - \operatorname{arsinh}(2)) \\
&= 0,2896
\end{aligned}$$

3.26 Première preuve

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \frac{1}{\cos x} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx\end{aligned}$$

On pose maintenant

$$\begin{aligned}u &= \sin x \\ du &= \cos x dx\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{1}{1 - u^2} du \\ &= \operatorname{artanh} u + C \\ &= \operatorname{artanh}(\sin x) + C\end{aligned}$$

Deuxième preuve

$$\begin{aligned}\int \csc x dx &= \int \frac{1}{\sin x} dx \\ &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx\end{aligned}$$

On pose maintenant

$$\begin{aligned}u &= \cos x \\ du &= -\sin x dx\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 \int \csc x dx &= \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx \\
 &= -\int \frac{1}{1 - u^2} du \\
 &= -\operatorname{artanh} u + C \\
 &= -\operatorname{artanh}(\cos x) + C
 \end{aligned}$$

3.27 La position de l'objet sur la ligne est (5, 0). La distance entre l'objet et l'origine est donc

$$d = \sqrt{5^2 + y^2}$$

Puisque la vitesse est proportionnelle à la distance entre l'objet et l'origine, on a

$$v = k\sqrt{5^2 + y^2}$$

Puisqu'on sait que la vitesse est de 2 m/s quand l'objet est à (5 m, 0), on a

$$\begin{aligned}
 2 \frac{m}{s} &= k\sqrt{(5m)^2 + (0m)^2} \\
 k &= \frac{2}{5s}
 \end{aligned}$$

La vitesse est donc

$$v = \frac{2}{5s}\sqrt{(5m)^2 + y^2}$$

Pour trouver la position, on utilise

$$v = \frac{dy}{dt} \text{ (puisque l'objet se déplace en } y)$$

On a alors

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{5s}\sqrt{(5m)^2 + y^2}$$

Il ne reste qu'à résoudre cette équation pour trouver la position en y

$$\frac{dy}{\sqrt{(5m)^2 + y^2}} = \frac{2}{5s} dt$$

$$\operatorname{arsinh} \frac{y}{5m} = \frac{2}{5s} \cdot t + C$$

On peut trouver la constante puisqu'on sait qu'à $t = 0$, l'objet est à $y = 0$. On a alors

$$\operatorname{arsinh} \frac{0m}{5m} = \frac{2}{5s} \cdot 0s + C$$

$$C = 0$$

La position est donc

$$\operatorname{arsinh} \frac{y}{5m} = \frac{2}{5s} \cdot t$$

$$\frac{y}{5m} = \sinh \left(\frac{2}{5s} \cdot t \right)$$

$$y = 5m \cdot \sinh \left(\frac{2}{5s} \cdot t \right)$$

À $t = 5$ s, la position en y de l'objet est donc

$$y = 5m \cdot \sinh \left(\frac{2}{5s} \cdot 5s \right)$$

$$y = 18,134m$$

La position est donc (5 m, 18,134 m).