Solutionnaire du chapitre 2

1.1

$$\sinh(1) = 1{,}1752$$

1.2

$$\cosh(2) = 3{,}7622$$

1.3

$$\tanh(3) = 0{,}9951$$

1.4

$$\begin{aligned}\operatorname{sech}(1) &= \frac{1}{\cosh(1)}\\ &= 0{,}6481\end{aligned}$$

1.5

$$\begin{aligned}\operatorname{csch}(2) &= \frac{1}{\sinh(2)}\\ &= 0{,}2757\end{aligned}$$

1.6

$$\begin{aligned}\coth(2) &= \frac{1}{\tanh(2)}\\ &= 1{,}0373\end{aligned}$$

1.7

$$\begin{aligned}\cosh x+\sinh x&=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}+\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\\&=\frac{2e^{x}}{2}\\&=e^{x}\end{aligned}$$

1.8

$$\begin{aligned}\cosh x-\sinh x&=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}-\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\\&=\frac{2e^{-x}}{2}\\&=e^{-x}\end{aligned}$$

1.9

$$\begin{aligned}\sinh(-x)&=\frac{e^{(-x)}-e^{-(-x)}}{2}\\&=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}\\&=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\\&=-\sinh x\end{aligned}$$

1.10

$$\begin{aligned}\cosh(-x)&=\frac{e^{(-x)}+e^{-(-x)}}{2}\\&=\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}\\&=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\\&=\cosh x\end{aligned}$$

1.11

$$\begin{aligned}\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x &= \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} + \frac{1}{\cosh^2 x}\\ &= \frac{\sinh^2 x + 1}{\cosh^2 x}\\ &= \frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x}\\ &= 1\end{aligned}$$

1.12

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \frac{e^{(x+y)} - e^{-(x+y)}}{2}\\ &= \frac{e^x e^y - e^{-x} e^{-y}}{2}\\ &= \frac{e^x e^y}{2} - \frac{e^{-x} e^{-y}}{2}\end{aligned}$$

Mais puisque

$$e^x = \cosh x + \sinh x \quad \text{et} \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

on a

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \frac{(\cosh x + \sinh x)(\cosh y + \sinh y)}{2} - \frac{(\cosh x - \sinh x)(\cosh y - \sinh y)}{2}\\ &= \frac{\cancel{\cosh x \cosh y} + \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y + \cancel{\sinh x \sinh y}}{2}\\ &\qquad - \frac{\cancel{\cosh x \cosh y} - \cosh x \sinh y - \sinh x \cosh y + \cancel{\sinh x \sinh y}}{2}\\ &= \frac{2\cosh x \sinh y + 2\sinh x \cosh y}{2}\\ &= \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y\end{aligned}$$

1.13

$$\cosh(x+y) = \frac{e^{(x+y)} + e^{-(x+y)}}{2}$$
$$= \frac{e^x e^y + e^{-x} e^{-y}}{2}$$
$$= \frac{e^x e^y}{2} + \frac{e^{-x} e^{-y}}{2}$$

Mais puisque

$$e^x = \cosh x + \sinh x \quad \text{et} \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

on a

$$\cosh(x+y) = \frac{(\cosh x + \sinh x)(\cosh y + \sinh y)}{2} + \frac{(\cosh x - \sinh x)(\cosh y - \sinh y)}{2}$$
$$= \frac{\cosh x \cosh y + \cancel{\cosh x \sinh y} + \cancel{\sinh x \cosh y} + \sinh x \sinh y}{2}$$
$$+ \frac{\cosh x \cosh y - \cancel{\cosh x \sinh y} - \cancel{\sinh x \cosh y} + \sinh x \sinh y}{2}$$
$$= \frac{2\cosh x \cosh y + 2\sinh x \sinh y}{2}$$
$$= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

1.14

Version 1

$$\frac{1}{\cosh x + \sinh x} = \frac{1}{\cosh x + \sinh x} \cdot \frac{\cosh x - \sinh x}{\cosh x - \sinh x}$$
$$= \frac{\cosh x - \sinh x}{\cosh^2 x - \cosh x \sinh x + \sinh x \cosh x - \sinh^2 x}$$
$$= \frac{\cosh x - \sinh x}{\cosh^2 x - \sinh^2 x}$$
$$= \frac{\cosh x - \sinh x}{1}$$
$$= \cosh x - \sinh x$$

Version 2

$$\begin{aligned}(\cosh x+\sinh x)^{-1}&=(e^{x})^{-1}\\&=e^{-x}\\&=\cosh x-\sinh x\end{aligned}$$

1.15

$$\begin{aligned}\tanh(x+y)&=\frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)}\\&=\frac{\cosh x\sinh y+\sinh x\cosh y}{\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y}\end{aligned}$$

Si on divise le numérateur et le dénominateur par cosh x cosh y, on a

$$\begin{aligned}\tanh(x+y)&=\frac{\cosh x\sinh y+\sinh x\cosh y}{\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y}\\&=\frac{\frac{\cosh x\sinh y}{\cosh x\cosh y}+\frac{\sinh x\cosh y}{\cosh x\cosh y}}{\frac{\cosh x\cosh y}{\cosh x\cosh y}+\frac{\sinh x\sinh y}{\cosh x\cosh y}}\\&=\frac{\frac{\sinh y}{\cosh y}+\frac{\sinh x}{\cosh x}}{1+\frac{\sinh x}{\cosh x}\cdot\frac{\sinh x}{\cosh x}}\\&=\frac{\tanh y+\tanh x}{1+\tanh x\cdot\tanh y}\end{aligned}$$

1.16

$$\begin{aligned}(\cosh x+\sinh x)^{n}&=(e^{x})^{n}\\&=e^{nx}\\&=\cosh nx-\sinh nx\end{aligned}$$

2.1

$$\begin{aligned}\frac{d\sinh 5x}{dx}&=\cosh(5x)\cdot\frac{d(5x)}{dx}\\&=\cosh(5x)\cdot 5\\&=5\cosh 5x\end{aligned}$$

2.2

$$\begin{aligned}\frac{d\cosh x^4}{dx} &= \sinh\left(x^4\right)\cdot\frac{d\left(x^4\right)}{dx}\\ &= \sinh\left(x^4\right)\cdot 4x^3\\ &= 4x^3\sinh\left(x^4\right)\end{aligned}$$

2.3

$$\begin{aligned}\frac{d\left(x^2\tanh\sqrt{x}\right)}{dx} &= \frac{d\left(x^2\right)}{dx}\tanh\sqrt{x}+x^2\frac{d\left(\tanh\sqrt{x}\right)}{dx}\\ &= 2x\tanh\sqrt{x}+x^2\operatorname{sech}^2\left(\sqrt{x}\right)\cdot\frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{dx}\\ &= 2x\tanh\sqrt{x}+x^2\operatorname{sech}^2\left(\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}\\ &= 2x\tanh\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^{3/2}\operatorname{sech}^2\sqrt{x}\end{aligned}$$

2.4

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\coth\frac{2}{x^2}\right)}{dx} &= -\operatorname{csch}^2\frac{2}{x^2}\cdot\frac{d\left(\frac{2}{x^2}\right)}{dx}\\ &= -\operatorname{csch}^2\frac{2}{x^2}\cdot\frac{-4}{x^3}\\ &= \frac{4}{x^3}\operatorname{csch}^2\frac{2}{x^2}\end{aligned}$$

2.5

$$
\begin{aligned}
\frac{d\left(\dfrac{\operatorname{sech} x^2}{x^2+4}\right)}{dx} &= \frac{\dfrac{d\left(\operatorname{sech} x^2\right)}{dx}\cdot\left(x^2+4\right)-\operatorname{sech} x^2\cdot\dfrac{d\left(x^2+4\right)}{dx}}{\left(x^4+4\right)^2} \\
&= \frac{-\operatorname{sech} x^2 \tanh x^2 \dfrac{d\left(x^2\right)}{dx}\cdot\left(x^2+4\right)-\operatorname{sech} x^2\cdot 2x}{\left(x^4+4\right)^2} \\
&= \frac{-\operatorname{sech} x^2 \tanh x^2\, 2x\cdot\left(x^2+4\right)-\operatorname{sech} x^2\cdot 2x}{\left(x^4+4\right)^2} \\
&= \frac{-\operatorname{sech} x^2 \tanh x^2\, 2x\cdot\left(x^2+4\right)}{\left(x^4+4\right)^2}-\frac{\operatorname{sech} x^2\cdot 2x}{\left(x^4+4\right)^2} \\
&= \frac{-\operatorname{sech} x^2 \tanh x^2\, 2x}{\left(x^4+4\right)}-\frac{\operatorname{sech} x^2\cdot 2x}{\left(x^4+4\right)^2} \\
&= -\frac{2x\operatorname{sech} x^2}{x^2+4}\left(\tanh x^2+\frac{1}{x^4+4}\right)
\end{aligned}
$$

2.6

$$
\begin{aligned}
\frac{d\left(\operatorname{csch}^2 3x\right)}{dx} &= 2\operatorname{csch} 3x\cdot\frac{d\operatorname{csch} 3x}{dx} \\
&= 2\operatorname{csch} 3x\cdot\left(-\operatorname{csch} 3x\coth 3x\right)\frac{d3x}{dx} \\
&= 2\operatorname{csch} 3x\cdot\left(-\operatorname{csch} 3x\coth 3x\right)\cdot 3 \\
&= -6\operatorname{csch}^2 3x\cdot\coth 3x
\end{aligned}
$$

2.7

$$\frac{d\left(\ln\left(\cosh\left(3x\right)\right)\right)}{dx}=\frac{\frac{d\cosh 3x}{dx}}{\cosh 3x}$$
$$=\frac{\sinh 3x\frac{d3x}{dx}}{\cosh 3x}$$
$$=\frac{\sinh 3x\cdot 3}{\cosh 3x}$$
$$=3\tanh 3x$$

2.8

$$\frac{d\left(\cosh\sqrt{3x^2+2x+2}\right)}{dx}=\sinh\sqrt{3x^2+2x+2}\,\frac{d\sqrt{3x^2+2x+2}}{dx}$$
$$=\sinh\sqrt{3x^2+2x+2}\cdot\frac{1}{2}\left(3x^2+2x+2\right)^{-1/2}\frac{d\left(3x^2+2x+2\right)}{dx}$$
$$=\sinh\sqrt{3x^2+2x+2}\cdot\frac{1}{2}\left(3x^2+2x+2\right)^{-1/2}\cdot\left(6x+2\right)$$
$$=\frac{\left(3x+1\right)\cdot\sinh\sqrt{3x^2+2x+2}}{\sqrt{3x^2+2x+2}}$$

2.9

$$\frac{d\left(\frac{1}{\tanh^2\left(x\right)+4}\right)}{dx}=-\left(\tanh^2\left(x\right)+4\right)^{-2}\frac{d\left(\tanh^2\left(x\right)+4\right)}{dx}$$
$$=-\left(\tanh^2\left(x\right)+4\right)^{-2}2\tanh x\frac{d\left(\tanh\left(x\right)\right)}{dx}$$
$$=-\left(\tanh^2\left(x\right)+4\right)^{-2}2\tanh x\,\mathrm{sech}^2\,x$$
$$=-\frac{2\tanh x\,\mathrm{sech}^2\,x}{\left(\tanh^2\left(x\right)+4\right)^2}$$

2.10

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\arctan\left(\sinh\left(x\right)\right)\right)}{dx}&=\frac{1}{1+\sinh^2 x}\frac{d\left(\sinh x\right)}{dx}\\&=\frac{1}{1+\sinh^2 x}\cosh x\end{aligned}$$

Mais comme $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\arctan\left(\sinh\left(x\right)\right)\right)}{dx}&=\frac{1}{1+\sinh^2 x}\cosh x\\&=\frac{1}{\cosh^2 x}\cosh x\\&=\frac{1}{\cosh x}\\&=\operatorname{sech} x\end{aligned}$$

2.11 On pose

$$\begin{aligned}u&=2x+1\\du&=2dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int\sinh\left(2x+1\right)dx&=\frac{1}{2}\int\sinh\left(2x+1\right)2dx\\&=\frac{1}{2}\int\sinh u du\\&=\frac{1}{2}\cosh u+C\\&=\frac{1}{2}\cosh\left(2x+1\right)+C\end{aligned}$$

2.12 On pose

$$\begin{aligned}u&=\sinh x\\du&=\cosh x dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \frac{\cosh x}{1+\sinh x}dx &= \int \frac{\cosh x dx}{1+\sinh x}\\ &= \int \frac{du}{1+u}\\ &= \ln(1+u)+C\\ &= \ln(1+\sinh x)+C\end{aligned}$$

2.13 On pose

$$\begin{aligned}u &= x^3\\ du &= 3x^2 dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int x^2 \sinh(x^3)dx &= \frac{1}{3}\int \sinh(x^3)\cdot 3x^2 dx\\ &= \frac{1}{3}\int \sinh u du\\ &= \frac{1}{3}\cosh u + C\\ &= \frac{1}{3}\cosh x^3 + C\end{aligned}$$

2.14 On pose

$$\begin{aligned}u &= \sqrt{x}\\ du &= \frac{1}{2}x^{-1/2}dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \frac{\sinh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx &= 2\int \sinh\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x}}\\ &= 2\int \sinh u\cdot du\\ &= 2\cosh u + C\\ &= 2\cosh\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

2.15 On pose

$$\begin{aligned}u &= 3x\\ du &= 3dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sinh^2(3x)}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sinh^2(3x)}3dx\\ &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sinh^2 u}du\\ &= \frac{1}{3}\int \operatorname{csch}^2 u\,du\\ &= -\frac{1}{3}\coth u + C\\ &= -\frac{1}{3}\coth 3x + C\end{aligned}$$

2.16 On pose

$$\begin{aligned}u &= \sinh x\\ du &= \cosh x\,dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \coth x dx &= \int \frac{\cosh x}{\sinh x} dx \\ &= \int \frac{\cosh x dx}{\sinh x} \\ &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln u + C \\ &= \ln(\sinh x) + C\end{aligned}$$

2.17 On pose

$$\begin{aligned}u &= \sinh x \\ du &= \cosh x dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \sinh x \cosh x dx &= \int u du \\ &= \frac{u^2}{2} + C \\ &= \frac{\sinh^2 x}{2} + C\end{aligned}$$

Autre possibilité

On pose

$$\begin{aligned}u &= \cosh x \\ du &= \sinh x dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \sinh x \cosh x dx &= \int \cosh x \sinh x dx \\ &= \int u du \\ &= \frac{u^2}{2} + K \\ &= \frac{\cosh^2 x}{2} + K\end{aligned}$$

(Les deux réponses sont équivalentes puisque $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$)

2.18 En utilisant $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, l'intégrale est

$$\begin{aligned}\int \cosh^3 x dx &= \int \cosh^2 x \cosh x dx \\ &= \int \left(1 + \sinh^2 x\right) \cosh x dx \\ &= \int \left(\cosh x + \sinh^2 x \cosh x\right) dx \\ &= \int \cosh x dx + \int \sinh^2 x \cosh x dx\end{aligned}$$

La première intégrale est facile à faire. Pour la 2e intégrale, on pose

$$\begin{aligned}u &= \sinh x \\ du &= \cosh x dx\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \sinh^2 x \cosh x dx &= \int u^2 du \\ &= \frac{u^3}{3} + C \\ &= \frac{\sinh^3 x}{3} + C\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \cosh^3 x dx &= \int \cosh x dx + \int \sinh^2 x \cosh x dx \\ &= \sinh x + \frac{\sinh^3 x}{3} + C \\ &= \frac{1}{3}\sinh x\left(3 + \sinh^2 x\right) + C\end{aligned}$$

2.19 On pose

$$\begin{aligned} u &= \cosh x \\ du &= \sinh x dx \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \frac{\sinh x}{1+\cosh^2 x} dx &= \int \frac{\sinh x dx}{1+\cosh^2 x} \\ &= \int \frac{du}{1+u^2} \\ &= \arctan u + C \\ &= \arctan\left(\cosh x\right) + C\end{aligned}$$

2.20 On pose

$$\begin{aligned} u &= \cosh x \\ du &= \sinh x dx \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \sinh x \operatorname{sech}^2 x dx &= \int \frac{\sinh x dx}{\cosh^2 x} \\ &= \int \frac{du}{u^2} \\ &= -u^{-1} + C \\ &= -\frac{1}{\cosh x} + C \\ &= -\operatorname{sech} x + C\end{aligned}$$

2.20 L'aire sous la courbe est

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} \cosh x dx &= [\sinh x]_{-1}^{2} \\ &= \sinh 2 - \sinh(-1) \\ &= 4,8021\end{aligned}$$

3.1

$$\operatorname{arsinh} 1 = 0,8814$$

3.2

$$\operatorname{arcosh} 1 = 1,3170$$

3.3

$$\operatorname{artanh} \tfrac{1}{2} = 0,5493$$

3.4 On pose premièrement $y = \operatorname{arsech}(x)$. On a alors

$$\begin{gathered} y = \operatorname{arsech}(x) \\ \operatorname{sech} y = x \\ \frac{1}{\cosh y} = x \\ \cosh y = \frac{1}{x} \\ y = \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{x}\right) \end{gathered}$$

Puisque $y = \operatorname{arsech}(x)$, on a

$$\operatorname{arsech}(x) = \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

3.5 On pose premièrement $y = \operatorname{arcsch}(x)$. On a alors

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{arcsch}(x) \\ \operatorname{csch} y &= x \\ \frac{1}{\sinh y} &= x \\ \sinh y &= \frac{1}{x} \\ y &= \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Puisque $y = \operatorname{arcsch}(x)$, on a

$$\operatorname{arcsch}(x) = \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

3.6 On pose premièrement $y = \operatorname{arcoth}(x)$. On a alors

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{arcoth}(x) \\ \coth y &= x \\ \frac{1}{\tanh y} &= x \\ \tanh y &= \frac{1}{x} \\ y &= \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Puisque $y = \operatorname{arcoth}(x)$, on a

$$\operatorname{arcoth}(x) = \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

3.7

$$\begin{aligned} \operatorname{arsech}\frac{3}{4} &= \operatorname{arcosh}\frac{4}{3} \\ &= 0,7954 \end{aligned}$$

3.8

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsch} 3 &= \operatorname{arsinh}\frac{1}{3} \\ &= 0,3275\end{aligned}$$

3.9

$$\begin{aligned}\operatorname{arcoth} 2 &= \operatorname{artanh}\frac{1}{2} \\ &= 0,5493\end{aligned}$$

3.10 On pose premièrement $y = \operatorname{artanh}(x)$. On a alors

$$x = \tanh y$$

$$x = \frac{\sinh y}{\cosh y}$$

$$x = \frac{\left(e^{y} - e^{-y}\right)/2}{\left(e^{y} + e^{-y}\right)/2}$$

$$x = \frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}}$$

$$xe^{y} + xe^{-y} = e^{y} - e^{-y}$$

$$x\left(e^{y}\right)^{2} + x = \left(e^{y}\right)^{2} - 1$$

$$x\left(e^{y}\right)^{2} - \left(e^{y}\right)^{2} = -1 - x$$

$$\left(e^{y}\right)^{2}(x-1) = -1 - x$$

$$\left(e^{y}\right)^{2} = \frac{-1-x}{x-1}$$

$$\left(e^{y}\right)^{2} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$e^{y} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$y = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

On peut écrire cette équation sous la forme suivante

$$y = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$
$$y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}$$
$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Puisque $y = \operatorname{artanh}(x)$, on a

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Il y a une restriction pour éviter d'avoir le logarithme d'un nombre négatif ou de 0.
Si $x \geq 1$, le dénominateur dans le logarithme est 0 ou négatif, ce qui n'est pas acceptable.
Si $x \leq -1$, le numérateur dans le logarithme est 0 ou négatif, ce qui n'est pas acceptable.

Cette restriction est bien sensée puisque la fonction arctanh x n'existe qu'entre -1 et 1.

3.11 Version 1

Selon ce qu'on a vu au chapitre 1, on a

$$\arcsin z = -i\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

On a donc

$$\begin{aligned}\arcsin(ix) &= -i\ln\left(i(ix) + \sqrt{1-(ix)^2}\right)\\ &= -i\ln\left(-x + \sqrt{1+x^2}\right)\end{aligned}$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
\arcsin(ix) &= -i\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right) \\
&= i\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-1} \\
&= i\ln\left(\frac{1}{-x+\sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= i\ln\left(\frac{1}{-x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= i\ln\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{-x^2-x\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+x^2}+\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}\right) \\
&= i\ln\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{-x^2+\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}\right) \\
&= i\ln\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{-x^2+\left(1+x^2\right)}\right) \\
&= i\ln\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{1}\right) \\
&= i\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)
\end{aligned}
$$

Or, comme

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

on arrive à

$$\arcsin(ix) = i\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$
$$\arcsin(ix) = i\operatorname{arsinh}(x)$$

Version 2

On pose $y = \arcsin(ix)$

On a alors

$$\begin{aligned}
\sin y &= ix \\
-i\sin y &= x \\
-i\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} &= x \\
-\frac{e^{(iy)}-e^{-(iy)}}{2} &= x \\
-\sinh\left(iy\right) &= x \\
\sinh\left(-iy\right) &= x \\
-iy &= \operatorname{arsinh} x \\
y &= \frac{\operatorname{arsinh} x}{-i} \\
y &= i\operatorname{arsinh} x
\end{aligned}$$

Comme $y = \arcsin\left(ix\right)$, on a

$$\arcsin\left(ix\right) = i\operatorname{arsinh} x$$

3.12 Version 1

On pose premièrement $y = \operatorname{artanh}\left(x\right)$. On a alors

$$\begin{aligned}
y &= \operatorname{artanh} x \\
x &= \tanh y \\
\frac{dx}{dy} &= \operatorname{sech}^2 y
\end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
\cosh^2 y - \sinh^2 y &= 1 \\
1 - \frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y} &= \frac{1}{\cosh^2 y} \\
1 - \tanh^2 y &= \operatorname{sech}^2 y
\end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{sech}^2 y$$

$$\frac{dx}{dy} = 1 - \tanh^2 y$$

$$\frac{dx}{dy} = 1 - x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Puisque, $y = \operatorname{artanh}(x)$, on a

$$\frac{d(\operatorname{artanh} x)}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Version 2

$$\begin{aligned}
\frac{d \operatorname{artanh} x}{dx} &= \frac{d}{dx}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{(1+x)(1-x)} + \frac{1+x}{(1+x)(1-x)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(1+x)(1-x)}\right) \\
&= \frac{1}{(1+x)(1-x)} \\
&= \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}$$

3.13

$$\begin{aligned}\frac{d\operatorname{arsinh}5x}{dx}&=\frac{1}{\sqrt{25x^2+1}}\frac{d5x}{dx}\\&=\frac{5}{\sqrt{25x^2+1}}\end{aligned}$$

3.14

$$\begin{aligned}\frac{d\operatorname{arcosh}x^4}{dx}&=\frac{1}{\sqrt{\left(x^4\right)^2-1}}\frac{dx^4}{dx}\\&=\frac{1}{\sqrt{\left(x^4\right)^2-1}}4x^3\\&=\frac{4x^3}{\sqrt{x^8-1}}\end{aligned}$$

3.15

$$\begin{aligned}\frac{d\left(x^2\operatorname{artanh}\sqrt{x}\right)}{dx}&=\frac{d\left(x^2\right)}{dx}\operatorname{artanh}\sqrt{x}+x^2\frac{d\left(\operatorname{artanh}\sqrt{x}\right)}{dx}\\&=2x\operatorname{artanh}\sqrt{x}+x^2\frac{1}{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}\frac{d\sqrt{x}}{dx}\\&=2x\operatorname{artanh}\sqrt{x}+x^2\frac{1}{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}\frac{1}{2}x^{-1/2}\\&=2x\operatorname{artanh}\sqrt{x}+\frac{x^{3/2}}{2}\frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

3.16

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\operatorname{arcoth}\frac{2}{x^2}\right)}{dx} &= \frac{1}{1-\left(\frac{2}{x^2}\right)^2}\frac{d\frac{2}{x^2}}{dx} \\ &= \frac{1}{1-\left(\frac{2}{x^2}\right)^2}(-4)x^{-3} \\ &= \frac{-4}{1-\frac{4}{x^4}}\frac{1}{x^3} \\ &= \frac{-4x^4}{x^4-4}\frac{1}{x^3} \\ &= \frac{-4x}{x^4-4}\end{aligned}$$

3.17

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\frac{\operatorname{arsech}\left(x^2\right)}{x^2+4}\right)}{dx} &= \frac{d\left(x^2+4\right)^{-1}}{dx}\operatorname{arsech}x^2 + \left(x^2+4\right)^{-1}\frac{d\left(\operatorname{arsech}x^2\right)}{dx} \\ &= -\left(x^2+4\right)^{-2}\frac{d\left(x^2+4\right)}{dx}\operatorname{arsech}x^2 + \left(x^2+4\right)^{-1}\left(\frac{-1}{x^2\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}}\right)\frac{d\left(x^2\right)}{dx} \\ &= -\left(x^2+4\right)^{-2}2x\operatorname{arsech}x^2 + \left(x^2+4\right)^{-1}\left(\frac{-1}{x^2\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}}\right)2x \\ &= -\frac{2x\operatorname{arsech}x^2}{\left(x^2+4\right)^2} + \frac{-2x}{\left(x^2-4\right)x^2\sqrt{1-x^4}} \\ &= -\frac{2x}{x^2+4}\left(\frac{\operatorname{arsech}x^2}{x^2+4} + \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^4}}\right)\end{aligned}$$

3.18 Au minimum, la dérivée de la fonction est nulle. On a donc

$$\frac{d\left(8\cosh x - \sinh x\right)}{dx} = 0$$
$$8\sinh x - \cosh x = 0$$
$$8\sinh x = \cosh x$$
$$8\tanh x = 1$$
$$\tanh x = \frac{1}{8}$$
$$x = \operatorname{artanh}\frac{1}{8}$$
$$x = 0,1257$$

La valeur minimale de la fonction est alors

$$8\cosh\left(0,1257\right) - \sinh\left(0,1257\right) = 7,9373$$

Il faudrait alors s'assurer que c'est un minimum. Si c'est un minimum, la 2^e^ dérivée de la fonction doit être positive, La deuxième dérivée est

$$\begin{aligned}\frac{d^2\left(8\cosh x - \sinh x\right)}{dx^2} &= \frac{d\left(8\sinh x - \cosh x\right)}{dx}\\ &= 8\cosh x - \sinh x\end{aligned}$$

La valeur de la deuxième dérivée est donc

$$8\cosh\left(0,1257\right) - \sinh\left(0,1257\right) = 7,9373$$

Comme le résultat est positif, il s'agit bel et bien d'un minimum.

3.19 On pose

$$u = 2x$$
$$du = 2dx$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{49+4x^2}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{49+(2x)^2}}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{49+(2x)^2}}2dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{49+u^2}}du \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arsinh}\left(\frac{u}{7}\right)+C \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arsinh}\left(\frac{2x}{7}\right)+C
\end{aligned}$$

3.20 On pose

$$\begin{aligned}
u &= 2x \\
du &= 2dx
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{81-4x^2}dx &= \int_0^1 \frac{1}{81-(2x)^2}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{81-(2x)^2}2dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{81-u^2}du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{9}\operatorname{artanh}\left(\frac{u}{9}\right)\right]_0^2 \\
&= \left[\frac{1}{18}\operatorname{artanh}\left(\frac{2}{9}\right)-\frac{1}{18}\operatorname{artanh}\left(\frac{0}{9}\right)\right] \\
&= 0,01256
\end{aligned}$$

Notez qu'on prend l'arctanh comme réponse de l'intégrale puisque les valeurs entre les bornes sont inférieures à 9 (qui est la valeur de a).

3.21 On pose

$$u = 2x$$
$$du = 2dx$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\int_5^6 \frac{1}{81-4x^2}\,dx &= \int_5^6 \frac{1}{81-(2x)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_5^6 \frac{1}{81-(2x)^2}\,2dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{10}^{12} \frac{1}{81-u^2}\,du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{9}\operatorname{arcoth}\left(\frac{u}{9}\right)\right]_{10}^{12} \\
&= \left[\frac{1}{18}\operatorname{arcoth}\left(\frac{12}{9}\right) - \frac{1}{18}\operatorname{arcoth}\left(\frac{10}{9}\right)\right] \\
&= \left[\frac{1}{18}\operatorname{artanh}\left(\frac{9}{12}\right) - \frac{1}{18}\operatorname{artanh}\left(\frac{9}{10}\right)\right] \\
&= 0,05405 - 0,08179 \\
&= -0,02774
\end{aligned}$$

Notez qu'on prend l'arcoth comme réponse de l'intégrale puisque les valeurs entre les bornes sont supérieures à 9 (qui est la valeur de *a*).

3.22 On pose

$$u = e^x$$
$$du = e^x dx$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-25}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{\left(e^x\right)^2-25}}e^x dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{u^2-25}}du \\ &= \operatorname{arcosh}\left(\frac{u}{5}\right)+C \\ &= \operatorname{arcosh}\left(\frac{e^x}{5}\right)+C\end{aligned}$$

3.23 On pose

$$\begin{aligned}u &= x^2 \\ du &= 2xdx\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{4-x^4}}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-\left(x^2\right)^2}}2xdx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u\sqrt{4-u^2}}du \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\operatorname{arsech}\left(\frac{u}{2}\right)+C\right) \\ &= -\frac{1}{4}\operatorname{arsech}\left(\frac{x^2}{2}\right)+C\end{aligned}$$

3.24 On pose

$$\begin{aligned}u &= x+1 \\ du &= dx\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+1+9}}dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+9}}dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{u^2+9}}dx \\ &= \operatorname{arsinh}\left(\frac{u}{3}\right)+C \\ &= \operatorname{arsinh}\left(\frac{x+1}{3}\right)+C\end{aligned}$$

3.25 On pose

$$\begin{aligned}u &= x+1 \\ du &= dx\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9x^2+12x+5}}dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9x^2+12x+4+1}}dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(3x+2)^2+1}}dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(3x+2)^2+1}}3dx \\ &= \frac{1}{3}\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du \\ &= \frac{1}{3}\left[\operatorname{arsinh}(u)\right]_2^5 \\ &= \frac{1}{3}\left(\operatorname{arsinh}(5)-\operatorname{arsinh}(2)\right) \\ &= 0,2896\end{aligned}$$

3.26 *Première preuve*

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \frac{1}{\cos x} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx\end{aligned}$$

On pose maintenant

$$\begin{aligned}u &= \sin x \\ du &= \cos x dx\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{1}{1-u^2} du \\ &= \operatorname{artanh} u + C \\ &= \operatorname{artanh}\left(\sin x\right) + C\end{aligned}$$

Deuxième preuve

$$\begin{aligned}\int \csc x dx &= \int \frac{1}{\sin x} dx \\ &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx\end{aligned}$$

On pose maintenant

$$\begin{aligned}u &= \cos x \\ du &= -\sin x dx\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int \csc x dx &= \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx \\ &= -\int \frac{1}{1-u^2} du \\ &= -\operatorname{artanh} u + C \\ &= -\operatorname{artanh}\left(\cos x\right) + C\end{aligned}$$

3.27 La position de l'objet sur la ligne est (5, 0). La distance entre l'objet et l'origine est donc

$$d = \sqrt{5^2 + y^2}$$

Puisque la vitesse est proportionnelle à la distance entre l'objet et l'origine, on a

$$v = k\sqrt{5^2 + y^2}$$

Puisqu'on sait que la vitesse est de 2 m/s quand l'objet est à (5 m, 0), on a

$$\begin{aligned} 2\tfrac{m}{s} &= k\sqrt{\left(5m\right)^2 + \left(0m\right)^2} \\ k &= \tfrac{2}{5s}\end{aligned}$$

La vitesse est donc

$$v = \frac{2}{5s}\sqrt{\left(5m\right)^2 + y^2}$$

Pour trouver la position, on utilise

$$v = \frac{dy}{dt} \text{ (puisque l'objet se déplace en } y\text{)}$$

On a alors

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{5s}\sqrt{\left(5m\right)^2 + y^2}$$

Il ne reste qu'à résoudre cette équation pour trouver la position en y

$$\frac{dy}{\sqrt{(5m)^2 + y^2}} = \frac{2}{5s} dt$$

$$\operatorname{arsinh} \frac{y}{5m} = \frac{2}{5s} \cdot t + C$$

On peut trouver la constante puisqu'on sait qu'à $t = 0$, l'objet est à $y = 0$. On a alors

$$\operatorname{arsinh} \frac{0m}{5m} = \frac{2}{5s} \cdot 0s + C$$

$$C = 0$$

La position est donc

$$\operatorname{arsinh} \frac{y}{5m} = \frac{2}{5s} \cdot t$$

$$\frac{y}{5m} = \sinh\left(\frac{2}{5s} \cdot t\right)$$

$$y = 5m \cdot \sinh\left(\frac{2}{5s} \cdot t\right)$$

À $t = 5$ s, la position en y de l'objet est donc

$$y = 5m \cdot \sinh\left(\frac{2}{5s} \cdot 5s\right)$$

$$y = 18{,}134m$$

La position est donc (5 m, 18,134 m).