2. Les fonctions hyperboliques

1. Qu'est-ce que les fonctions hyperboliques ?

Définition

On définit les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique ainsi.

Définition de $\cosh x$ et de $\sinh x$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On utilise aussi les notations suivantes.

$$\operatorname{ch} x = \cosh x \qquad \operatorname{sh} x = \sinh x$$

Par similarité avec les fonctions trigonométriques, on définit aussi les fonctions suivantes.

Autres fonctions hyperboliques

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

On utilise aussi la notation suivante pour la tangente hyperbolique.

$$\operatorname{th} x = \tanh x$$

Lien avec les fonctions trigonométriques

Cette définition implique un lien avec les fonctions trigonométrique. En effet, on avait vu au chapitre 1 que

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

On a donc que

$$\cos(ix) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2}$$

Ce qui signifie que

Lien entre cosh x et cos x

$$\cos(ix) = \cosh(x)$$

On avait également vu au chapitre 1 que

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

On a donc que

$$\begin{aligned} \sin(ix) &= \frac{e^{-x} - e^{x}}{2i} \\ &= -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2i} \\ &= i\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

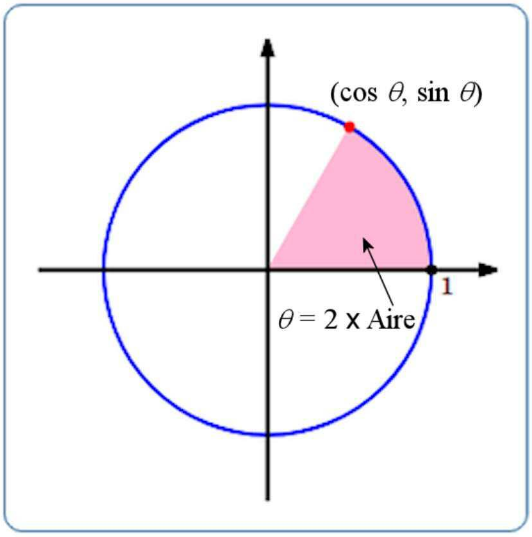
Ce qui signifie que

Lien entre sinh x et sin x

$$\sin(ix) = i\sinh(x)$$

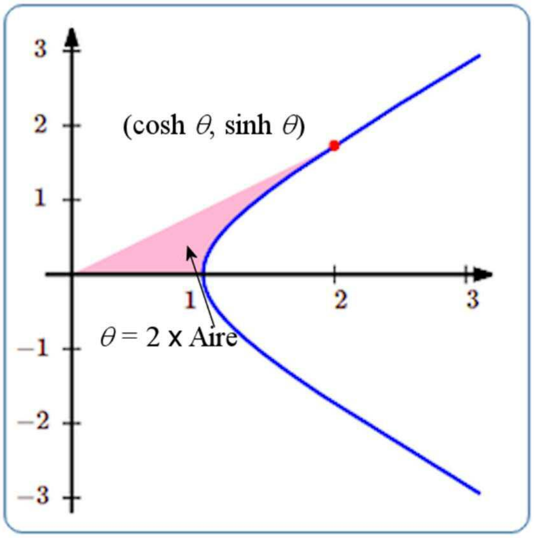
Interprétation géométriques des fonctions hyperboliques

On connait bien l'interprétation géométrique des fonctions trigonométriques. Elles permettent de calculer les coordonnées d'un point sur un cercle à partir de l'angle.



Normalement, on interprète le coefficient à l'intérieur des fonctions comme un angle, mais on peut aussi l'interpréter comme étant 2 fois l'aire de la région en rose sur la figure. Avec le cosinus, on obtient la coordonnée en *x* du point rouge et avec le sinus, on obtient la coordonnée en *y* du point rouge.

math.stackexchange.com/questions/2803102/what-are-hyperbolic-trig-functions-functions-of



Les fonctions trigonométriques font exactement la même chose. Elles permettent d'obtenir les coordonnées d'un point sur une hyperbole. Notez que l'équation de cette hyperbole est $x^2 - y^2 = 1$ (alors qu'on avait est $x^2 + y^2 = 1$ pour le cercle). Ici aussi, l'argument de la fonction est égal à 2 fois l'aire de la région en rose. Avec le cosinus hyperbolique, on obtient la coordonnée en *x* du point rouge et avec le sinus hyperbolique, on obtient la coordonnée en *y* du point rouge.

math.stackexchange.com/questions/2803102/what-are-hyperbolic-trig-functions-functions-of

En réalité, cette interprétation graphique n'est pas très utile parce qu'il n'y a pas de moyen facile de connaitre l'aire de la région en rose (contrairement au cercle où l'aire est égal à la moitié de l'angle). Toutefois, elle permet de comprendre d'où vient le nom de ces fonctions.

Utilité des fonctions hyperboliques

Même si l'interprétation graphique ne génère pas vraiment d'application, ces fonctions sont bien utiles. Elles sont utiles tout simplement parce qu'elles sont la solution de l'intégrale d'une fonction relativement simple, comme nous le verrons bientôt.

2. Propriétés des fonctions hyperboliques

Notons cette première propriété.

Lien entre sinh x et cosh x

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

On peut facilement prouver cette propriété à partir des définitions.

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\left(e^x\right)^2 + 2e^x e^{-x} + \left(e^{-x}\right)^2}{4} - \frac{\left(e^x\right)^2 - 2e^x e^{-x} + \left(e^x\right)^2}{4} \\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{2}{4} - \frac{-2}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

On peut aussi la prouver à partir d'une identité trigonométrique.

$$\begin{aligned}
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \left(\cos(ix)\right)^2 - \left(i\sin(ix)\right)^2 \\
&= \cos^2(ix) + \sin^2(ix) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Avec les définitions et cette propriété, on peut souvent simplifier des expressions dans lesquelles on retrouve des fonctions hyperboliques

Exemple

Simplifiez l'expression suivante.

$$\frac{\coth^2 x}{1+\sinh^2 x}$$

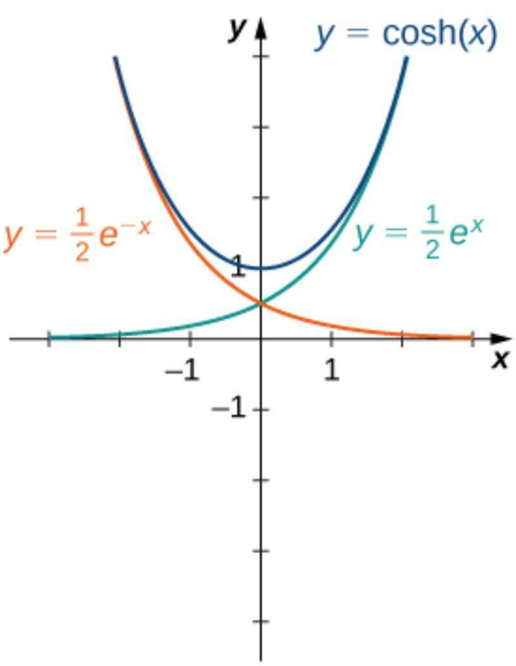
On a

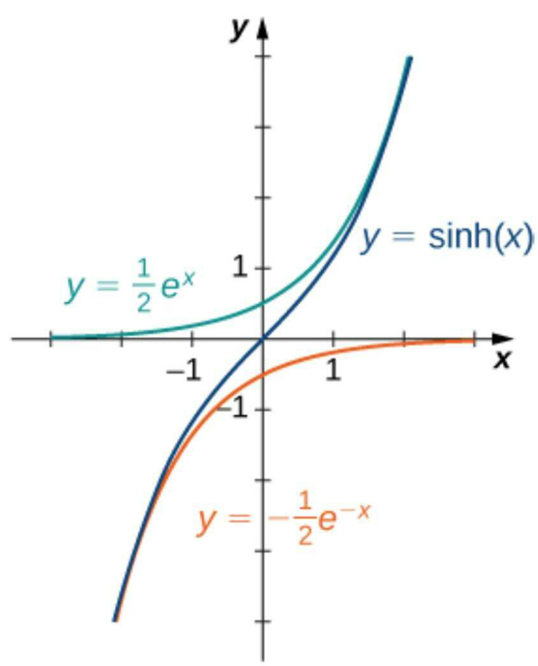
$$\begin{aligned}\frac{\coth^2 x}{1+\sinh^2 x} &= \frac{\coth^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x}\frac{1}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\sinh^2 x} \\ &= \operatorname{csch}^2 x\end{aligned}$$

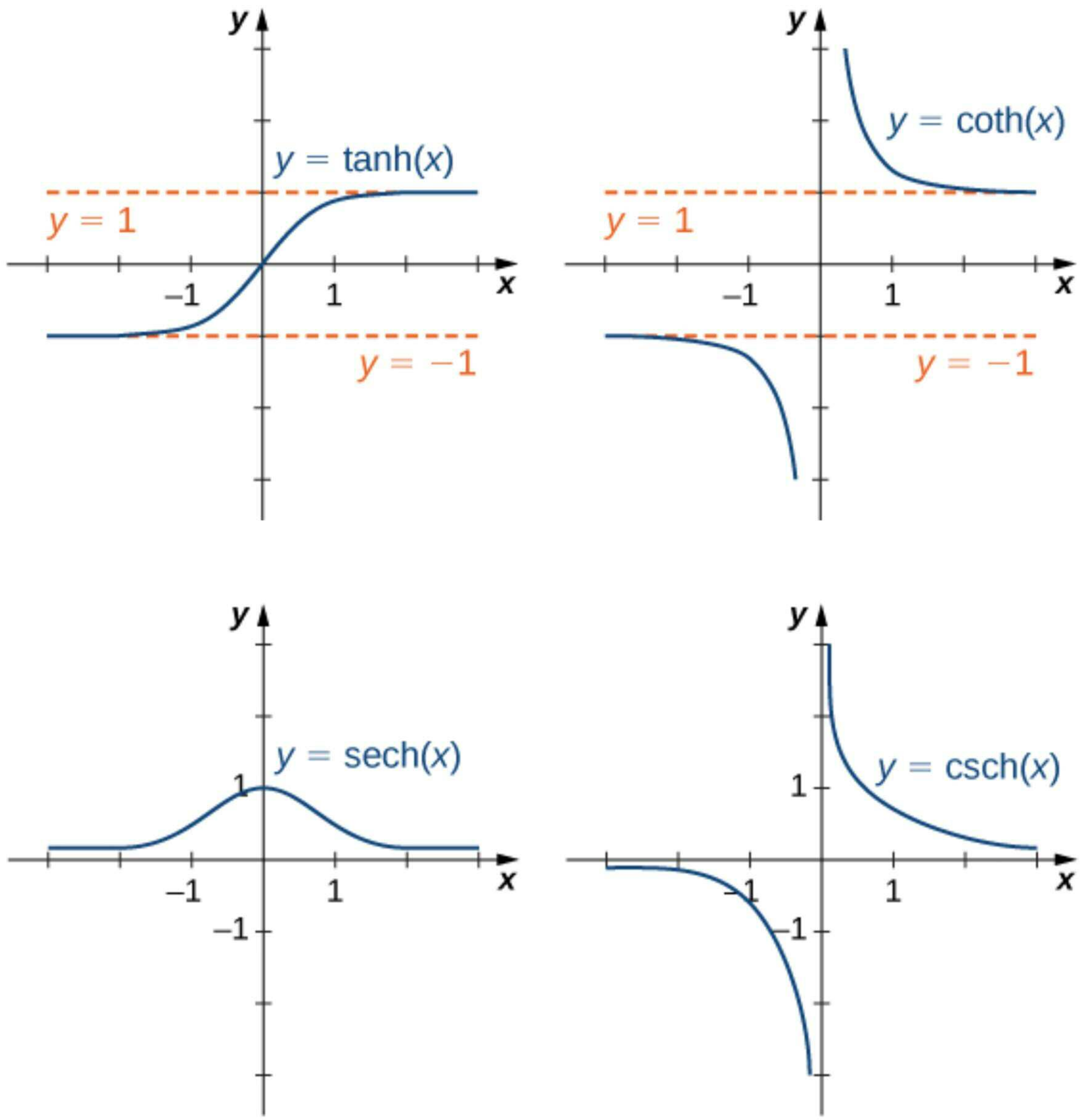
____

3. Graphiques des fonctions hyperboliques

Voici les graphiques des fonctions hyperboliques.







www.quizover.com/calculus/test/graphs-of-hyperbolic-functions-by-openstax

SÉRIE D'EXERCICES 1

Calculez la valeur des fonctions suivantes (avec 4 décimales).

1. $\sinh(1)$
2. $\cosh(2)$
3. $\tanh(3)$
4. $\text{sech}(1)$
5. $\text{csch}(2)$

6. coth (2)

Démontrez les identités suivantes.

7. $\cosh x + \sinh x = e^x$

8. $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

9. $\sinh(-x) = -\sinh(x)$

10. $\cosh(-x) = \cosh(x)$

11. $\tanh^2 x + \text{sech}^2\, x = 1$

12. $\sinh(x+y) = \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y$

13. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

14. $(\cosh x + \sinh x)^{-1} = \cosh x - \sinh x$

15. $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

16. $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$ (indice : utilisez l'identité de l'exercice 7)

4. *Dérivés des fonctions hyperboliques*

La dérivée de la fonction $\cosh x$ est

$$\begin{aligned}\frac{d(\cosh x)}{dx} &= \frac{1}{2}\frac{d\left(e^x + e^{-x}\right)}{dx} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \\ &= \sinh x\end{aligned}$$

La dérivée de la fonction $\sinh x$ est

$$\begin{aligned}\frac{d(\sinh x)}{dx} &= \frac{1}{2}\frac{d\left(e^x - e^{-x}\right)}{dx} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \\ &= \cosh x\end{aligned}$$

On a donc

Dérivés de sinh x et de cosh x

$$\frac{d\left(\cosh x\right)}{dx}=\sinh x \qquad \frac{d\left(\sinh x\right)}{dx}=\cosh x$$

De là, on peut obtenir les dérivée des autres fonctions hyperboliques. Par exemple, voici la dérivée de la fonction $\operatorname{sech} x$.

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\operatorname{sech} x\right)}{dx}&=\frac{d\left(\cosh x\right)^{-1}}{dx}\\&=-\left(\cosh x\right)^{-2}\left(\sinh x\right)\\&=-\frac{1}{\cosh x}\frac{\sinh x}{\cosh x}\\&=-\operatorname{sech} x\tanh x\end{aligned}$$

En procédant ainsi, on peut trouver la dérivée des autres fonctions hyperboliques.

Dérivé de tanh x, de coth x, de sech x et de cosech x

$$\frac{d\left(\tanh x\right)}{dx}=\operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d\left(\coth x\right)}{dx}=-\operatorname{csch}^2 x$$

$$\frac{d\left(\operatorname{sech} x\right)}{dx}=-\operatorname{sech} x\tanh x \qquad \frac{d\left(\operatorname{csch} x\right)}{dx}=-\operatorname{csch} x\coth x$$

Vous remarquez sans doute la similarité de ces formules et de celles des dérivées des fonctions trigonométriques, à part quelques signes qui sont différents.

De là, on peut calculer les dérivées des fonctions un peu plus complexes.

Exemple

Quelle est la dérivée de

$$y=3\sinh\left(5x^2\right)$$

La dérivée est

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 3\left(\cosh\left(5x^2\right)\right)\left(10x\right)\\ &= 30x\cdot\cosh\left(5x^2\right)\end{aligned}$$

____

Ces formules de dérivée permettent d'obtenir quelques intégrales.

Intégrales de quelques fonctions

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C \qquad \int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + C \qquad \int \operatorname{csch}^2 x dx = -\coth x + C$$

$$\int \operatorname{sech} x \tanh x dx = -\operatorname{sech} x + C \qquad \int \operatorname{csch} x \coth x dx = -\operatorname{csch} x + C$$

Exemple

Que vaut cette intégrale ?

$$\int 5\cosh\left(3x+8\right)dx$$

Si on pose que

$$u = 3x+8$$

on a

$$du = 3dx$$

et

$$\begin{aligned}\int 5\cosh(3x+8)\,dx &= \int 5\cosh(u)\frac{du}{3}\\ &= \frac{5}{3}\sinh(u)+C\\ &= \frac{5}{3}\sinh(3x+8)+C\end{aligned}$$

____

Une autre intégrale utile pourrait être celle de $\tanh x$. Voyons ce que vaut cette intégrale.

$$\int \tanh x dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x}dx$$

Si on pose que $u = \cosh x$, on a $du = \sinh x dx$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}\int \frac{\sinh x}{\cosh x}dx &= \int \frac{du}{u}\\ &= \ln|u|+C\end{aligned}$$

On a donc

Intégrales de tanh x

$$\int \tanh x dx = \ln|\cosh x| + C$$

SÉRIE D'EXERCICES 2

Calculez la dérivée des fonctions suivantes.

1. $\sinh 5x$

2. $\cosh\left(x^4\right)$

3. $x^2 \tanh\sqrt{x}$

4. $\coth\frac{2}{x^2}$

5. $\frac{\operatorname{sech}\left(x^2\right)}{x^2+4}$

6. $\operatorname{csch}^2(3x)$

7. $\ln(\cosh(3x))$

8. $\cosh\sqrt{3x^2+2x+2}$

9. $\dfrac{1}{\tanh^2(x)+4}$

10. $\arctan(\sinh(x))$

Trouvez les intégrales suivantes.

11. $\int \sinh(2x+1)dx$

12. $\int \dfrac{\cosh x}{1+\sinh x}dx$

13. $\int x^2\sinh(x^3)dx$

14. $\int \dfrac{\sinh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

15. $\int \dfrac{1}{\sinh^2(3x)}dx$

16. $\int \coth x dx$

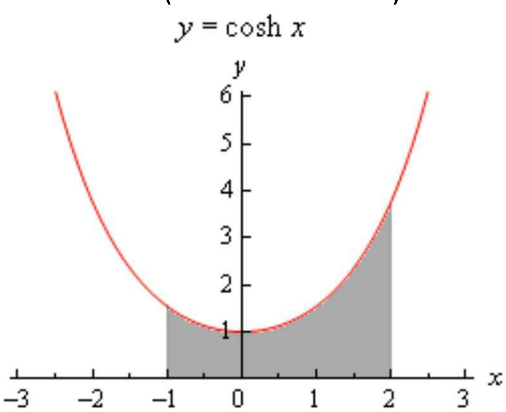
17. $\int \sinh x \cosh x dx$

18. $\int \cosh^3 x dx$

19. $\int \dfrac{\sinh x}{1+\cosh^2 x}dx$

20. $\int \sinh x \operatorname{sech}^2 x dx$

21. Quelle est l'aire de cette surface (avec 4 décimales) ?



tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcI/DiffHyperFcns.aspx

5. Les fonctions hyperboliques inverses

Définition

Il existe aussi les fonctions hyperboliques inverses. Par exemple, si

$$x = \cosh y$$

Alors on définit la fonction inverse de la façon suivante.

$$y = \operatorname{arcosh} x$$

On obtient alors les fonctions inverses suivantes.

$$\begin{aligned}
x &= \cosh y & &\rightarrow & y &= \operatorname{arcosh} x \\
x &= \sinh y & &\rightarrow & y &= \operatorname{arsinh} x \\
x &= \tanh y & &\rightarrow & y &= \operatorname{artanh} x \\
x &= \operatorname{sech} y & &\rightarrow & y &= \operatorname{arsech} x \\
x &= \operatorname{csch} y & &\rightarrow & y &= \operatorname{arcsch} x \\
x &= \coth y & &\rightarrow & y &= \operatorname{arcoth} x
\end{aligned}$$

Notation

Cette notation avec ar- (pour faire $\operatorname{arcosh} x$, $\operatorname{arsinh} x, \ldots$) est la plus commune et celle recommandée par l'organisation internationale de la normalisation.

On voit aussi la notation avec arc- (pour faire $\operatorname{arccosh} x$, $\operatorname{arcsinh} x, \ldots$). Elle est souvent vue et elle est faite par analogie avec la notation utilisée pour les fonctions trigonométriques inverses. Cette notation est erronée puisque le prefixe arc- vient du latin *arcus* alors que le prefixe ar- vient du latin *argumentum*. Malgré cela, c'est la notation utilisée par le logiciel Maple.

D'autres préfèrent utiliser le préfixe arg- (pour faire $\operatorname{argcosh} x$, $\operatorname{argsinh} x, \ldots$) pour *argumentum*.

D'autres préfèrent utiliser le préfixe a- (pour faire $\operatorname{acosh} x$, $\operatorname{asinh} x, \ldots$). C'est une notation utilisée principalement en informatique.

On voit aussi la notation $\cosh^{-1} x$, $\sinh^{-1} x$ Cette notation a toutefois le désavantage d'amener la confusion entre le symbole de la fonction inverse et l'exposant de la fonction (comme dans $\cosh^2 x$).

Lien entre les fonctions $\operatorname{arcosh} x$ et $\operatorname{arsinh} x$ et la fonction logarithme

On peut trouver des formules pour calculer ces fonctions inverses à partir des définitions. Voyons ce que ça donne pour le cosinus hyperbolique.

$$\begin{gathered}
x = \cosh y \\
x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \\
e^y - 2x + e^{-y} = 0 \\
\left(e^y\right)^2 - 2xe^y + 1 = 0
\end{gathered}$$

Cette équation est une équation quadratique de e^y. La solution de cette équation est

$$\begin{gathered}
e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} \\
e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1} \\
y = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)
\end{gathered}$$

Ce n'est pas évident, mais on peut écrire cette formule sous la forme suivante.

$$y = \pm \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

Voici la preuve de cela.
http://physique.merici.ca/calcul/Preuvearcosh.pdf

En procédant de la même façon, on obtient aussi la formule pour calculer le sinus hyperbolique inverse.

Sinus et cosinus hyperboliques inverses

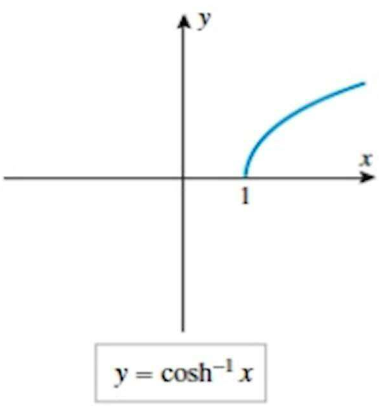
$$\operatorname{arcosh} x = \pm \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad x \geq 1$$

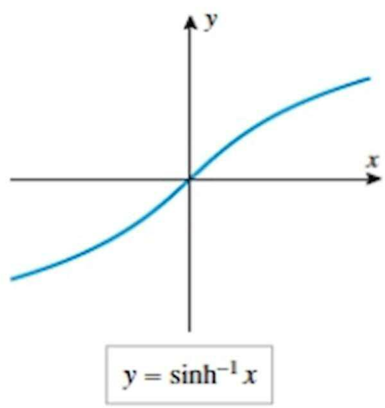
$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

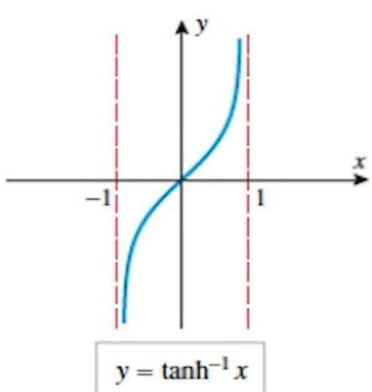
(Il n'y a pas de ± devant la racine pour $\operatorname{arsinh} x$, car on aurait alors le logarithme d'un nombre négatif avec une soustraction. Comme il n'y a pas de solution réelle pour le logarithme d'un nombre négatif, on rejette cette solution. Pour les mêmes raisons, on doit avoir $x \geq 1$ pour $\operatorname{arcosh} x$.)

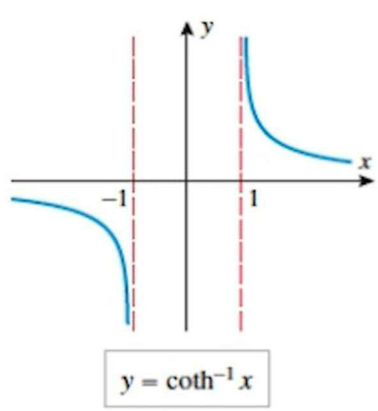
6. *Graphiques des fonctions hyperboliques inverses*

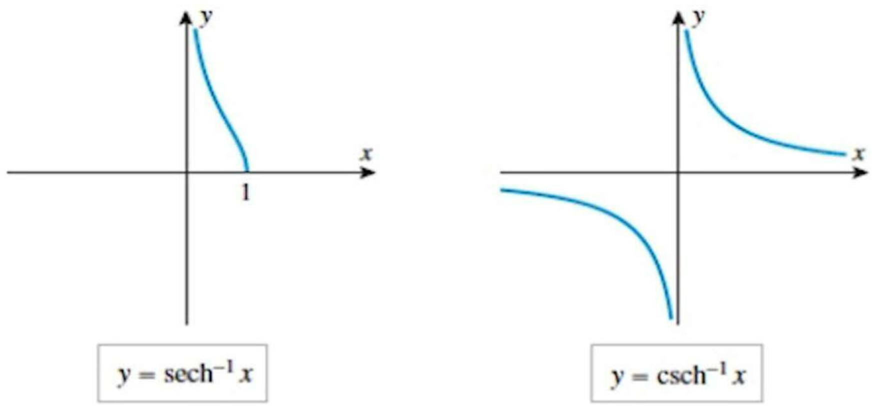
Voici les graphiques des fonctions hyperboliques inverses. (Notez que pour les cosinus et sécante hyperboliques inverses, on ne représente que la partie positive.)











www.slideshare.net/RnoldWilson/lesson-14-derivative-of-inverse-hyperbolic-functions

7. Dérivées des fonctions hyperboliques inverses

On va maintenant trouver les dérivées des fonctions hyperboliques inverses. Pour montrer comment y arriver, on va déterminer la dérivée d'$\text{arsinh}\, x$. On pourrait bien sûr utiliser la formule avec le logarithme, mais on va trouver la dérivée d'une autre façon.

$$y = \text{arsinh}\, x$$
$$x = \sinh y$$
$$\frac{dx}{dy} = \cosh y$$
$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1+\sinh^2 y}$$
$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1+x^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

On peut ainsi trouver la dérivée des fonctions hyperboliques inverses et obtenir les résultats suivants.

Dérivées des fonctions hyperboliques inverses

$$\frac{d\left(\operatorname{arcosh} x\right)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad x > 1$$

$$\frac{d\left(\operatorname{arsinh} x\right)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d\left(\operatorname{artanh} x\right)}{dx} = \frac{1}{1-x^2} \qquad |x| < 1$$

$$\frac{d\left(\operatorname{arcoth} x\right)}{dx} = \frac{1}{1-x^2} \qquad |x| > 1$$

$$\frac{d\left(\operatorname{arsech} x\right)}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad 0 < x < 1$$

$$\frac{d\left(\operatorname{arcsch} x\right)}{dx} = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}} \qquad x \neq 0$$

De là, on peut trouver quelques intégrales très intéressantes. À partir de

$$\frac{d\left(\operatorname{arcosh} u\right)}{du} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}$$

On trouve que

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} du = \operatorname{arcosh} u$$

En posant que $u = x/a$, on a

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}} d\left(\tfrac{x}{a}\right) = \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}} \frac{1}{a} dx = \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2-1\right)\cdot a^2}} dx = \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

En procédant ainsi pour les autres dérivées, on arrive aux formules d'intégrations suivantes.

Quelques intégrales donnant des fonctions hyperboliques inverses

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right)+C \quad \text{ou} \quad \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C \qquad x>a$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right)+C \quad \text{ou} \quad \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{artanh}\left(\frac{x}{a}\right)+C \qquad x^2<a^2$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arcoth}\left(\frac{x}{a}\right)+C \qquad x^2>a^2$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{1}{a}\operatorname{arsech}\left(\frac{x}{a}\right)+C \qquad 0<x<a$$

Attention, aux deux premières lignes. On pourrait croire, avec la première ligne par exemple, que

$$\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

Pourtant, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right) &= \ln\left(\left(\frac{x}{a}\right)+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1^2}\right)\\ &= \ln\left[\left(\frac{1}{a}\right)\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]\\ &= \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+\ln\left(\frac{1}{a}\right)\end{aligned}$$

On voit qu'il n'y a pas égalité puisqu'il y a un terme de plus. Toutefois, ce terme est une constante et il peut donc être absorbé dans la constante d'intégration quand il s'agit de la réponse d'une intégrale.

Exemple

Quelle est la dérivée de cette fonction.

$$y = x \operatorname{arcosh}\left(3x^2+1\right)$$

La dérivée est

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 1\cdot \operatorname{arcosh}\left(3x^2+1\right) + x\frac{1}{\sqrt{\left(3x^2+1\right)^2+1}}(6x)\\ &= \operatorname{arcosh}\left(3x^2+1\right) + \frac{6x^2}{\sqrt{\left(3x^2+1\right)^2+1}}\end{aligned}$$

Exemple

Quelle est la solution de cette intégrale ?

$$\int \frac{3dx}{\sqrt{9x^2+12x-12}}$$

On peut écrire cette intégrale sous la forme

$$\int \frac{3dx}{\sqrt{(3x+2)^2-16}}$$

On pose ensuite que

$$u = 3x+2$$

Qui implique que

$$du = 3dx$$

L'intégrale devient alors

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 16}}$$

On obtient alors

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 16}} = \operatorname{arcosh}\left(\frac{u}{4}\right) + C$$

On a donc que

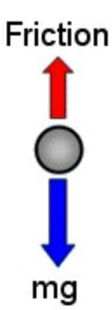
$$\int \frac{3dx}{\sqrt{9x^2 + 12x - 12}} = \operatorname{arcosh}\left(\frac{3x+2}{4}\right) + C$$

C'est avec ces intégrales que les fonctions hyperboliques prennent toute leur importance. Presque toujours, on obtient des fonctions hyperboliques parce qu'on a fait l'intégrale d'une des fonctions relativement simples de ces intégrales.

Voici un exemple. On laisse tomber un objet de 5 kg à partir du repos. Pendant sa chute, l'objet est soumis à une force de gravitation et une force de friction de l'air proportionnelle au carré de la vitesse. Supposons que cette force est

$$F = 0,49 \tfrac{Ns^2}{m^2} v^2$$

On veut connaitre la vitesse de cet objet 2 secondes après son départ.



On a deux forces qui agissent sur l'objet. On a donc

$$\begin{gathered} mg - F_{frection} = ma \\ 49N - 0,49 \tfrac{Ns^2}{m^2} = 5kg \cdot a \\ 9,8 \tfrac{m}{s^2} - 0,098 \tfrac{1}{m} v^2 = a \end{gathered}$$

Puisque l'accélération est le rythme de changement de vitesse, on obtient

$$9{,}8\tfrac{m}{s^2} - 0{,}098\tfrac{1}{m}v^2 = \frac{dv}{dt}$$
$$dt = \frac{dv}{9{,}8\tfrac{m}{s^2} - 0{,}098\tfrac{1}{m}v^2}$$

On intègre alors de chaque côté pour obtenir

$$\int dt = \int \frac{dv}{9{,}8\tfrac{m}{s^2} - 0{,}098\tfrac{1}{m}v^2}$$
$$\int dt = \frac{500m}{49}\int \frac{dv}{100\tfrac{m^2}{s^2} - v^2}$$

Oh surprise, c'est là qu'une tangente hyperbolique inverse apparait

$$t = \frac{500m}{49}\cdot\frac{1}{10\tfrac{m}{s}}\operatorname{artanh}\left(\frac{v}{10\tfrac{m}{s}}\right) + C$$
$$t = \frac{50s}{49}\operatorname{artanh}\left(\frac{v}{10\tfrac{m}{s}}\right) + C$$

Puisque la vitesse est nulle à t = 0, la constante doit être nulle. La vitesse en fonction du temps est donc

$$\frac{49t}{50s} = \operatorname{artanh}\left(\frac{v}{10\tfrac{m}{s}}\right)$$
$$v = 10\tfrac{m}{s}\tanh\left(\frac{49t}{50s}\right)$$

À t =2 s, la vitesse est donc

$$v = 10\tfrac{m}{s}\tanh\left(\frac{49\cdot 2s}{50s}\right)$$
$$= 9{,}61\tfrac{m}{s}$$

SÉRIE D'EXERCICES 3

Calculez la valeur des fonctions suivantes (avec 4 décimales).

1. $\operatorname{arsinh}(1)$
2. $\operatorname{arcosh}(2)$
3. $\operatorname{artanh}(½)$
4. Démontrez que $\operatorname{arsech}(x) = \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{x}\right)$
5. Démontrez que $\operatorname{arcsch}(x) = \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{x}\right)$
6. Démontrez que $\operatorname{arcoth}(x) = \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{x}\right)$
7. $\operatorname{arsech}(¾)$
8. $\operatorname{arcsch}(3)$
9. $\operatorname{arcoth}(2)$

10. Démontrez que pour -1 < x < 1

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Expliquez pourquoi il y a une restriction pour x.

11. Démontrez que

$$\arcsin(ix) = i \operatorname{arsinh} x$$

12. Démontrez que -1 < x < 1

$$\frac{d(\operatorname{artanh} x)}{du} = \frac{1}{1-x^2}$$

Calculez la dérivée des fonctions suivantes.

13. $\operatorname{arsinh} 5x$

14. $\operatorname{arcosh}\left(x^4\right)$

15. $x^2 \operatorname{artanh}\sqrt{x}$

16. $\operatorname{arcoth}\frac{2}{x^2}$

17. $\frac{\operatorname{arsech}\left(x^2\right)}{x^2+4}$

18. Déterminez la valeur minimale de la fonction $f\left(x\right)=8\cosh x-\sinh x$.

Calculez les intégrales suivantes.

19. $\int \frac{1}{\sqrt{49+4x^2}}dx$

20. $\int_0^1 \frac{1}{81-4x^2}dx$

21. $\int_5^6 \frac{1}{81-4x^2}dx$

22. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-25}}dx$

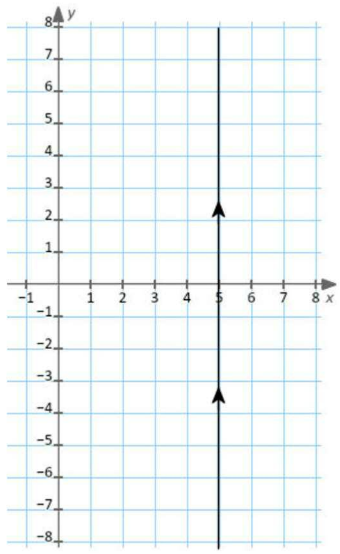
23. $\int \frac{1}{x\sqrt{4-x^4}}dx$

24. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx$

25. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9x^2+12x+5}}dx$

26. Montrez que

$$\int \sec x dx = \operatorname{artanh}\left(\sin x\right)+C$$
$$\int \csc x dx = -\operatorname{artanh}\left(\cos x\right)+C$$



27. Un objet se déplace en suivant la droite $x = 5\ \mathrm{m}$ (comme sur la figure). La vitesse est toujours proportionnelle à la distance entre l'origine et l'objet. Sachant que l'objet est initialement à la position $(5\ \mathrm{m},\ 0)$ et qu'il a à ce moment une vitesse de $2\ \mathrm{m/s}$, trouver où sera l'objet à $t = 5\ \mathrm{s}$.

8. Période des fonctions hyperboliques

Terminons en mentionnant simplement que les fonctions hyperboliques sont périodique, mais que la période est 2πi, un nombre complexe. En voici la preuve.

$$\begin{aligned}\cosh(x+2\pi i) &= \frac{e^{x+2\pi i}+e^{-x-2\pi i}}{2}\\ &= \frac{e^{x}e^{2\pi i}+e^{-x}e^{-2\pi i}}{2}\end{aligned}$$

Puisque $e^{2\pi i} = e^{-2\pi i} = 1$, on arrive à

$$\begin{aligned}\cosh(x+2\pi i) &= \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\\ &= \cosh(x)\end{aligned}$$

De la même façon, on peut montrer que la fonction $\sinh x$ a aussi une période de 2πi

$$\sinh(x+2\pi i) = \sinh(x)$$

et que la fonction $\tanh x$ a une période de πi

$$\tanh(x+\pi i) = \tanh(x)$$

Solutions des exercices

Série d'exercices 1

1. 1,1752
2. 3,7622
3. 0,9951
4. 0,6481
5. 0,2757
6. 1,0373

Série d'exercices 2

1. $5\cosh 5x$

2. $4x^3 \sinh\left(x^4\right)$

3. $2x\tanh\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^{3/2}\operatorname{sech}^2\sqrt{x}$

4. $\dfrac{4}{x^3}\operatorname{csch}^2\dfrac{2}{x^2}$

5. $-\dfrac{2x\operatorname{sech}\left(x^2\right)}{x^2+4}\left(\tanh\left(x^2\right)+\dfrac{1}{x^2+4}\right)$

6. $-6\operatorname{csch}^2\left(3x\right)\coth(3x)$

7. $3\tanh\left(3x\right)$

8. $\dfrac{\left(3x+1\right)\sinh\sqrt{3x^2+2x+2}}{\sqrt{3x^2+2x+2}}$

9. $\dfrac{-2\tanh x\operatorname{sech}^2 x}{\left(\tanh^2 x+4\right)^2}$

10. $\operatorname{sech}\left(x\right)$

11. $\dfrac{1}{2}\cosh\left(2x+1\right)+C$

12. $\ln\left(1+\sinh x\right)+C$

13. $\dfrac{1}{3}\cosh\left(x^3\right)+C$

14. $2\cosh\sqrt{x}+C$

15. $-\frac{1}{3}\coth(3x)+C$

16. $\ln(\sinh(x))+C$

17. $\frac{1}{2}\cosh^2 x+C$ ou $\frac{1}{2}\sinh^2 x+C$

18. $\frac{1}{3}\sinh(x)\cdot(3+\sinh^2 x)+C$

19. $\arctan(\cosh(x))+C$

20. $-\operatorname{sech}(x)+C$

21. 4,8021

<u>Série d'exercices 3</u>

1. 0,8814

2. 1,3170

3. 0,5493

7. 0,7954

8. 0,3275

9. 0,5493

13. $\frac{5}{\sqrt{25x^2+1}}$

14. $\frac{4x^3}{\sqrt{x^8-1}}$

15. $2x\operatorname{artanh}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{3/2}}{1-x}$

16. $\frac{-4x}{x^4-4}$

17. $\frac{-2x}{x^2+4}\left(\frac{\operatorname{arsech}(x^2)}{x^2+4}+\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^4}}\right)$

18. 7,9373

19. $\frac{1}{2}\operatorname{arsinh}\left(\frac{2x}{7}\right)+C$

20. 0,012555 (Qui est $\frac{1}{18}\operatorname{artanh}\left(\frac{2}{9}\right)$)

21. -0,027737 (Qui est $\frac{1}{18}\left(\text{artanh}\left(\frac{9}{12}\right)-\text{artanh}\left(\frac{9}{10}\right)\right)$)

22. $\text{arcosh}\left(\frac{e^x}{5}\right)+C$

23. $-\frac{1}{4}\text{arsech}\left(\frac{x^2}{2}\right)+C$

24. $\text{arsinh}\left(\frac{x+1}{3}\right)+C$

25. 0,2896 (Qui est $\frac{1}{3}\left(\text{arsinh}(5)-\text{arsinh}(2)\right)$

27. (5 m, 18,1343 m)