

Calcul avancé
Examen 3
Les intégrales multiples
25 % de la note finale

Hiver 2020

Nom : _____

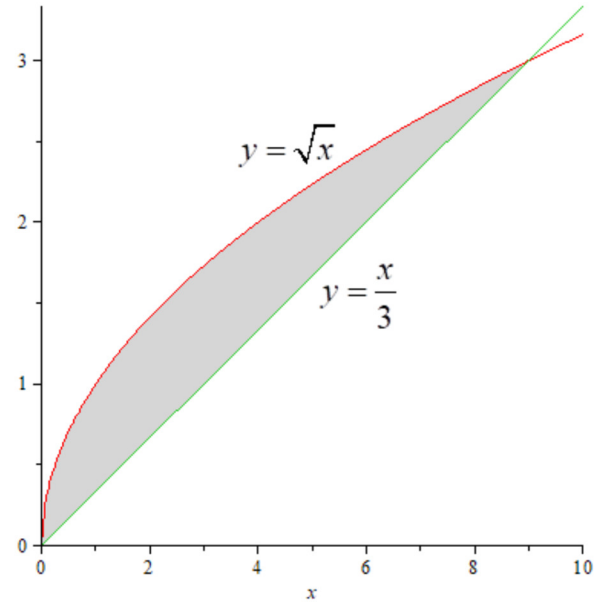
1. (15 points)

La valeur moyenne d'une fonction de deux variables $f(x,y)$ sur une région d'intégration est donnée par

$$\overline{f(x,y)} = \frac{1}{A} \iint f(x,y) dA$$

où A est l'aire de la région d'intégration.

Quelle est la valeur moyenne de la fonction $2xy$ dans la région d'intégration montrée sur la figure ?



2. (10 points)

Réécrivez correctement cette intégrale pour inverser l'ordre d'intégration. Écrivez seulement l'intégrale, ne calculez pas sa valeur.

$$\int_1^3 \int_1^{\sqrt{x}} x e^{-y^2} dy dx$$

Réécrivez correctement cette intégrale en coordonnées polaires. Écrivez seulement l'intégrale, ne calculez pas sa valeur.

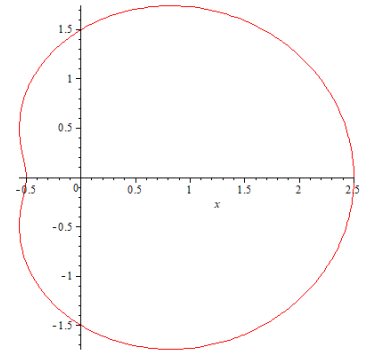
$$\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2} dy dx$$

3. (15 points)

Cette courbe est décrite par l'équation polaire suivante

$$\rho = \frac{3}{2} + \cos \theta$$

- Quelle est l'aire de la région délimitée par cette courbe ?
- Quelle est la longueur de cette courbe (sans les bornes, l'intégrale donne une fonction que vous ne connaissez pas, mais vous pouvez quand même avoir une réponse avec un ordinateur si vous mettez les bornes) ?

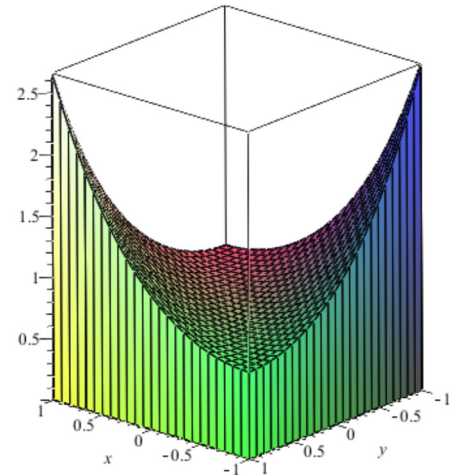


4. (15 points)

Voici un objet ayant une densité constante de 3 g/cm^3 .
Le dessus de ce volume est délimité par la fonction

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh(x + y)$$

- Quelle est la masse de cet objet ?
- Quelle est l'aire du dessus de cet objet ?
- Quelle est la position en z du centre de masse de cet objet ?

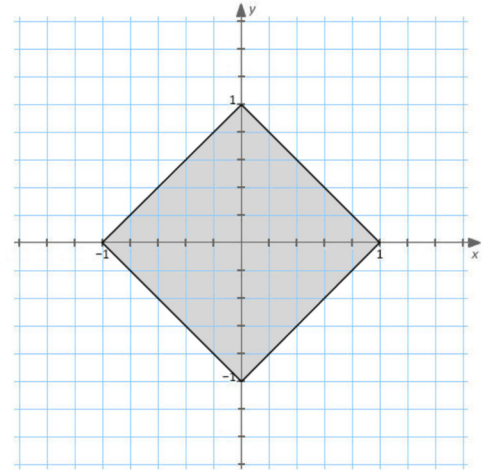


5. (15 points)

Calculez

$$\iint (x-y)^{10} (x+y)^{20} dA$$

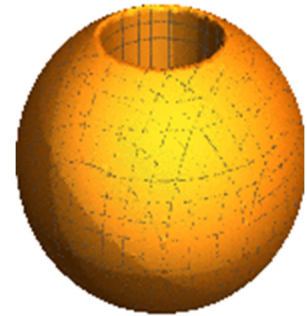
dans la région d'intégration montrée sur la figure en posant $u = x - y$ et $v = x + y$.



6. (15 points)

Cette sphère ayant un rayon de 6 cm est percée d'un trou ayant un rayon de 2 cm. (On obtient alors un anneau sphérique.)

- a) Quel est le volume de cet anneau sphérique ?
- b) Quelle est l'aire de cet anneau sphérique ?



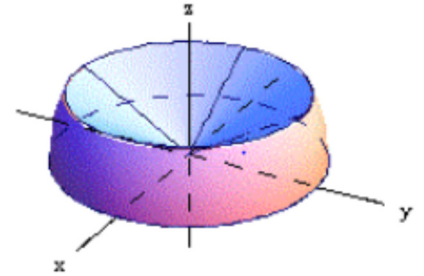
7. (15 points)

Cet objet est un dessus de sphère dans laquelle on a enlevé une partie conique. La sphère a un rayon de 5 cm et le cône fait un angle de 60° avec l'axe des z .

c) Quel est le volume de cet objet ?

d) Calculez le moment d'inertie I_z de cet objet si sa densité est donnée par

$$\tilde{\rho} = 2 \frac{g}{cm^3} (x^2 + y^2)$$



Réponses

1. 13,5

$$2a) \int_1^{\sqrt{3}} \int_{y^2}^3 x e^{-y^2} dx dy \quad 2b) \int_0^{\pi} \int_0^2 e^{\rho^2} \rho d\rho d\theta$$

3a) $11\pi/4$ 3b) 10,505

4a) 11,719 g 4b) 5,52 4c) 0,5489

5. $2/231$

6a) $\frac{512\pi}{3}\sqrt{2} \approx 758,25$ b) $128\pi\sqrt{2} \approx 568,69$ (ne pas oublier l'aire du trou qui est $32\pi\sqrt{2}$)

7a) $\frac{125\pi}{3} = 130,90$ 7b) $\frac{453125}{24} \pi gcm^2 = 0,005931kgm^2$