

Calcul avancé
Examen 2
Les dérivées partielles
25 % de la note finale

Hiver 2018

Nom : _____

1. (3 points)

- a) La loi des gaz parfait est $PV = nRT$ où P est la pression, V le volume, n le nombre de moles, R la constante des gaz parfaits et T la température. Démontrer que

$$\frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

- b) On dit qu'une fonction est harmonique si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Démontrez que $f = \sin x \cosh y$ est harmonique.

2. (3 points)

Trouvez

- a) $\frac{dy}{dx}$ pour la fonction $\sin(x+y) + \cos(x-y) = y$
- b) $\frac{\partial z}{\partial x}$ pour la fonction $x^3 + 2xz - yz^2 - z^3 = 1$
- c) $\frac{dz}{d\theta}$ si $\theta = \pi/4$ pour la fonction $z = x^2 + 2xy$ si $x = \cos \theta$ et $y = \sin \theta$

3. (3 points)

Une plaque est chauffée de telle façon que la température en un point (x, y) sur la plaque est donnée par

$$T = xy \sin(xz)$$

- a) Trouvez à quel rythme varie la température (la dérivée directionnelle) au point $(1, 0, \pi/2)$ dans la direction $-2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$.
- b) Toujours au point $(1, 0, \pi/2)$, trouvez la direction pour laquelle la température varie le plus rapidement et donner le rythme de la variation.
- c) Dans quelle direction la température ne varie pas (la dérivée directionnelle est alors nulle) ?

4. (2 points)

Trouvez l'équation du plan tangent à la surface décrite par la fonction

$$z = 10e^{-x^2+y^2}$$

au point $(1, 1, 10)$.

5. (2 Points)

Trouvez les extremums relatifs de la surface décrite par la fonction

$$z = x^3 + y^3 + 3x^2 - 18y^2 + 81y + 5$$

6. (2 Points)

Si $z = u + f(u^2v^2)$, alors démontrer que $u \frac{\partial z}{\partial u} - v \frac{\partial z}{\partial v} = u$.

Indice : Poser $w = u^2v^2$ et appliquer la dérivation en chaîne.

Réponses

$$2a) \frac{dy}{dx} = \frac{-\cos(x+y) + \sin(x-y)}{\cos(x+y) + \sin(x-y) - 1}$$

$$2b) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 + 2z}{2x - 2yz - 3z^2}$$

2c) -1

$$3a) \frac{3}{\sqrt{38}}$$

3b) 1 dans la direction de l'axe des y

3c) Dans la direction sur le plan xz .

$$4) z = -20x + 20y + 10$$

5) (0,3) : point de selle, (0,9) : Minimum, (-2,3) : Maximum, (-2,9) : point de selle