Calcul avancé
Examen 2
Les dérivées partielles
25 % de la note finale

Hiver 2016 Nom :________________________

---

1. (3 points)

Trouvez les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ <u>et</u> la différentielle totale des fonctions suivantes.

a) $z = e^x \cos\left(\frac{x}{y}\right)$

b) $z = \arctan(xy)$

c) $z = x + \frac{y}{wu}$

2. (3 points)

Trouvez

a) $\frac{dy}{dx}$ pour la fonction $e^x \cosh(y) - \ln(x) \cdot \sin(xy) = 0$

b) $\frac{\partial z}{\partial x}$ pour la fonction $2x^3 + 4x^2 z + 2y^3 z^4 = 6xy^2$

c) $\frac{dz}{dt}$ quand $t = 1$ pour la fonction $z = xy(x+y)$ si $x = 3t^2 - 5t + 2$ et $y = 2t + 1$

3. (3 points)

Soit la fonction suivante

$$z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$$

a) Trouvez la dérivée directionnelle dans la direction donnée par le vecteur $\vec{i} - \vec{j}$ au point (4,0).
b) Toujours au point (4,0), trouvez la grandeur et la direction de la dérivée directionnelle maximale.
c) Dans quelle direction la dérivée directionnelle sera-t-elle nulle ?

4. (2 points)

Trouvez l'équation du plan tangent à la surface décrite par la fonction

$$z = x^2 - y^2$$

au point (3,2,5).

5. (2 Points)

Trouvez les extremums relatifs de la surface décrite par la fonction

$$z = e^{-x^2+1} + x^2 + y^2$$

6. (2 Points)

La formule donnant le potentiel électrique V dans le vide doit toujours satisfaire l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

Ainsi,

$$V=\frac{4}{\pi}e^{-\pi y}\sin \pi x$$

pourrait-elle être une formule valable pour le potentiel électrique ?

Réponses

1a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^x \cos\left(\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{e^x}{y}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$ $\qquad$ $\dfrac{\partial z}{\partial z} = \dfrac{xe^x}{y^2}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$

$$dz = \left(e^x \cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{e^x}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right)dx + \frac{xe^x}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right)dy$$

1b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{1+x^2y^2}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{1+x^2y^2}$

$$dz = \frac{y}{1+x^2y^2}\,dx + \frac{x}{1+x^2y^2}\,dy$$

1c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$ $\qquad$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{wu}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial z}{\partial w} = \dfrac{-y}{w^2u}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{-y}{wu^2}$

$$dz = dx + \frac{1}{wu}dy - \frac{y}{w^2u}dw - \frac{y}{wu^2}du$$

2a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{xe^x\cosh(y) - \sin(xy) - xy\ln(x)\cdot\cos(xy)}{xe^x\sinh(y) - x^2\ln(x)\cdot\cos(xy)}$

2b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{6x^2+8xz-6y^2}{4x^2+8y^3z^3}$

2c) 9

3a) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

3b) ½ dans la direction de l'axe des *x*

3c) Dans la direction de l'axe des *y* (négatif ou positif)

4) $z = 6x - 4y - 5$

5) (0,0) : point de selle $\qquad$ (1,0) : Minimum $\qquad$ (-1,0) : Minimum

6) Oui