Solutionnaire du chapitre 5

1. a) La 2e équation

$$F_L - mg = 0$$

nous amène à

$$\begin{aligned} F_L &= mg \\ &= 260\,000kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg} \\ &= 2\,548\,000N \end{aligned}$$

b) On sait que

$$F_L = 2\,548\,000N$$

Avec la formule de la portance, on arrive à

$$\frac{1}{2}C_L A\rho v^2 = 2\,548\,000N$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cdot C_L \cdot 442m^2 \cdot 0{,}310\tfrac{kg}{m^3}\cdot\left(247\tfrac{m}{s}\right)^2 &= 2\,548\,000N \\ 4\,179\,726N \cdot C_L &= 2\,548\,000N \\ C_L &= 0{,}610 \end{aligned}$$

c) La trainée est

$$F_d = \frac{1}{2}C_d A\rho v^2$$

Pour trouver cette force, il nous faut le coefficient de trainée.

Le coefficient de trainée est la somme des coefficients de trainée parasite et de trainée induite.

$$\begin{aligned}C_d &= C_{d0} + \frac{C_L^2 A}{e\pi S^2}\\ &= 0,031 + \frac{(0,610)^2 \cdot 442m^2}{0,725 \cdot \pi \cdot (64,75m)^2}\\ &= 0,031 + 0,017\\ &= 0,048\end{aligned}$$

La trainée est donc

$$\begin{aligned}F_d &= \frac{1}{2} C_d A \rho v^2\\ &= \frac{1}{2} \cdot 0,048 \cdot 442m^2 \cdot 0,310\tfrac{kg}{m^3} \cdot \left(247\tfrac{m}{s}\right)^2\\ &= 200\,627N\end{aligned}$$

d) L'équation des forces en x est

$$F_t - F_d = ma$$

Comme la vitesse de l'avion est constante, il n'y a pas d'accélération. On a donc

$$F_t - F_d = 0$$

La poussée est donc

$$\begin{aligned}F_t &= F_d\\ &= 200\,627N\end{aligned}$$

e) La poussée d'un turboréacteur est donnée par

$$F_t = \frac{1}{2}\left(v_{\exp}^2 - v^2\right)\rho A_h$$

Pour trouver la vitesse d'expulsion, il nous faut A_h, l'aire du cercle décrit par la soufflante quand elle tourne. Puisque le rayon est de 1,5 m, l'aire est

$$\begin{aligned}A_h &= \pi R^2\\ &= \pi \cdot (1,5m)^2\\ &= 7,07m^2\end{aligned}$$

Comme la force faite par chaque moteur doit être de 100 314 N (la moitié de la force totale puisqu'il y a 2 moteurs), on a

$$F_t = \frac{1}{2}\left(v_{\exp}^2 - v^2\right)\rho A_h$$
$$100\,314N = \frac{1}{2}\cdot\left(v_{\exp}^2 - \left(247\tfrac{m}{s}\right)^2\right)\cdot 0,310\tfrac{kg}{m^3}\cdot 7,07m^2$$
$$100\,314N = 1,09585\tfrac{kg}{m}\cdot\left(v_{\exp}^2 - \left(247\tfrac{m}{s}\right)^2\right)$$
$$91\,540\tfrac{m^2}{s^2} = v_{\exp}^2 - \left(247\tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$91\,540\tfrac{m^2}{s^2} + \left(247\tfrac{m}{s}\right)^2 = v_{\exp}^2$$
$$152\,548\tfrac{m^2}{s^2} = v_{\exp}^2$$
$$v_{\exp} = 391\tfrac{m}{s}$$

En passant dans le moteur, la vitesse de l'air passe donc de 247 m/s à 391 m/s.

f) Comme la poussée d'un moteur est aussi

$$F_t = \left(v_{\exp} - v\right)R$$

On a

$$100\,314N = \left(391\tfrac{m}{s} - 247\tfrac{m}{s}\right)\cdot R$$
$$R = 696,6\tfrac{kg}{s}$$

2. Comme la vitesse diminue, il y a une accélération en x. La poussée des moteurs doit donc être plus petite que la trainée.

Dans ce cas, la 2^e loi de Newton en x nous donne

$$F_t - F_d = ma$$

Pour trouver la force de poussée de moteur, il nous faut l'accélération et la trainée.

Pour l'accélération, on sait que la vitesse passe de 480 à 430 nœuds en 5 minutes. L'accélération est donc

$$v = v_0 + at$$
$$221,3\tfrac{m}{s} = 247,0\tfrac{m}{s} + a\cdot 300s$$
$$-25,7\tfrac{m}{s} = a\cdot 300s$$
$$a = -0,08567\tfrac{m}{s^2}$$

Pour la trainée, il nous faut le coefficient de trainée. Le coefficient de trainée est la somme des coefficients de trainée parasite et de trainée induite.

$$C_d = C_{d0} + \frac{C_L^2 A}{e\pi S^2}$$

Toutefois, il nous manque le coefficient de portance. Pour le trouver, on doit examiner l'équation des forces en *y*.

$$\begin{gathered} F_L - mg = 0 \\ F_L = mg \\ \frac{1}{2} C_L A \rho v^2 = mg \end{gathered}$$

Avec une vitesse de 350 nœuds, on arrive à

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} \cdot C_L \cdot 442m^2 \cdot 0,310 \tfrac{kg}{m^3} \cdot \left(231,6 \tfrac{m}{s}\right)^2 = 2\,548\,000N \\ 3\,674\,778N \cdot C_L = 2\,548\,000N \\ C_L = 0,693 \end{gathered}$$

Le coefficient de trainée est donc

$$\begin{aligned} C_d &= C_{d0} + \frac{C_L^2 A}{e\pi S^2} \\ &= 0,031 + \frac{(0,693)^2 \cdot 442m^2}{0,725 \cdot \pi \cdot (64,75m)^2} \\ &= 0,031 + 0,022 \\ &= 0,053 \end{aligned}$$

La trainée est donc

$$\begin{aligned} F_d &= \frac{1}{2} C_d A \rho v^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0,053 \cdot 442m^2 \cdot 0,310 \tfrac{kg}{m^3} \cdot \left(231,6 \tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= 194\,763N \end{aligned}$$

On peut maintenant trouver la poussée avec la 2^e loi de Newton.

$$\begin{aligned}F_t &= F_d + ma\\ &= 194\,763N + 260\,000kg \cdot \left(-0,08567\tfrac{m}{s^2}\right)\\ &= 194\,763N - 22\,274N\\ &= 172\,489N\end{aligned}$$

3. Avec nos données, la vitesse minimale est

$$\begin{aligned}v_{\min} &= \sqrt{\frac{2mg}{C_{L\max}A\rho}}\\ &= \sqrt{\frac{2\cdot 260\,000N \cdot 9,8\frac{N}{kg}}{1,5\cdot 442m^2\cdot 0,910\frac{kg}{m^3}}}\\ &= 91,9\tfrac{m}{s}\\ &= 179kts\end{aligned}$$

4. a) La trainée minimale est

$$\begin{aligned}F_{d\min} &= \frac{2mg}{S}\sqrt{\frac{C_{d0}A}{e\pi}}\\ &= \frac{2\cdot 260\,000kg \cdot 9,8\frac{N}{kg}}{64,75m}\cdot\sqrt{\frac{0,031\cdot 442m^2}{0,725\cdot\pi}}\\ &= 193\,036N\end{aligned}$$

Cette trainée minimale est 13,2 fois plus petite que le poids de l'avion.

b) La vitesse de trainée minimale est

$$\begin{aligned}v_{d\min} &= \sqrt[4]{\frac{4m^2g^2}{C_{d0}A\rho^2 e\pi S^2}}\\ &= \sqrt[4]{\frac{4\cdot(260\,000kg)^2\cdot\left(9,8\frac{N}{kg}\right)^2}{0,031\cdot 442m^2\cdot\left(0,310\frac{kg}{m^3}\right)^2\cdot 0,725\cdot\pi\cdot(64,75m)^2}}\\ &= \sqrt[4]{2\,065\,304\,366\tfrac{m^4}{s^4}}\\ &= 213,2\tfrac{m}{s}\\ &= 414,2kts\end{aligned}$$

5. Les limites de la vitesse se trouvent quand la trainée est égale à la poussée maximale des moteurs. Donc quand

$$205\,000N = \frac{1}{2}C_{d0}A\rho v^2 + \frac{2m^2g^2}{\rho e\pi S^2 v^2}$$

Avec les valeurs, on a

$$205\,000N = \frac{1}{2}\cdot 0,031\cdot 442m^2\cdot 0,310\tfrac{kg}{m^3}\cdot v^2 + \frac{2\cdot(260\,000kg)^2\cdot\left(9,8\tfrac{N}{kg}\right)^2}{0,310\tfrac{kg}{m^3}\cdot 0,725\cdot\pi\cdot(64,75m)^2\cdot v^2}$$

$$205\,000N = 2,12381\tfrac{kg}{m}\cdot v^2 + \frac{4\,386\,314\,065\tfrac{N^2m}{kg}}{v^2}$$

En multipliant par v^2 et en réarrangeant les termes, on arrive à

$$2,12381\cdot v^4 - 205\,000\cdot v^2 + 4\,386\,314\,065 = 0$$

Pour résoudre, on va poser $u = v^2$. On a alors

$$2,12381\cdot u^2 - 205\,000\cdot u + 4\,386\,314\,065 = 0$$

C'est une équation quadratique dont la solution est

$$u = \frac{205\,000 \pm \sqrt{(205\,000)^2 - 4\cdot 2,12381\cdot 4\,386\,314\,065}}{2\cdot 2,12381} = \begin{cases} \nearrow 64\,509 \\ \searrow 32\,016 \end{cases}$$

Puisque $u = v^2$, les vitesses sont

$$v_{\max} = \sqrt{59\,402} = 254,0\tfrac{m}{s} = 493kts$$
$$v_{\min} = \sqrt{32\,015} = 178,9\tfrac{m}{s} = 348kts$$

La vitesse de décrochage à cette altitude est de

$$\begin{aligned} v_{\min} &= \sqrt{\frac{2mg}{C_{L\max} A\rho}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 260\,000 N \cdot 9,8 \frac{N}{kg}}{1,5 \cdot 442 m^2 \cdot 0,310 \frac{kg}{m^3}}} \\ &= 157,5 \tfrac{m}{s} \\ &= 306 kts \end{aligned}$$

Comme la vitesse minimale est plus grande que la vitesse de décrochage, ce n'est pas la vitesse de décrochage qui limite la vitesse de l'avion. L'avion pourrait donc se déplacer à vitesse constante à des vitesses entre 348 nœuds et 493 nœuds.

6. a) La 2e loi de Newton en *y* nous donne

$$F_L - mg\cos\theta = 0$$

On a donc

$$\begin{aligned} F_L &= mg\cos\theta \\ &= 260\,000 kg \cdot 9,8 \tfrac{N}{kg} \cdot \cos 3° \\ &= 2\,544\,508 N \end{aligned}$$

b) On sait que la portance

$$F_L = \frac{1}{2} C_L A \rho v^2$$

doit être égale à 2 544 508 N. On a donc

$$\begin{aligned} 2\,544\,508 N &= \frac{1}{2} \cdot C_L \cdot 442 m^2 \cdot 0,778 \tfrac{kg}{m^3} \cdot \left(185,3 \tfrac{m}{s}\right)^2 \\ 2\,544\,508 N &= 5\,903\,679 N \cdot C_L \\ C_L &= 0,431 \end{aligned}$$

c) La trainée est donnée par

$$F_d = \frac{1}{2} C_d A \rho v^2$$

Pour la trouver, il nous faut le coefficient de trainée. Le coefficient de trainée est

$$\begin{aligned}C_d &= C_{d0} + \frac{C_L^2 A}{e\pi S^2}\\ &= 0,031 + \frac{(0,431)^2 \cdot 442m^2}{0,725 \cdot \pi \cdot (64,75m)^2}\\ &= 0,031 + 0,009\\ &= 0,040\end{aligned}$$

La trainée est donc

$$\begin{aligned}F_d &= \frac{1}{2} C_d A \rho v^2\\ &= \frac{1}{2} \cdot 0,040 \cdot 442m^2 \cdot 0,778\tfrac{kg}{m^3} \cdot \left(185,3\tfrac{m}{s}\right)^2\\ &= 236\,147N\end{aligned}$$

d) L'équation des forces en x est

$$F_t - F_d - mg\sin\theta = ma$$

La force de poussée de moteur est donc

$$F_t = F_d + mg\sin\theta + ma$$

Pour la trouver, il nous faut l'accélération. Comme la vitesse passe de 360 nœuds à 400 nœuds en 10 minutes, l'accélération est

$$\begin{gathered}v = v_0 + at\\ 205,9\tfrac{m}{s} = 185,3\tfrac{m}{s} + a \cdot 180s\\ 20,6\tfrac{m}{s} = a \cdot 300s\\ a = 0,114\tfrac{m}{s^2}\end{gathered}$$

La force de poussée des moteurs est donc

$$\begin{aligned}F_t &= F_d + mg\sin\theta + ma\\ &= 236\,147N + 260\,000kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot \sin 3° + 260\,000kg \cdot 0,114\tfrac{m}{s^2}\\ &= 236\,147N + 133\,352N + 29\,640N\\ &= 399\,139N\end{aligned}$$

e) La poussée est donnée par

$$F_t = \frac{1}{2}\left(v_{\exp}^2 - v^2\right)\rho A_h$$

Il faut trouver l'aire de cercle décrit par la soufflante quand elle tourne (c'est le A_h dans les formules). Puisque le rayon est de 2,05 m, l'aire est

$$\begin{aligned} A_h &= \pi R^2 \\ &= \pi \cdot (1,5m)^2 \\ &= 7,07m^2 \end{aligned}$$

Comme la force faite par chaque moteur doit être de 199 570 N (la moitié de la force totale puisqu'il y a 2 moteurs), on a

$$\begin{aligned} F_t &= \frac{1}{2}\left(v_{\text{exp}}^2 - v^2\right)\rho A_h \\ 199\,570N &= \frac{1}{2}\cdot\left(v_{\text{exp}}^2 - \left(185,3\tfrac{m}{s}\right)^2\right)\cdot 0,778\tfrac{kg}{m^3}\cdot 7,07m^2 \\ 199\,570N &= 2,75923\tfrac{kg}{m}\cdot\left(v_{\text{exp}}^2 - \left(185,3\tfrac{m}{s}\right)^2\right) \\ 72\,565\tfrac{m^2}{s^2} &= v_{\text{exp}}^2 - \left(185,3\tfrac{m}{s}\right)^2 \\ 72\,565\tfrac{m^2}{s^2} + \left(185,3\tfrac{m}{s}\right)^2 &= v_{\text{exp}}^2 \\ 106\,901\tfrac{m^2}{s^2} &= v_{\text{exp}}^2 \\ v_{\text{exp}} &= 327,0\tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

7. a) L'angle de montée à la poussée maximale se calcule avec

$$\sin\theta = \frac{F_{t\max}}{mg} - \frac{C_d}{C_L}$$

Pour trouver cet angle, on doit avoir les coefficients de portance et de trainée. Pour le coefficient de portance, on a

$$F_L - mg\cos\theta = 0$$

Il nous faudrait l'angle maximum pour le calculer, mais c'est justement ce qu'on cherche. Ce n'est pas grave puisqu'on peut calculer les coefficients comme si l'avion était en vol horizontal. On a alors

$$\begin{aligned} F_L - mg &= 0 \\ \frac{1}{2}C_L\rho A v^2 &= mg \\ C_L &= \frac{2mg}{\rho A v^2} \end{aligned}$$

$$C_L = \frac{2 \cdot 260\,000kg \cdot 9{,}8\frac{N}{kg}}{1{,}06\frac{kg}{m^3} \cdot 442m^2 \cdot \left(154{,}4\frac{m}{s}\right)^2}$$

$$C_L = 0{,}456$$

Le coefficient de trainée est alors

$$\begin{aligned}C_d &= C_{d0} + \frac{C_L^2 A}{e\pi S^2} \\ &= 0{,}031 + \frac{\left(0{,}456\right)^2 \cdot 442m^2}{0{,}725 \cdot \pi \cdot \left(64{,}75m\right)^2} \\ &= 0{,}031 + 0{,}010 \\ &= 0{,}041\end{aligned}$$

L'angle de montée maximum est

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{F_{t\max}}{mg} - \frac{C_d}{C_L} \\ &= \frac{600\,000N}{260\,000kg \cdot 9{,}8\frac{N}{kg}} - \frac{0{,}041}{0{,}456} \\ &= 0{,}235 - 0{,}090 \\ &= 0{,}145 \\ \theta &= 8{,}37°\end{aligned}$$

Cela correspond à un rythme de montée de

$$\begin{aligned}v_y &= v\theta \cdot 1{,}77 \\ &= 300kts \cdot 8{,}37° \cdot 1{,}77 \\ &= 4444\frac{pieds}{\min}\end{aligned}$$

b) Pour avoir l'angle de montée le plus grand, on doit monter à la vitesse de trainée minimale. Ici, cette vitesse est

$$\begin{aligned}
v_{d\min} &= \sqrt[4]{\frac{4m^2g^2}{C_{d0}A\rho^2 e\pi S^2}} \\
&= \sqrt[4]{\frac{4\cdot\left(260\,000kg\right)^2\cdot\left(9,8\tfrac{N}{kg}\right)^2}{0,031\cdot 442m^2\cdot\left(1,06\tfrac{kg}{m^3}\right)^2\cdot 0,725\cdot\pi\cdot\left(64,75m\right)^2}} \\
&= \sqrt[4]{176\,642\,710\tfrac{m^4}{s^4}} \\
&= 115,3\tfrac{m}{s} \\
&= 224kts
\end{aligned}$$

On peut ensuite calculer l'angle de montée à puissance maximum avec

$$\sin\theta = \frac{F_{t\max}}{mg} - \frac{C_d}{C_L}$$

Pour trouver cet angle, on doit avoir les coefficients de portance et de trainée. En suivant les mêmes étapes que l'exemple précédent, on a

$$\begin{aligned}
C_L &= \frac{2mg}{\rho A v^2} \\
&= \frac{2\cdot 260\,000kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}}{1,06\tfrac{kg}{m^3}\cdot 442m^2\cdot\left(115,3\tfrac{m}{s}\right)^2} \\
&= 0,818
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
C_d &= C_{d0} + \frac{C_L^2 A}{e\pi S^2} \\
&= 0,031 + \frac{\left(0,818\right)^2\cdot 442m^2}{0,725\cdot\pi\cdot\left(64,75m\right)^2} \\
&= 0,031 + 0,031 \\
&= 0,062
\end{aligned}$$

L'angle de montée maximum donc est

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{F_{t\max}}{mg} - \frac{C_d}{C_L} \\
&= \frac{600\,000N}{260\,000kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}} - \frac{0,062}{0,818} \\
&= 0,235 - 0,076
\end{aligned}$$

$$= 0,159$$
$$\theta = 9,15°$$

Cela correspond à un rythme de montée de

$$\begin{aligned} v_y &= v\theta \cdot 1,77 \\ &= 224kts \cdot 9,15° \cdot 1,77 \\ &= 3628 \tfrac{\text{pieds}}{\text{min}} \end{aligned}$$

8. Comme il n'y a pas de poussée, les équations deviennent

$$\begin{aligned} -F_d + mg\sin\theta &= ma \\ F_L - mg\cos\theta &= 0 \end{aligned}$$

On cherche a, qu'on peut trouver avec la 1re équation. Toutefois, pour trouver l'accélération, il nous faut la trainée et il nous faut le coefficient de trainée pour la trouver puisque

$$F_d = \frac{1}{2} C_d A \rho v^2$$

Cependant, pour trouver le coefficient de trainée, il nous faut le coefficient de portance puisque

$$C_d = C_{d0} + \frac{C_L^2 A}{e\pi S^2}$$

Pour trouver ce coefficient de portance, on doit résoudre la 2e équation. Cette équation nous donne

$$\begin{aligned} F_L - mg\cos\theta &= 0 \\ F_L &= mg\cos\theta \\ F_L &= 260\,000kg \cdot 9,8 \tfrac{N}{kg} \cdot \cos 4° \\ F_L &= 2\,541\,793N \end{aligned}$$

On peut alors trouver le coefficient de portance.

$$\begin{aligned} F_L &= \frac{1}{2} C_L A \rho v^2 \\ 2\,541\,793N &= \frac{1}{2} \cdot C_L \cdot 442m^2 \cdot 0,310 \tfrac{kg}{m^3} \cdot \left(247,0 \tfrac{m}{s}\right)^2 \\ 2\,541\,793N &= 4\,179\,727 \cdot C_L \\ C_L &= 0,608 \end{aligned}$$

Le coefficient de trainée est

$$\begin{aligned}
C_d &= C_{d0} + \frac{C_L^2 A}{e\pi S^2} \\
&= 0,031 + \frac{(0,608)^2 \cdot 442m^2}{0,725 \cdot \pi \cdot (64,75m)^2} \\
&= 0,031 + 0,017 \\
&= 0,048
\end{aligned}$$

La force de trainée est donc

$$\begin{aligned}
F_d &= \frac{1}{2} C_d A \rho v^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot 0,048 \cdot 442m^2 \cdot 0,310\tfrac{kg}{m^3} \cdot \left(247,0\tfrac{m}{s}\right)^2 \\
&= 200\,627N
\end{aligned}$$

On peut maintenant trouver l'accélération de l'avion

$$\begin{gathered}
-F_d + mg\sin\theta = ma \\
-200\,627N + 260\,000kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} \cdot \sin 4° = 260\,000kg \cdot a \\
-200\,627N + 177\,739N = 260\,000kg \cdot a \\
a = -0,088\tfrac{m}{s^2}
\end{gathered}$$

L'avion est donc en train de ralentir.

9. a) L'angle minimum est

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{2}{S}\sqrt{\frac{C_{d0}A}{e\pi}} \\
\sin\theta &= \frac{2}{64,75m}\sqrt{\frac{0,031 \cdot 442m^2}{0,725 \cdot \pi}} \\
\sin\theta &= 0,0758 \\
\theta &= 4,34°
\end{aligned}$$

b) La vitesse doit se faire à la vitesse de trainée minimale. Cette vitesse est

$$
\begin{aligned}
v_{d\min} &= \sqrt[4]{\frac{4m^2g^2}{C_{d0}A\rho^2 e\pi S^2}} \\
&= \sqrt[4]{\frac{4\cdot(260\,000kg)^2\cdot\left(9,8\tfrac{N}{kg}\right)^2}{0,031\cdot 442m^2\cdot\left(0,310\tfrac{kg}{m^3}\right)^2\cdot 0,725\cdot\pi\cdot(64,75m)^2}} \\
&= \sqrt[4]{2\,065\,304\,366\tfrac{m^4}{s^4}} \\
&= 213,2\tfrac{m}{s} \\
&= 414kts
\end{aligned}
$$

c) Le rythme de descente est de

$$
\begin{aligned}
v_y &= v\theta\cdot 1,77 \\
&= 414kts\cdot 4,34°\cdot 1,77 \\
&= 3180\tfrac{\text{pieds}}{\text{min}}
\end{aligned}
$$

10. On trouve $C_{L\,max}$ avec la formule de la vitesse de décollage.

$$
\begin{aligned}
v_{decol} &= 1,2\sqrt{\frac{2mg}{C_{L\max}A\rho}} \\
77,2\tfrac{m}{s} &= 1,2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 260\,000kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}}{C_{L\max}\cdot 442m^2\cdot 1,16\tfrac{kg}{m^3}}} \\
\frac{77,2\tfrac{m}{s}}{1,2} &= \sqrt{\frac{2\cdot 260\,000kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}}{C_{L\max}\cdot 442m^2\cdot 1,16\tfrac{kg}{m^3}}} \\
\left(\frac{77,2\tfrac{m}{s}}{1,2}\right)^2 &= \frac{2\cdot 260\,000kg\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}}{C_{L\max}\cdot 442m^2\cdot 1,16\tfrac{kg}{m^3}} \\
4139\tfrac{m^2}{s^2} &= \frac{9939\tfrac{m^2}{s^2}}{C_{L\max}} \\
C_{L\max} &= \frac{9939\tfrac{m^2}{s^2}}{4139\tfrac{m^2}{s^2}} \\
C_{L\max} &= 2,4
\end{aligned}
$$

11. La vitesse de décollage est

$$v_{decol\,1}^2 = (1,2)^2 \frac{2mg}{C_{L\max} A \rho_1}$$

(Les indices 1 font référence à la situation quand l'altitude est de 5 000 pieds.)

On connait la masse volumique, mais on ne connait rien d'autre concernant cet avion. Comment pourra-t-on calculer la vitesse de décollage sans aucune information ? On pourra le faire en utilisant le fait que la vitesse de décollage est de 120 nœuds à 1000 pieds.

$$v_{decol\,2}^2 = (1,2)^2 \frac{2mg}{C_{L\max} A \rho_2}$$

(Les indices 2 font référence à la situation quand l'altitude est de 1000 pieds.)

Si on divise les deux équations l'un par l'autre, on a

$$\frac{v_{decol\,1}^2}{v_{decol\,2}^2} = \frac{(1,2)^2 \frac{2mg}{C_{L\max} A \rho_1}}{(1,2)^2 \frac{2mg}{C_{L\max} A \rho_2}}$$

Plusieurs éléments se simplifient et on obtient

$$\frac{v_{decol\,1}^2}{v_{decol\,2}^2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

On peut maintenant utiliser les valeurs pour obtenir

$$\frac{v_{\min 2}^2}{(120kts)^2} = \frac{1,16\frac{kg}{m^3}}{1,06\frac{kg}{m^3}}$$

(Quand on un rapport de deux éléments identiques comme le rapport des v^2 ici, on peut utiliser l'unité qu'on veut pour ces éléments. Ici, j'ai choisi d'utiliser des nœuds.)

Si on isole la vitesse, on obtient $v_{\min}$ = 125,5 nœuds.

12. a) On trouve la poussée avec l'équation des forces en x.

$$F_t - F_d = ma$$

Comme il n'y a pas de trainée en début de piste, on a

$$\begin{aligned} F_t &= ma \\ &= 260\,000kg \cdot 1{,}8\tfrac{m}{s^2} \\ &= 468\,000N \end{aligned}$$

La poussée de chaque moteur est donc de 234 000 N (on remarque qu'on n'est pas à la poussée maximale).

b) L'accélération moyenne se calcule avec

$$F_t - F_d = ma$$

quand la vitesse de l'avion est égale à la vitesse de décollage divisée par $\sqrt{2}$. Cette vitesse est

$$\begin{aligned} v &= \frac{v_{decol}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{77{,}2\tfrac{m}{s}}{\sqrt{2}} \\ &= 54{,}6\tfrac{m}{s} \\ &= 106kts \end{aligned}$$

Pour trouver l'accélération, il nous faut la trainée. Le coefficient de trainée est

$$\begin{aligned} C_d &= C_{d0} + \frac{C_L^2 A}{e\pi S^2} \\ &= 0{,}031 + 0{,}019 + 0{,}040 + \frac{(1{,}0)^2 \cdot 442m^2}{0{,}725 \cdot \pi \cdot (64{,}75m)^2} \\ &= 0{,}031 + 0{,}019 + 0{,}040 + 0{,}046 \\ &= 0{,}136 \end{aligned}$$

La force de trainée est donc

$$\begin{aligned} F_d &= \frac{1}{2} C_d A \rho v^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0{,}123 \cdot 442m^2 \cdot 1{,}16\tfrac{kg}{m^3} \cdot \left(54{,}6\tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= 103\,938N \end{aligned}$$

La somme des forces en *x* est donc

$$
\begin{aligned}
F_t - F_d &= ma \\
468\,000N - 103\,938N &= 260\,000kg \cdot a \\
364\,062N &= 260\,000kg \cdot a \\
a &= 1,40\tfrac{m}{s^2}
\end{aligned}
$$

c) Il faut isoler *t* dans cette équation.

$$v = v_0 + at$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
77,2\tfrac{m}{s} &= 0\tfrac{m}{s} + 1,40\tfrac{m}{s^2} \cdot t \\
t &= 55,1s
\end{aligned}
$$

d) Au bout de ces 55,1 secondes, la distance parcourue par l'avion est de

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 \\
&= 0 + 0 + \tfrac{1}{2} \cdot 1,40\tfrac{m}{s^2} \cdot (55,1s)^2 \\
&= 2125m \\
&= 6972\,pieds
\end{aligned}
$$

e) Pour la longueur de piste recommandée, on ajoute les quelque 200 pieds dans les airs à la distance nécessaire pour l'accélération et on multiplie le tout par 1,15.

$$
\begin{aligned}
L &= (6972\,ft + 200\,ft) \cdot 1,15 \\
&= 8248\,ft
\end{aligned}
$$

(Dans internet, on donne une longueur de piste requise de 8800 pieds pour ce poids et cette altitude.)

f) On trouve la normale avec l'équation suivante.

$$F_L + F_N - mg = 0$$

On a donc

$$\frac{1}{2} C_L A \rho v^2 + F_N - mg = 0$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1{,}0\cdot 442m^2\cdot 1{,}16\tfrac{kg}{m^3}\cdot\left(77{,}2\tfrac{m}{s}\right)^2+F_N-260\,000kg\cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}=0$$
$$1\,527\,865N+F_N-2\,548\,000N=0$$
$$F_N=1\,020\,135N$$

Cette normale équivaut à 40 % du poids. La portance supporte donc 60 % du poids de l'avion à ce moment.

13. On trouve $C_{L\,max}$ avec la formule de la vitesse d'atterrissage.

$$v_{atter}=1{,}3\sqrt{\frac{2mg}{C_{L\max}A\rho}}$$
$$77{,}2\tfrac{m}{s}=1{,}3\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 200\,000kg\cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}}{C_{L\max}\cdot 442m^2\cdot 1{,}16\tfrac{kg}{m^3}}}$$
$$\frac{72{,}1\tfrac{m}{s}}{1{,}3}=\sqrt{\frac{2\cdot 200\,000kg\cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}}{C_{L\max}\cdot 442m^2\cdot 1{,}16\tfrac{kg}{m^3}}}$$
$$\left(\frac{72{,}1\tfrac{m}{s}}{1{,}3}\right)^2=\frac{2\cdot 200\,000kg\cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}}{C_{L\max}\cdot 442m^2\cdot 1{,}16\tfrac{kg}{m^3}}$$
$$3076\tfrac{m^2}{s^2}=\frac{7645\tfrac{m^2}{s^2}}{C_{L\max}}$$
$$C_{L\max}=\frac{7645\tfrac{m^2}{s^2}}{3076\tfrac{m^2}{s^2}}$$
$$C_{L\max}=2{,}5$$

14. a) La longueur de piste (sans le facteur de sécurité) nécessaire est donnée par

L = distance dans les airs avant que les roues ne touchent le sol
+ distance de freinage

On sait que la distance dans les airs est d'environ 1000 pieds.

Pour la distance de freinage, on va calculer l'accélération moyenne avec la force moyenne. On va trouver la force de freinage en trouvant la force moyenne à partir des forces.

$$F_{tot}=F_t-F_d-F_f$$

La force moyenne est la moyenne de la force en début de piste et de la force en fin de piste.

Trouvons premièrement la force totale en début de piste (qu'on va appeler F_1). Pour la trouver, il nous faut la force de trainée sur l'avion. Cette force dépend de la vitesse et du coefficient de trainée. On sait que la vitesse est de 140 nœuds. Il reste à trouver la trainée.

Le coefficient de trainée est de

$$C_d = C_{d0} + 0,013 + 0,120 + \frac{C_L^2 A}{e\pi S^2}$$

On ajoute 0,013 pour le train d'atterrissage et 0,120 pour les volets. Comme l'avion est horizontal à ce moment et que les réducteurs de portance sont déployés, C_L a une valeur de 0,5. On a donc

$$\begin{aligned} C_d &= 0,031 + 0,013 + 0,120 + \frac{(0,5)^2 \cdot 442m^2}{0,725 \cdot \pi \cdot (77,2m)^2} \\ &= 0,031 + 0,013 + 0,120 + 0,008 \\ &= 0,172 \end{aligned}$$

La force de trainée est donc

$$\begin{aligned} F_d &= \frac{1}{2} C_d A \rho v^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0,172 \cdot 442m^2 \cdot 1,16\tfrac{kg}{m^3} \cdot \left(72,1\tfrac{m}{s}\right)^2 \\ &= 229\,218N \end{aligned}$$

Pour la friction avec le sol, on dit qu'on freine avec 10 % de la force de friction statique maximale. La force de friction est donc

$$F_f = 0,1\mu_s F_N$$

Pour trouver la normale, examinons les forces en y.

$$F_L + F_N - mg = 0$$

On a donc

$$\frac{1}{2}C_L\rho Av^2 + F_N - mg = 0$$

$$\frac{1}{2}\cdot 0,5\cdot 1,16\tfrac{kg}{m^3}\cdot 442m^2\cdot\left(72,1\tfrac{m}{s}\right)^2 + F_N - 200\,000kg\cdot 9,8\tfrac{m}{s^2} = 0$$

$$666\,332N + F_N - 1\,960\,000N = 0$$

$$F_N = 1\,293\,668N$$

La force de friction est donc de

$$\begin{aligned} F_f &= 0,1\mu_s F_N \\ &= 0,1\cdot 0,9\cdot 1\,293\,668N \\ &= 116\,430N \end{aligned}$$

La somme des forces en *x* est donc

$$\begin{aligned} F_1 &= F_t - F_d - F_f \\ &= -100\,000N - 229\,218N - 116\,430N \\ &= -445\,648N \end{aligned}$$

Trouvons maintenant la force totale en fin de piste (qu'on va appeler F_2). Comme la vitesse est nulle à ce moment, il n'y a pas de trainée et l'équation des forces en *x* devient

$$F_2 = F_t - F_f$$

Encore une fois, la force de friction est égale à 10 % de la force de friction statique maximale.

$$F_f = 0,1\mu_s F_N$$

Pour trouver la normale, examinons les forces en *y*.

$$F_L + F_N - mg = 0$$

En fin de piste, il n'y a plus de portance. On a donc

$$F_N - mg = 0$$

$$F_N - 200\,000kg\cdot 9,8\tfrac{m}{s^2} = 0$$

$$F_N = 1\,960\,000N$$

La force de friction est donc de

$$\begin{aligned} F_f &= 0,1\mu_s F_N \\ &= 0,1 \cdot 0,9 \cdot 1\,960\,000N \\ &= 176\,400N \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} F_2 &= F_t - F_f \\ &= -100\,000N - 176\,400N \\ &= -276\,400N \end{aligned}$$

La force moyenne est donc (approximativement) de

$$\begin{aligned} F_{moy} &= \frac{F_1 + F_2}{2} \\ &= \frac{-445\,648N - 276\,400N}{2} \\ &= -361\,024N \end{aligned}$$

L'accélération moyenne de l'avion pendant le freinage est donc

$$\begin{aligned} F_{tot} &= ma \\ -361\,024N &= 200\,000kg \cdot a \\ a &= \frac{-361\,024N}{200\,000kg} \\ a &= -1,81\tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Le déplacement de l'avion pendant la période de freinage est donc

$$\begin{aligned} 2a\left(x - x_0\right) &= v^2 - v_0^2 \\ 2 \cdot \left(-1,81\tfrac{m}{s^2}\right) \cdot \left(x - 0m\right) &= 0 - \left(72,1\tfrac{m}{s}\right)^2 \\ x &= 1436m \end{aligned}$$

Cette distance correspond à une distance de 4711 pieds.

Au total, la distance de piste est donc

L = distance dans les airs avant que les roues ne touchent le sol
+ distance de freinage

= 1000 ft + 4711 ft

= 5711 pieds

Avec le facteur de sécurité, la piste doit avoir une longueur minimale de

$$LDR = \frac{5}{3} \cdot 5711 ft$$
$$= 9\,518 ft$$

b) La longueur de piste (sans le facteur de sécurité) nécessaire est donnée par

L = distance dans les airs avant que les roues ne touchent le sol
+ distance de freinage

On sait que la distance dans les airs est d'environ 1000 pieds (en fait, cette distance augmenterait d'environ 60 pieds parce que le vent pousse l'avion pendant sa descente, ce qui diminue l'angle d'arrivée. On va négliger cette différence).

Pour la distance de freinage, on va calculer l'accélération moyenne avec la force moyenne. On va trouver la force de freinage en trouvant la force moyenne à partir des forces.

$$F_{tot} = F_t - F_d - F_f$$

Toutefois, aucune des forces ne change par rapport aux calculs en a) puisque la vitesse de l'avion par rapport à l'air reste à 140 nœuds. La force moyenne est donc

$$F_{moy} = -361\,024 N$$

Comme la force moyenne et la masse de l'avion sont les mêmes, l'accélération moyenne de l'avion reste

$$a = -1{,}81 \tfrac{m}{s^2}$$

Le déplacement de l'avion pendant la période de freinage est donc

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$$
$$2 \cdot \left(-1{,}81 \tfrac{m}{s^2}\right) \cdot (x - 0m) = 0 - \left(77{,}2 \tfrac{m}{s}\right)^2$$
$$x = 1646 m$$

Cette distance correspond à une distance de 5400 pieds.

Au total, la distance de piste est donc

L = distance dans les airs avant que les roues ne touchent le sol
+ distance de freinage

= 1000 *ft* + 5400 *ft*

= 6400 pieds

Avec le facteur de sécurité, la longueur de piste serait de

$$\begin{aligned} LDR &= \frac{5}{3}\cdot 6400\,ft \\ &= 10\,667\,ft \end{aligned}$$