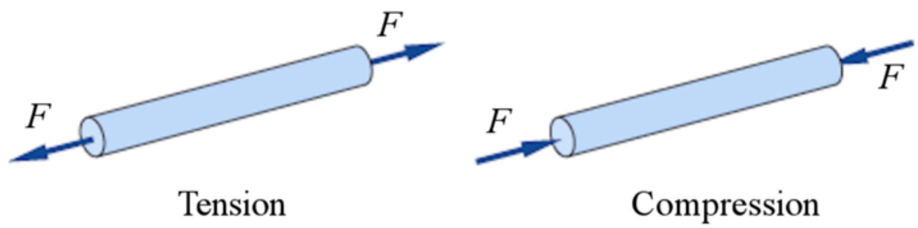
10 CONTRAINTE ET DÉFORMATION

10.1 LA CONTRAINTE (OU LE STRESS)

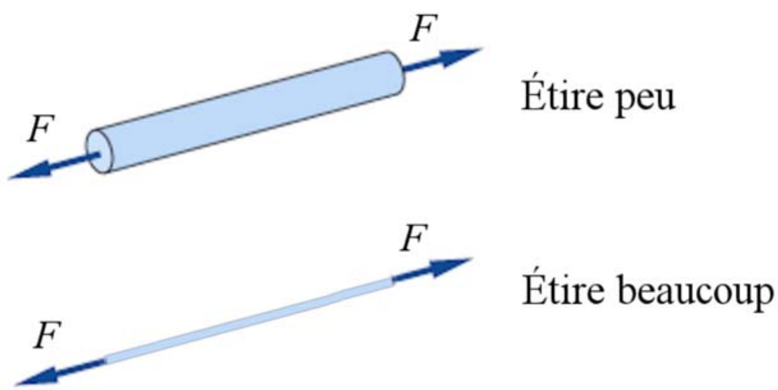
Définition de la contrainte

Pour commencer, on veut connaitre l'effet sur un objet quand on applique une force de compression ou de tension à l'objet.



www.mathalino.com/reviewer/mechanics-and-strength-of-materials/normal-stresses

Si on prend deux objets de la même longueur et fait du même matériel, on se rend compte assez vite que l'effet est différent selon la taille de l'objet. L'effet sera beaucoup plus important pour les objets ayant une taille plus petite. Par exemple, il est beaucoup plus facile d'étirer un fil d'acier de 2 mm de diamètre qu'une tige d'acier de 1 cm de diamètre.



www.mathalino.com/reviewer/mechanics-and-strength-of-materials/normal-stresses

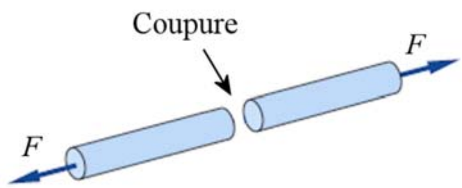
C'est que l'effet d'une force sur un objet n'est pas déterminé uniquement par la force, mais aussi par la taille de l'objet. En fait, l'effet est déterminé par la contrainte, qui dépend de la force et de la grosseur de l'objet.

La contrainte est définie par la formule suivante

Contrainte (ou stress)

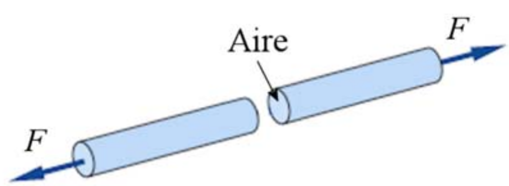
$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Dans cette formule, *A* est l'aire de la section. Pour la trouver, on imagine qu'on coupe (donc qu'on sectionne) l'objet dans le sens perpendiculaire à la direction de la force. Dans le cas de notre tige, cela revient à couper la tige dans le sens montré sur cette figure.



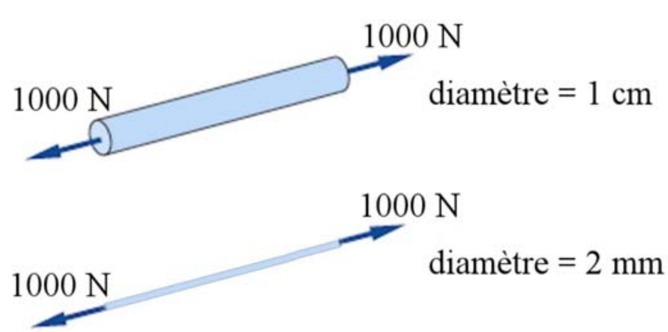
(On peut aussi imaginer que la tige a cassé sous l'effet de la force.)

L'aire *A* est l'aire de la coupure (qu'on appelle l'aire de la section).



Dans ce cas, l'aire de la section correspond à l'aire d'un cercle.

Si on revient à nos deux tiges, on peut comprendre que la contrainte sur le petit fil d'acier est beaucoup plus grande que la contrainte sur la tige. Pour comprendre pourquoi, calculons la contrainte en supposant que la force est de 1000 N. On a alors la situation suivante.



Pour la tige d'acier, la section est un petit cercle de 0,5 cm de rayon (Rappel : le rayon est la moitié du diamètre d'un cercle). L'aire de la section est alors

$$\begin{aligned} A &= \pi R^2 \\ &= \pi \cdot (0,005m)^2 \\ &= 0,0000785m^2 \end{aligned}$$

La contrainte est donc

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1000N}{0,0000785m^2} \\ &= 12\ 732\ 395 \tfrac{N}{m^2} \end{aligned}$$

Pour la tige de 2 mm de diamètre, le rayon est de 1 mm et l'aire de la section est

$$\begin{aligned} A &= \pi R^2 \\ &= \pi \cdot (0,001m)^2 \\ &= 0,00000314m^2 \end{aligned}$$

La contrainte est donc

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1000N}{0,00000314m^2} \\ &= 318\ 309\ 886 \tfrac{N}{m^2} \end{aligned}$$

Comme la contrainte sur le fil est plus importante que pour la tige, l'effet sur le fil sera plus grand. Dans ce cas, le fil étirera plus que la tige.

Unités de la contrainte

Dans les calculs précédents, on a utilisé le N/m² comme unité de contrainte. Toutefois, cette unité a un nom, c'est le *pascal*

Unité de la contrainte (ou stress)

$$1Pa = 1 \tfrac{N}{m^2}$$

Dans le système anglais, les unités de contraintes sont la livre par pouce carré (lb/po² ou psi) ou la livre par pied carré (lb/pi² ou psf). On convertit ces unités en pascal avec les facteurs de conversion suivant.

Unité de départ	Multipliez par	Pour obtenir des
lb/po²	6895	Pa
lb/pi²	47,88	Pa

On peut aussi utiliser les kilopascals, les mégapascals ou les gigapascals

1 kPa = 1000 Pa
1 MPa = 1 000 000 Pa
1 GPa = 1 000 000 000 Pa

La notation scientifique

Le calcul de l'aire de la section donne parfois de très petits chiffres alors que le calcul de la contrainte donne souvent de très grands chiffres. Pour exprimer de tels nombres, on utilise souvent la notation scientifique. Dans cette notation on utilise les puissances de 10, qui sont

$10^1 = 10$	$10^{-1} = 0{,}1$
$10^2 = 100$	$10^{-2} = 0{,}01$
$10^3 = 1\ 000$	$10^{-3} = 0{,}001$
$10^4 = 10\ 000$	$10^{-4} = 0{,}000\ 1$
$10^5 = 100\ 000$	$10^{-5} = 0{,}000\ 01$
$10^6 = 1\ 000\ 000$	$10^{-6} = 0{,}000\ 001$
$10^7 = 10\ 000\ 000$	$10^{-7} = 0{,}000\ 000\ 1$
$10^8 = 100\ 000\ 000$	$10^{-8} = 0{,}000\ 000\ 01$
$10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$	$10^{-9} = 0{,}000\ 000\ 001$

Ainsi, la contrainte calculée précédemment (un peu arrondie) peut s'écrire sous la forme suivante

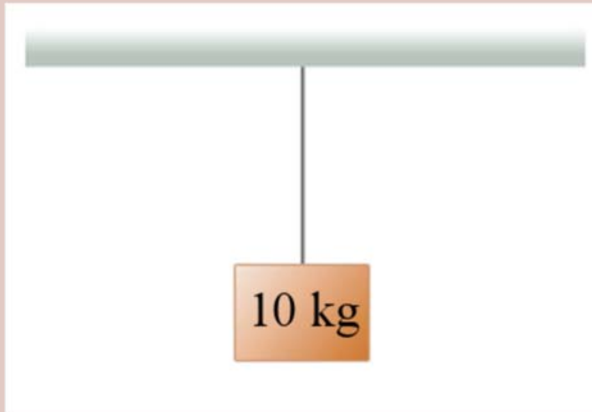
$$\begin{aligned} 318\ 000\ 000 &= 3{,}18 \times 100\ 000\ 000 \\ &= 3{,}18 \times 10^8 \end{aligned}$$

L'aire calculée précédemment (un peu arrondie) peut aussi s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} 0{,}000\ 003\ 14 &= 3{,}14 \times 0{,}000\ 001 \\ &= 3{,}14 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

Exemple 10.1.1

Une corde de 5 mm de diamètre soutient une masse de 10 kg. Quelle est la contrainte dans cette corde ?



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/two-blocks-masses-hang-one--problem-take-thepositive-direction-upward-use-magnitude-accele-q175717

Comme la corde doit soutenir le bloc, la tension de la corde est égale au poids du bloc, qui est de 98 N.

Puisque le rayon de la section de la corde est de 2,5 mm, l'aire de la section de la corde est

$$\begin{aligned} A &= \pi R^2 \\ &= \pi \cdot (0{,}0025m)^2 \\ &= 1{,}963 \times 10^{-5} m^2 \end{aligned}$$

La contrainte est donc

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{98N}{1{,}963 \times 10^{-5} m^2} \\ &= 4{,}991 \times 10^6 Pa \\ &= 4{,}991 MPa \end{aligned}$$

Exemple 10.1.2

Quelle est la contrainte sur la prothèse de cette personne de 75 kg quand elle tient son vélo de 10 kg au bout de ses bras ? On suppose que la prothèse est une tige pleine de 4 cm de diamètre.

www.lambertsoandp.com

Le poids de la personne et du vélo sont

$$P_{personne} = 75kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} = 735N$$
$$P_{vélo} = 10kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} = 98N$$

Dans cette position, l'orthèse doit supporter la moitié du poids de la personne et du vélo, la force de compression sur la tige est donc

$$F = \frac{1}{2}\left(735N + 98N\right) = 416,5N$$

(Plus précisément, il faudrait enlever le poids de la jambe gauche de la personne qui n'est pas supporté par la prothèse.)

Puisque le rayon de la section de la tige est de 2 cm, l'aire de la section de la tige est

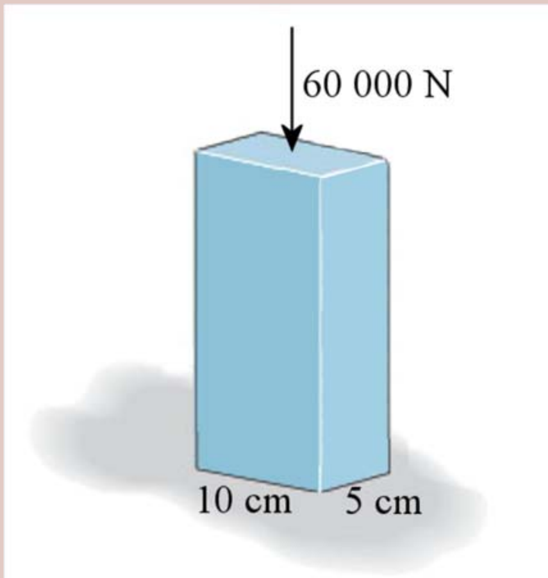
$$\begin{aligned} A &= \pi R^2 \\ &= \pi \cdot \left(0,02m\right)^2 \\ &= 1,257 \times 10^{-3} m^2 \end{aligned}$$

La contrainte est donc

$$\sigma = \frac{416,5N}{1,267\times 10^{-3}m^2}$$
$$= 3,314\times 10^{5}Pa$$
$$= 331,4kPa$$

Exemple 10.1.3

Quelle est la contrainte dans ce bloc d'aluminium ?



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/determine-maximum-minimum-normal-stress-bracket-section-f-130kn-load-applied-x-0-max-deter-q5495578

L'aire de la section est

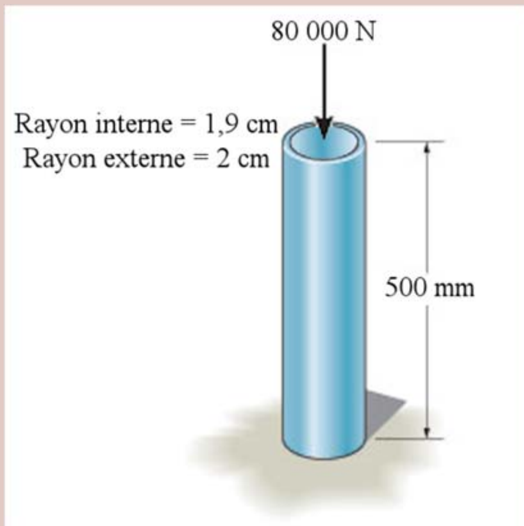
$$A = 0,05m\cdot 0,1m = 0,005m^2$$

La contrainte de compression est donc

$$\sigma = \frac{60\,000N}{0,005m^2}$$
$$= 1,2\times 10^{7}Pa$$

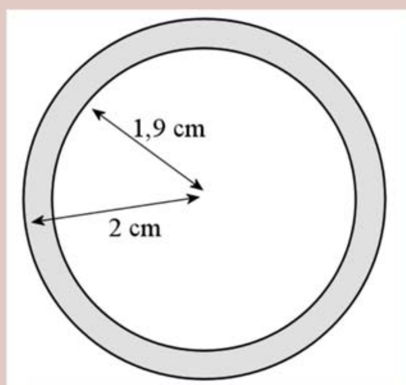
Exemple 10.1.4

Quelle est la contrainte de compression dans ce tuyau ?



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/steel-pipe-filled-concrete-subjected-compressive-force-80-kn-determine-average-normal-stre-q5483908130kn-load-applied-x-0-max-deter-q5495578

La section à la forme suivante (en gris)



L'aire de cette section est l'aire d'un cercle de 2 m de rayon à laquelle on soustrait l'aire d'un cercle de 1,9 cm de rayon

$$A = \pi \cdot \left(0,02m\right)^2 - \pi\left(0,019m\right)^2 = 1,225 \times 10^{-4} m²$$

La contrainte de compression est donc

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{80\,000 N}{1,225 \times 10^{-4} m²} \\ &= 6,529 \times 10^8 Pa\end{aligned}$$

10.2 LA CONTRAINTE ULTIME

Un objet va céder en tension ou en compression si la contrainte dépasse une valeur appelée *la contrainte ultime*, dont la valeur dépend de la substance.

Rupture de l'objet

L'objet se rompt si

$$\sigma > \sigma_{ultime}$$

Voici la valeur de la contrainte ultime pour quelques substances.

Substance	Contrainte ultime Tension (MPa)	Contrainte ultime Compression (MPa)
Acier AISI 1020 (faible % de carbone)	448	448
Acier AISI 1045 (% moyen de carbone)	655	655
Acier AISI 1095 (% élevé de carbone)	979	979
Acier AISI 4140	621	621
Acier inoxydable 304	579	579
Acier inoxydable 316L	480	480
Fer forgé	324	324
Fonte classe 20	138	552
Fonte classe 40	276	862
Fonte classe 60	414	1172
Aluminium 3003-H14	152	
Aluminium 6061-T6	310	
Aluminium 7075-T6	538	
Titane Alliage TI-6AL-4V	950	970
Titane pur, Grade I	240	
Cobalt-Chrome MP35N 0 % cold reduction	931	
Cuivre	393	
Laiton (70/30 brass) (260 Brass OS 15 Temper)	365	205
Bois (valeur moyenne) (dur et sec, parallèle au grain)	60	50
Nylon Type 66	75,8	82,7
Copolymère Acétal	69	88,9
Plycarbonate (Acrylonitrile Butadiene Styrene =ABS)	54,1	86
Polyéthylène (basse densité)	31	28
Polyéthylène (haute densité)	28	31
Polyéthylène (haute-densité, ultra-high molecular weight)	40	
Polypropylène	36,8	48,5

Polyvinyl Chloride (PVC) Blanc type 1 groupe 1	43,5	71
Polyméthylmetacrylate (Acrylic) (PMMA) (plexiglas)	68	110
Polystyrène	44,9	90
Kevlar 29	2920	
Spectra 2000	3510	
Soie	350	
Fil d'araignée (Nephila Clavipe)	850	
Coton	350	
Cuir	41	
Caoutchouc naturel	0,03	
Os	110	150
Cheveu humain	190	
Muscle	0,1	
Tendon	55	

Vous pouvez trouver les valeurs pour bien d'autres matériaux dans ce site
www.matweb.com/search/PropertySearch.aspx
En cherchant les valeurs *de Tensile Strength, Yield* et *Compressive strength, Yield*

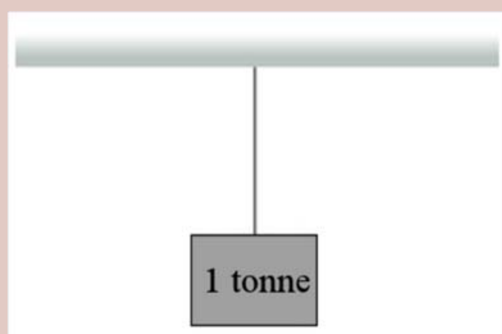
On remarque tout de suite que la contrainte ultime n'est pas nécessairement la même selon le type de force. Certains matériaux résistent mieux à la compression, comme le plexiglas par exemple, qui peut résister à une contrainte près de 1,6 fois plus grande en compression qu'en tension. Le béton (qui n'est pas dans la liste) est 10 fois plus résistant en compression qu'en tension. Pour d'autres matériaux, il n'y a pas de différence entre la contrainte ultime de compression ou de tension. C'est le cas pour plusieurs métaux.

Cette table semble très détaillée, mais elle ne l'est pas. Par exemple, on donne les valeurs de tension ultime pour 3 types de fonte, alors qu'il y en a 188 types dans le site de matweb. C'est que le processus de fabrication influence les propriétés des matériaux et, ainsi, des substances apparemment identiques peuvent avoir des propriétés un peu différentes selon le fabricant. Les valeurs indiquées dans le tableau sont donc un peu approximatives.

Exemple 10.2.1

Le câble qui supporte cette masse est en acier AISI 1020 et a un diamètre de 1 mm.

a) Le câble va-t-il casser ?



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/two-blocks-masses-hang-one--problem-take-thepositive-direction-upward-use-magnitude-accele-q175717

Comme la corde doit soutenir le bloc, la tension de la corde est égale au poids du bloc, qui est de 1000 kg x 9,8 N/kg = 9800 N.

Puisque le rayon de la section de la corde est de 0,5 mm, l'aire de la section de la corde est

$$\begin{aligned} A &= \pi R^2 \\ &= \pi \cdot (0,0005m)^2 \\ &= 7,854 \times 10^{-7} m^2 \end{aligned}$$

La contrainte est donc

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F}{A} \\ &= \frac{9800N}{7,854 \times 10^{-7} m^2} \\ &= 1,248 \times 10^{10} Pa \end{aligned}$$

Pour savoir si le câble casse, on peut diviser la contrainte par la contrainte ultime. Si la division donne un chiffre plus grand que 1, alors la contrainte est plus grande que la contrainte ultime et le câble cède. Le rapport est

$$\frac{1,248 \times 10^{10} Pa}{448MPa} = \frac{1,248 \times 10^{10} Pa}{448 \times 10^6 Pa} = 27,85$$

Cette valeur signifie que la contrainte dans le fil est 27,85 fois plus grande que la contrainte ultime. De toute évidence, ce fil casse.

b) Quelle est la masse maximale que peut supporter ce câble ?

À la limite (le câble est tout près de casser), la contrainte est égale à la contrainte ultime

$$\sigma = 448MPa = 448 \times 10^6 Pa$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F}{A} \\ 448 \times 10^6 Pa &= \frac{F}{7,854 \times 10^{-7} m^2} \end{aligned}$$

$$448 \times 10^6 Pa \cdot 7,854 \times 10^{-7} m^2 = \frac{F}{7,854 \times 10^{-7} m^2} \cdot 7,854 \times 10^{-7} m^2$$
$$448 \times 10^6 Pa \cdot 7,854 \times 10^{-7} m^2 = F$$
$$351,9N = F$$

Cette force est la tension maximale qu'il peut y avoir dans ce câble. La masse maximale qu'on peut supporter avec ce câble est donc

$$F = mg$$
$$351,9N = m \cdot 9,8\tfrac{N}{kg}$$
$$\frac{351,9N}{9,8\tfrac{N}{kg}} = \frac{m \cdot 9,8\tfrac{N}{kg}}{9,8\tfrac{N}{kg}}$$
$$\frac{351,9N}{9,8\tfrac{N}{kg}} = m$$
$$35,9kg = m$$

La masse maximale que peut supporter ce câble est donc de 35,9 kg. (Ce qui nous confirme que le câble était bien loin de pouvoir supporter 1000 kg.)

Exemple 10.2.2

La prothèse de Gontran est un type d'aluminium qui a une contrainte ultime de compression de 241 MPa. La prothèse est une simple tige pleine avec une section circulaire. Quel est le diamètre minimal que la tige doit avoir pour pouvoir supporter Gontran et son vélo si Gontran met tout son poids sur sa prothèse ? Gontran a une masse de 75 kg et son vélo a une masse de 10 kg.

www.lambertsoandp.com

Le poids de la personne et du vélo sont

$$P_{personne} = 75kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} = 735N$$
$$P_{vélo} = 10kg \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} = 98N$$

Ici, l'orthèse doit supporter le poids de la personne et du vélo, la force de compression sur la tige est donc

$$F = 735N + 98N = 833N$$

À la limite (la tige est juste sur le point de casser), la contrainte est égale à la contrainte ultime. On a donc

$$\sigma = \frac{F}{A}$$
$$241 \times 10^6 Pa = \frac{833N}{A}$$

Si on isole l'aire de la tige, on a

$$241 \times 10^6 Pa = \frac{833N}{A}$$
$$241 \times 10^6 Pa \cdot A = \frac{833N}{A} \cdot A$$
$$241 \times 10^6 Pa \cdot A = 833N$$
$$\frac{241 \times 10^6 Pa \cdot A}{241 \times 10^6 Pa} = \frac{833N}{241 \times 10^6 Pa}$$
$$A = \frac{833N}{241 \times 10^6 Pa}$$
$$A = 3,456 \times 10^{-6} m^2$$

Puisque le rayon de la section de la tige est un cercle, l'aire de la section de la tige est

$$\pi R^2 = A$$
$$\pi R^2 = 3,456 \times 10^{-6} m^2$$

Si on isole *R*, on a

$$\frac{\pi R^2}{\pi} = \frac{3,456 \times 10^{-6} m^2}{\pi}$$
$$R^2 = \frac{3,456 \times 10^{-6} m^2}{\pi}$$

$$R^2 = 1{,}1 \times 10^{-6} m^2$$
$$\sqrt{R^2} = \sqrt{1{,}1 \times 10^{-6} m^2}$$
$$R = \sqrt{1{,}1 \times 10^{-6} m^2}$$
$$R = 1{,}049 \times 10^{-3} m$$
$$R = 1{,}049 mm$$

Le diamètre étant deux fois plus grand que le rayon, le diamètre de la tige doit être de 2,098 mm

Évidemment, ce serait un peu ridicule de faire une telle prothèse avec un diamètre d'à peine 2 mm. D'accord, la prothèse ne casse pas, mais elle est vraiment sur le point de casser. La moindre petite poussée supplémentaire et la prothèse casse ! Ce serait tout aussi ridicule de prendre un câble d'ascenseur qui va céder exactement quand on atteint la limite de capacité de l'ascenseur. Si on suppose que la masse limite dans l'ascenseur est de 2000 kg, ce serait un peu dangereux d'installer un câble qui casse quand la masse atteint exactement 2000 kg.

En fait, les ingénieurs vont se donner un coussin de sécurité. Quand on annonce une masse limite de 2000 kg dans l'ascenseur, on va mettre un câble qui peut supporter beaucoup plus que 2000 kg. On pourrait même utiliser un câble qui peut supporter jusqu'à 20 000 kg pour être bien certain que le câble va résister.

Les ingénieurs utilisent donc un facteur de sécurité. Par exemple, si on utilise un facteur de sécurité de 8, on aurait fait notre prothèse pour qu'elle puisse supporter une force 8 fois plus grande que 833 N et on utiliserait un câble d'ascenseur qui peut supporter une masse de 16 000 kg.

Facteur de sécurité

$$F_{ultime} = facteur \cdot F_{\max}$$

Le F_{ultime} est la force limite qu'on trouve avec la contrainte ultime alors que la force $F_{\max}$ est la force maximale que l'objet doit supporter.

Reprenons notre exemple de la prothèse avec un facteur de sécurité de 8.

Exemple 10.2.3

La prothèse de Gontran est faite d'un type d'aluminium qui a une contrainte ultime de compression de 241 MPa. La prothèse est une simple tige pleine avec une section circulaire. Quel est le diamètre minimal que la tige doit avoir pour pouvoir supporter Gontran et son vélo si Gontran met tout son poids sur sa prothèse et si on utilise un facteur de sécurité de 8 ? Gontran a une masse de 75 kg et son vélo a une masse de 10 kg.

www.lambertsoandp.com

La force maximale que la tige doit supporter est toujours égale au poids du vélo et de Gontran. On a donc

$$F_{\max} = 735N + 98N = 833N$$

Avec le facteur de sécurité, on va donc construire une prothèse qui pourra supporter une force 8 fois plus grande.

$$F_{ultime} = 8F_{\max} = 8 \cdot 833N = 6664N$$

On va donc trouver la grosseur d'une tige qui va casser quand la force de compression sera de 6664 N. À la limite (la tige est juste sur le point de casser), la contrainte est égale à la contrainte ultime. On a donc

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$241 \times 10^6 Pa = \frac{6664N}{A}$$

Si on isole l'aire de la tige, on a

$$241\times10^{6}Pa=\frac{6664N}{A}$$

$$241\times10^{6}Pa\cdot A=\frac{6664N}{A}\cdot A$$

$$241\times10^{6}Pa\cdot A=6664N$$

$$\frac{241\times10^{6}Pa\cdot A}{241\times10^{6}Pa}=\frac{6664N}{241\times10^{6}Pa}$$

$$A=\frac{6664N}{241\times10^{6}Pa}$$

$$A=2,765\times10^{-5}m^{2}$$

Puisque le rayon de la section de la tige est un cercle, l'aire de la section de la tige est

$$\pi R^{2}=A$$

$$\pi R^{2}=2,765\times10^{-5}m$$

Si on isole *R*, on a

$$\frac{\pi R^{2}}{\pi}=\frac{2,765\times10^{-5}m}{\pi}$$

$$R^{2}=\frac{2,765\times10^{-5}m}{\pi}$$

$$R^{2}=8,8\times10^{-6}m^{2}$$

$$\sqrt{R^{2}}=\sqrt{8,8\times10^{-6}m^{2}}$$

$$R=\sqrt{8,8\times10^{-6}m^{2}}$$

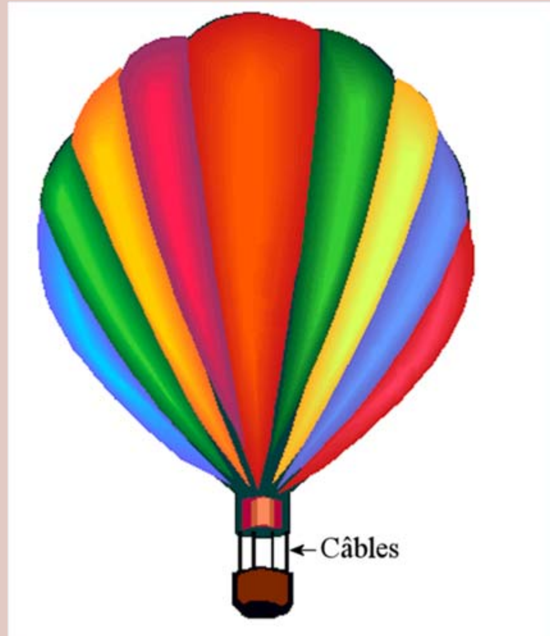
$$R=2,967\times10^{-3}m$$

$$R=2,967mm$$

Le diamètre étant deux fois plus grand que le rayon, le diamètre de la tige doit être de 5,934 mm

Exemple 10.2.4

Cette nacelle est supportée par 4 câbles en spectra 2000, une des substances qui a la plus grande contrainte ultime de tension. Chaque câble a un diamètre d'à peine 1 mm et la nacelle a une masse de 50 kg. Combien de personnes peuvent prendre place dans la nacelle si on utilise un facteur de sécurité de 4 ? (On va prendre une masse de 75 kg par personne.)



www.real-world-physics-problems.com/hot-air-balloon-physics.html

Trouvons premièrement la force ultime que chaque câble peut supporter. L'aire de chaque fil est

$$\begin{aligned} A &= \pi R^2 \\ &= \pi\left(0,0005m\right)^2 \\ &= 7,854\times 10^{-7} m^2 \end{aligned}$$

Avec une contrainte ultime de 3510 MPa, la force ultime que peut supporter chaque fil est

$$\sigma = \frac{F_{ultime}}{A}$$

$$3510\times 10^6 Pa = \frac{F_{ultime}}{7,854\times 10^{-7} m^2}$$

$$3510\times 10^6 Pa \cdot 7,854\times 10^{-7} m^2 = \frac{F_{ultime}}{7,854\times 10^{-7} m^2}\cdot 7,854\times 10^{-7} m^2$$

$$3510\times 10^6 Pa \cdot 7,854\times 10^{-7} m^2 = F_{ultime}$$

$$2756,7N = F_{ultime}$$

Les 4 fils ensemble peuvent donc supporter une force de

$$\begin{aligned} F_{ultime} &= 4 \times 2756,7N \\ &= 11027N \end{aligned}$$

(Cela donne une idée de l'incroyable résistance du spectra. Ces 4 fils de 1 mm de diamètre peuvent supporter une telle force, qui correspond approximativement au poids d'une voiture !)

Avec un facteur de sécurité de 4, la force maximale que devront supporter les câbles sera de

$$F_{ultime} = 4F_{\max}$$
$$11027N = 4F_{\max}$$
$$\frac{11027N}{4} = \frac{4F_{\max}}{4}$$
$$\frac{11027N}{4} = F_{\max}$$
$$F_{\max} = 2756,7N$$

Les 4 câbles devront donc supporter au maximum un poids de 2756,7 N, ce poids correspond à une masse de

$$m \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} = P$$
$$m \cdot 9,8\tfrac{N}{kg} = 2756,7N$$
$$\frac{m \cdot 9,8\frac{N}{kg}}{9,8\frac{N}{kg}} = \frac{2756,7N}{9,8\frac{N}{kg}}$$
$$m = \frac{2756,7N}{9,8\frac{N}{kg}}$$
$$m = 281,3kg$$

Comme la nacelle elle-même à une masse de 50 kg, la masse des personnes doit être au maximum de 231,3 kg. Comme on suppose que chaque personne a une masse de 75 kg, le nombre maximal de personnes est

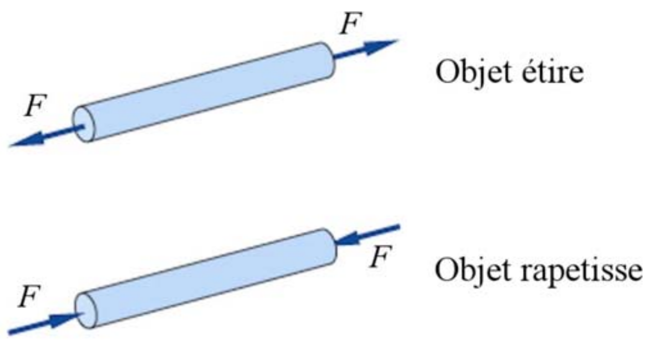
$$\frac{231,3kg}{75kg} = 3,08$$

On va donc accepter 3 personnes au maximum dans la nacelle

Le propriétaire du ballon peut donc mettre une affiche indiquant que le nombre maximal d'occupants sera de 3 personnes. Avec un facteur de sécurité de 4, il n'a pas à être inquiet si un des occupants est un peu obèse sachant qu'en réalité, les câbles vont céder seulement si la masse de la nacelle et de ces occupants est 4 fois plus grande que 281 kg.

10.3 LA LIMITE D'ÉLASTICITÉ

Si la contrainte est inférieure à la contrainte ultime, l'objet ne cassera pas, mais la contrainte aura des effets. L'objet va étirer s'il y a une contrainte de tension et l'objet va se contracter s'il y a une contrainte de compression.



Il se peut que l'étirement ou la compression disparaissent quand on enlève la force de tension ou de compression. C'est ce qui arrive si la contrainte est inférieure à la limite d'élasticité. Si la contrainte est supérieure à la limite d'élasticité, la déformation faite par la contrainte sera permanente.

Déformation de l'objet

La déformation est permanente si la contrainte est supérieure à la limite d'élasticité.

$$\sigma > \sigma_{élasticité}$$

On a donc la situation suivante

Déformation temporaire

La contrainte est inférieure à la limite d'élasticité

Déformation permanente

La contrainte est entre la limite d'élasticité et la contrainte ultime

Cassure

La contrainte est supérieure à la contrainte ultime

Voici un tableau donnant la limite d'élasticité de quelques substances.

Substance	Limite d'élasticité (MPa)	Contrainte ultime Tension (MPa)	Contrainte ultime Compression (MPa)
Acier AISI 1020 (faible % de carbone)	310	448	448
Acier AISI 1045 (% moyen de carbone)	414	655	655
Acier AISI 1095 (% élevé de carbone)	572	979	979
Acier AISI 4140	441	621	621
Acier inoxydable 304	241	579	579
Acier inoxydable 316L	205	480	480
Fer forgé	193	324	324
Aluminium 3003-H14	145	152	
Aluminium 6061-T6	276	310	
Aluminium 7075-T6	462	538	
Titane Alliage TI-6AL-4V	880	950	970
Titane pur, Grade I	170	240	
Cobalt-Chrome MP35N 0 % cold reduction	414	931	
Cuivre	338	393	
Laiton (70/30 brass) (260 Brass OS 15 Temper)	150	365	205
Bois (valeur moyenne) (dur et sec, parallèle au grain)	57 (tension) 38 (compression)	60	50
Nylon Type 66	64	75,8	82,7
Polyéthylène (basse densité)	12	31	28
Polyéthylène (haute densité)	24,8	28	31
Polyéthylène (haute-densité, ultra-high molecular weight)	23,4	40	
Polypropylène	30,7	36,8	48,5
Polystyrène	43,9	44,9	90
Fil d'araignée (Nephila Clavipe)	200	850	

10.4 LA DÉFORMATION UNITAIRE

Quand un objet se déforme sous l'effet d'une contrainte, on mesure la déformation par la déformation unitaire. On définit cette déformation par

Déformation unitaire

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

En fait, la déformation unitaire nous donne le pourcentage d'élongation ou de compression de l'objet. Si une force de tension donne une déformation unitaire de 0,03, cela signifie que l'objet est maintenant 3 % plus long.

Exemple 10.4.1

Sous l'effet d'une force de tension, une tige de 5 m de long s'étire de 8 mm. Quelle est la déformation unitaire ?

La déformation unitaire est

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\Delta L}{L} \\ &= \frac{0,008m}{5m} \\ &= 0,0016\end{aligned}$$

Ce qui signifie que la tige s'est allongée de 0,16 %.

Exemple 10.4.2

Une tige a initialement une longueur de 50 cm. Quand on applique une force de compression, la tige a une longueur de 49,4 cm. Quelle est la déformation unitaire de la tige ?

La variation de longueur de la tige est

$$\Delta L = 50cm - 49,4cm = 0,6cm$$

La déformation unitaire est donc

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\Delta L}{L} \\ &= \frac{0,006m}{0,5m} \\ &= 0,012\end{aligned}$$

Ce qui signifie que la tige s'est comprimée de 1,2 %.

Exemple 10.4.3

Une tige a initialement une longueur de 1,3 m. Quand on applique une force de compression, la déformation unitaire est de 0,007. Quelle est la longueur de la tige quand la force de compression est appliquée ?

Avec la déformation unitaire, on trouve le changement de longueur

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$
$$0,007 = \frac{\Delta L}{1,3m}$$
$$0,007 \cdot 1,3m = \frac{\Delta L}{1,3m} \cdot 1,3m$$
$$0,007 \cdot 1,3m = \Delta L$$
$$0,007 \cdot 1,3m = 0,0091m$$

Puisque c'est une force de compression, la tige est donc 9,1 mm plus courte quand la force de compression s'applique. La longueur de la tige est donc

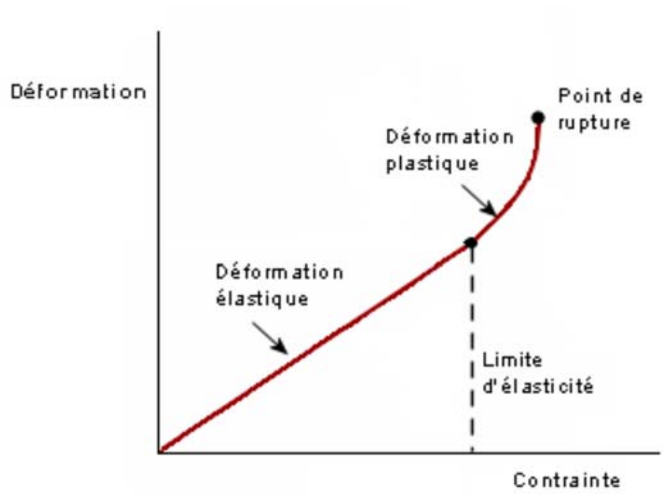
$$L = 1,3m - 0,0091m = 1,2909m$$

Ne vous attendez pas à voir de valeur très élevée de déformation unitaire. Une valeur de $\varepsilon = 1$ en tension serait vraiment formidable puisqu'elle signifierait que l'augmentation de longueur est de 100 % et que l'objet serait maintenant 2 fois plus long sous l'effet de la force de tension. En fait, aucun solide ne peut atteindre une telle déformation sans se rompre. Une déformation unitaire de 0,1 est pas mal le maximum qu'on peut atteindre avec des substances qui peuvent s'étirer beaucoup avant de casser, comme les fils d'araignée.

10.5 LE LIEN ENTRE LA CONTRAINTE ET LA DÉFORMATION UNITAIRE

Graphique de déformation unitaire en fonction de la contrainte

Si on fait le graphique de la déformation unitaire en fonction de la contrainte pour une substance, on obtient un graphique qui ressemble à celui-ci.



phyexpdoc.script.univ-paris-diderot.fr/projets_/sites_01_02_1/rebond/Theorie.html

On voit que pour des contraintes inférieures à la limite d'élasticité, la déformation est proportionnelle à la contrainte. Si la contrainte double, la déformation unitaire double aussi. On dit qu'il y a alors une relation linéaire (puisqu'il y a une ligne sur le graphique) entre la contrainte et la déformation.

Au-delà de la limite d'élasticité, la déformation unitaire commence à augmenter plus rapidement avec la contrainte sur l'objet. Le tout s'arrête au point de rupture, quand la contrainte atteint la contrainte ultime de l'objet.

Ce qui nous intéressera ici est le calcul de la déformation unitaire quand on est dans la zone de déformation élastique.

La formule

La déformation unitaire d'un objet dans la zone de déformation élastique dépend uniquement de deux facteurs. Ces facteurs sont

1- La contrainte sur l'objet
2- La composition de l'objet

Si on est en dessous de la limite d'élasticité, la relation entre la déformation unitaire et la contrainte est

Déformation unitaire selon la contrainte de compression ou de tension

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Le module de Young

Dans cette formule, E porte le nom de *module de Young* et sa valeur dépend de la composition de l'objet. Cela signifie que sur le graphique de la déformation unitaire en fonction de la contrainte, la pente est égale à $1/E$.

Les substances qui s'étirent ou qui se compriment facilement ont donc des valeurs de E plus petite.

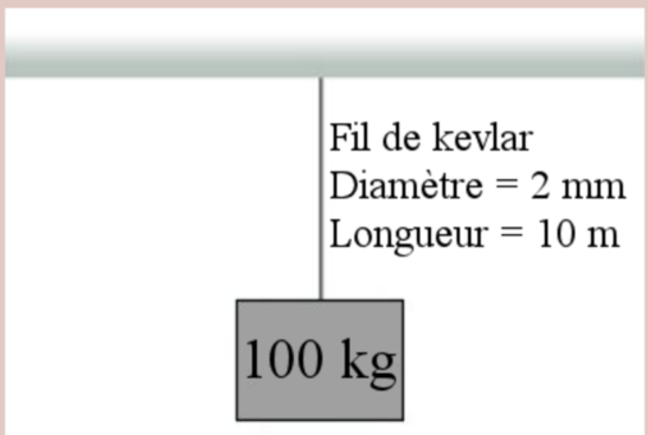
Voici la valeur du module de Young pour quelques substances.

Substance	Module de Young (E) (GPa)
Acier AISI 1020 (faible % de carbone)	207
Acier AISI 1045 (% moyen de carbone)	207
Acier AISI 1095 (% élevé de carbone)	207
Acier AISI 4140	207
Acier inoxydable 304 (Stainless steel 304)	190
Acier inoxydable 316L (stainless steel 316L)	200
Fer forgé	193
Fonte classe 20	76
Fonte classe 40	110
Fonte classe 60	131
Aluminium 3003-H14	69
Aluminium 6061-T6	69
Aluminium 7075-T6	72
Titane Alliage TI-6AL-4V	114
Titane Pure, Grade I	105
Cobalt-Chrome MP35N 0 % cold reduction	233
Cuivre	110
Laiton (70/30 brass) (260 Brass OS 15 Temper)	110
Bois (valeur moyenne) (dur et sec, parallèle au grain)	12
Nylon Type 66	2,76
Copolymère Acétal	2,6
Polycarbonate (Acrylonitrile Butadiene Styrene = ABS)	2,5
Polyéthylène Basse densité	0,23
Polyéthylène (haute densité)	1,1
Polyéthylène (haute-densité, ultra-high molecular weight)	1,17

Polypropylène	1,38
Polyvinyl Chloride (PVC) Blanc type 1 groupe 1	2,6
Polyméthylmetacrylate (Acrylic) (PMMA) (plexiglas)	3,10
Polystyrène	3,00
Kevlar 29	70
Spectra 2000	124
Verre (pyrex 7740)	63
Fil d'araignée (Nephila Clavipe)	12,71
Os	10-20
Tendon	1,0

Exemple 10.5.1

De combien étire ce fil de Kevlar quand il supporte cette masse de 100 kg ?



La tension du câble est égale au poids du bloc, donc à 980 N.

L'aire de la section du câble est égale à l'aire d'un cercle de 2 mm de diamètre

$$\begin{aligned} A &= \pi\left(0{,}001m\right)^2 \\ &= 3{,}1416\times10^{-6}m^2 \end{aligned}$$

La contrainte de tension sur le fil est donc

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F}{A} \\ &= \frac{980N}{3{,}1416\times10^{-6}m^2} \\ &= 3{,}119\times10^{8}Pa \end{aligned}$$

On sait que le fil ne casse pas, car la contrainte ultime du Kevlar et de 2929 MPa, alors que la contrainte est de 311,9 MPa.

Malheureusement, je n'ai pas trouvé la limite d'élasticité du Kevlar, mais comme on est bien en deçà de la contrainte ultime, on peut supposer que notre contrainte est inférieure à la limite d'élasticité. On peut donc utiliser notre formule donnant le lien entre la déformation unitaire et la contrainte pour trouver la déformation unitaire. Sachant que le module de Young du Kevlar est de 70 GPa, la déformation unitaire est

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{\sigma}{E} \\
&= \frac{3,119 \times 10^8 Pa}{70 \times 10^9 Pa} \\
&= 0,004456
\end{aligned}$$

On peut finalement trouver l'élongation du fil avec

$$\begin{gathered}
\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \\
0,004456 = \frac{\Delta L}{10m} \\
0,004456 \cdot 10m = \frac{\Delta L}{10m} \cdot 10m \\
0,004456 \cdot 10m = \Delta L \\
0,04456m = \Delta L
\end{gathered}$$

L'allongement du fil est donc de 4,456 cm.

Exemple 10.5.2

La prothèse de Gontran est fabriquée en aluminium 3003 H-14. La prothèse est une simple tige pleine avec une section circulaire ayant un diamètre de 4 cm et une longueur de 20 cm. De combien rapetisse la tige si Gontran met tout son poids ainsi que le poids du vélo dur sa prothèse ? Gontran a une masse de 75 kg et son vélo a une masse de 10 kg.

www.lambertsoandp.com

La force maximale que la tige doit supporter est toujours égale au poids du vélo et de Gontran. On a donc

$$F_{\max} = 735N + 98N = 833N$$

L'aire de la section est l'aire d'un cercle de 4 cm de diamètre

$$\begin{aligned} A &= \pi\left(0,02m\right)^2 \\ &= 1,257\times10^{-3}m^2 \end{aligned}$$

La contrainte sur la tige est donc de

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F}{A} \\ &= \frac{833N}{1,257\times10^{-3}m^2} \\ &= 6,629\times10^5 Pa \end{aligned}$$

On est bien deçà de la contrainte ultime de compression de l'aluminium. (On n'a pas la valeur dans le tableau, mais on a la contrainte ultime de tension qui vaut

152 MPa. Souvent, pour les métaux, les valeurs de contrainte ultime de tension et de compression sont du même ordre de grandeur et on peut supposer que la contrainte ultime de compression est au moins de 100 MPa. Ici, avec une contrainte de 0,6629 MPa, on est très loin de la contrainte ultime et le tuyau ne casse pas.)

Comme notre contrainte est inférieure à la limite d'élasticité (qui est de 145 MPa), on peut trouver la déformation unitaire en utilisant le module de Young de l'aluminium 3003 H-14 qui est de 69 GPa. On a alors

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{\sigma}{E} \\
&= \frac{6,629\times 10^{5}\,Pa}{69\times 10^{9}\,Pa} \\
&= 9,607\times 10^{-6}
\end{aligned}$$

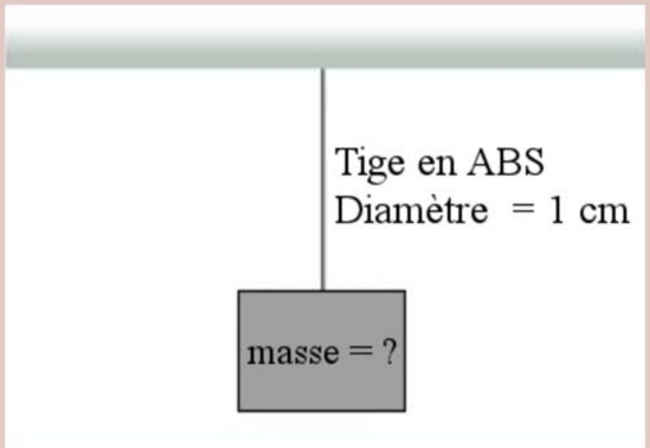
On trouve finalement le changement de longueur

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{\Delta L}{L} \\
9,607\times 10^{-6} &= \frac{\Delta L}{0,2m} \\
9,607\times 10^{-6}\cdot 0,2m &= \frac{\Delta L}{0,2m}\cdot 0,2m \\
9,607\times 10^{-6}\cdot 0,2m &= \Delta L \\
1,921\times 10^{-6}m &= \Delta L
\end{aligned}$$

La tige rapetisse donc de 0,001921 mm. Ça n'a pas vraiment d'impact.

Exemple 10.5.3

Quand on attache un objet à une tige en ABS de 1 cm de diamètre et de 2 m de long, la tige allonge de 1,2 mm. Quelle est la masse de l'objet ?



La déformation unitaire de la tige est

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\Delta L}{L} \\ &= \frac{0,0012m}{2m} \\ &= 0,0006 \end{aligned}$$

Avec un module de Young de 2,5 GPa pour l'ABS, la contrainte est donc de

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma}{E} \\ 0,0006 &= \frac{\sigma}{2,5\times10^9 Pa} \\ 0,0006\cdot 2,5\times10^9 Pa &= \frac{\sigma}{2,5\times10^9 Pa}\cdot 2,5\times10^9 Pa \\ 0,0006\cdot 2,5\times10^9 Pa &= \sigma \\ 1,5\times10^6 Pa &= \sigma \end{aligned}$$

Puisque l'aire de la section est de

$$A = \pi\left(0,005m\right)^2 = 7,854\times10^{-5} m^2$$

on peut trouver la tension de la corde avec

$$\sigma = \frac{F}{A}$$
$$1,5\times 10^6 Pa = \frac{F}{7,854\times 10^{-5} m^2}$$
$$1,5\times 10^6 Pa \cdot 7,854\times 10^{-5} m^2 = \frac{F}{7,854\times 10^{-5} m^2}\cdot 7,854\times 10^{-5} m^2$$
$$1,5\times 10^6 Pa \cdot 7,854\times 10^{-5} m^2 = F$$
$$117,8N = F$$

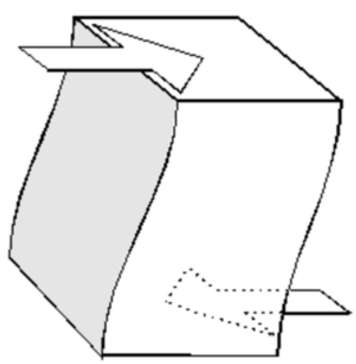
Puisque cette tension est égale au poids de l'objet, la masse est

$$P = m\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}$$
$$117,8N = m\cdot 9,8\tfrac{N}{kg}$$
$$\frac{117,8N}{9,8\frac{N}{kg}} = \frac{m\cdot 9,8\frac{N}{kg}}{9,8\frac{N}{kg}}$$
$$\frac{117,8N}{9,8\frac{N}{kg}} = m$$
$$m = 12,02kg$$

10.6 LE CISAILLEMENT

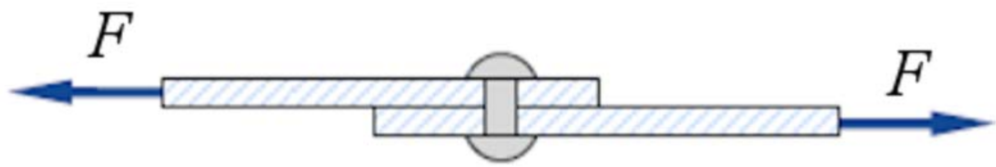
Qu'est-ce que le cisaillement ?

Il y a cisaillement quand il y a deux forces opposées qui agissent sur un objet, mais qui ne sont pas alignées l'une sur l'autre.



www.physicsforums.com/threads/mechanics-of-materials-shear-and-compression.558816/

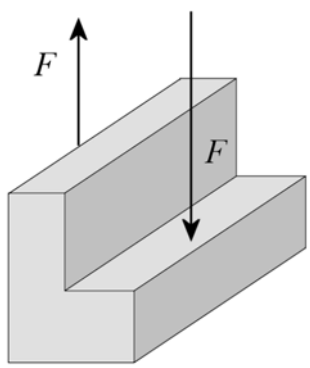
Dans la situation suivante, un boulon tente de retenir deux plaques qui subissent des forces dans des directions opposées.



www.mathalino.com/reviewer/mechanics-and-strength-of-materials/shear-stress

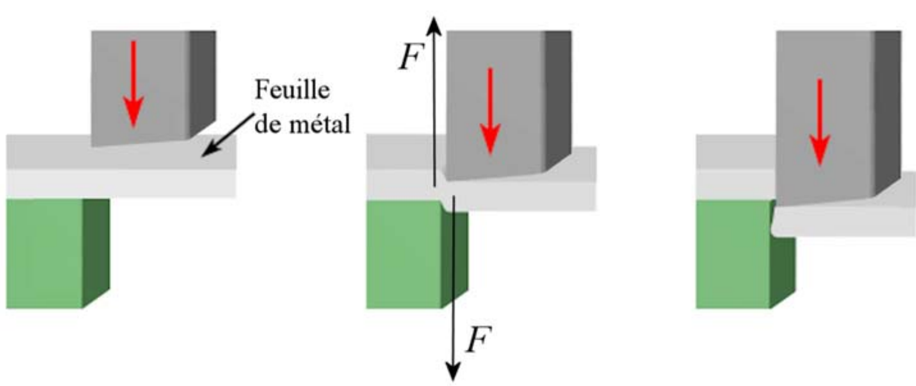
La partie supérieure du boulon subit une force vers la gauche alors que la partie inférieure du boulon subit une force vers la droite. Le boulon est donc soumis à un cisaillement

C'est aussi le cas de ce support fixé à un mur.



La flèche vers le bas correspond au poids fait par l'objet supporté et la flèche vers le haut correspond à la force qui retient le support sur le mur. Avec ces deux forces opposées qui ne sont pas alignées l'une avec l'autre, le support est soumis à un cisaillement.

Ce sont aussi des forces de cisaillement qui permettent de couper une feuille de métal avec une presse.



www.custompartnet.com/wu/sheet-metal-shearing

En fait, quand on utilise des ciseaux, on coupe les objets par cisaillement.

La contrainte de cisaillement

Tout comme les contraintes de compression et de tension, la contrainte de cisaillement se calcule avec la formule suivante.

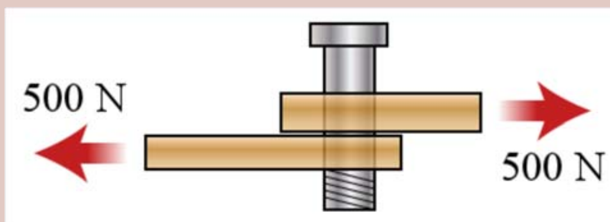
Contrainte (ou stress)

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

On trouve l'aire avec le même truc qu'auparavant. L'aire correspond à l'aire qui serait exposée s'il y avait rupture à cause du cisaillement. On doit imaginer que l'objet se brise à cause du cisaillement et calculer l'aire de la zone de rupture.

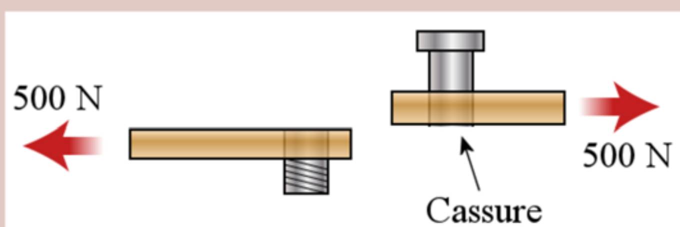
Exemple 10.6.1

Quelle est la contrainte de cisaillement sur ce boulon si le boulon a un diamètre de 3 mm ?



commons.wikimedia.org/wiki/File:Bolt-in-shear.svg

Il est assez clair qu'on doit prendre F = 500 N dans la formule de la contrainte. Pour trouver l'aire, on doit imaginer que le boulon casse sous l'effet de la contrainte.



La cassure est un cercle de 3 mm de diamètre. L'aire est donc de

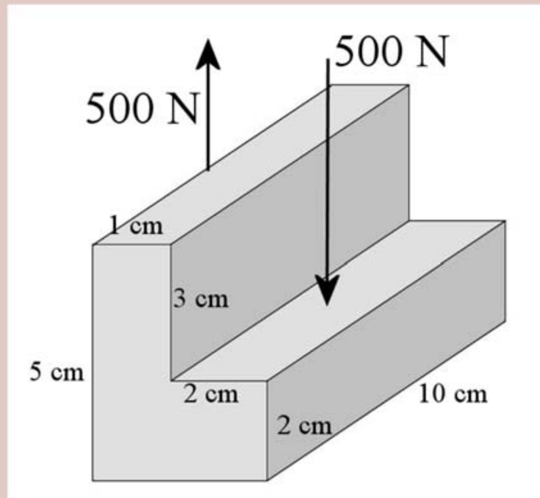
$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ &= \pi \left(0{,}0015m\right)^2 \\ &= 7{,}069 \times 10^{-6} m \end{aligned}$$

La contrainte de cisaillement est donc de

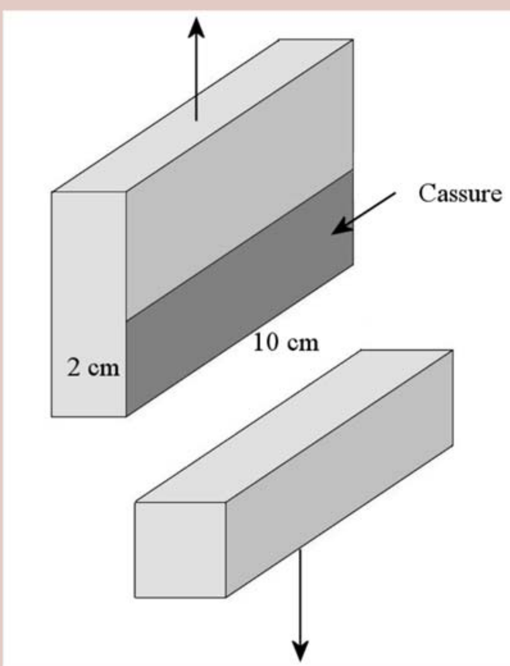
$$\sigma = \frac{F}{A}$$
$$= \frac{500N}{7,069 \times 10^{-6} m^2}$$
$$= 7,074 \times 10^{7} Pa$$

Exemple 10.6.2

Quelle est la contrainte de cisaillement sur ce support ?



Il est assez clair qu'on doit prendre F = 500 N dans la formule de la contrainte. Pour trouver l'aire, on doit imaginer que le support casse sous l'effet de la contrainte. On aurait alors les deux morceaux suivants.



L'aire de la cassure est donc de

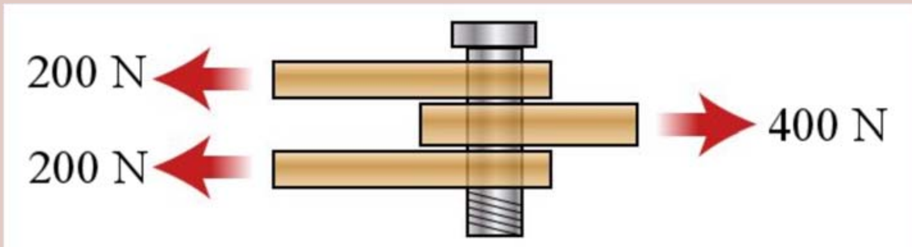
$$A = 0,02m \cdot 0,1m$$
$$= 0,002m^2$$

La contrainte de cisaillement est donc de

$$\sigma = \frac{F}{A}$$
$$= \frac{500N}{0,002m^2}$$
$$= 250\,000 Pa$$

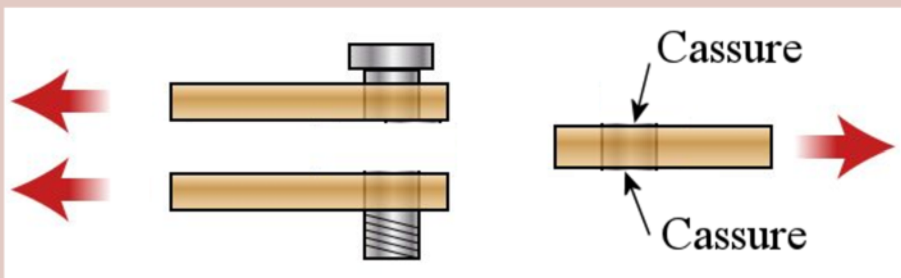
Exemple 10.6.3

Quelle est la contrainte de cisaillement sur ce boulon qui a un diamètre de 4 mm ?



commons.wikimedia.org/wiki/File:Bolt-in-shear.svg

Ici, les forces dans chaque direction est de 400 N et on prendra donc F = 400 N. Pour trouver l'aire, on doit imaginer que le boulon casse sous l'effet de la contrainte. On aurait alors les morceaux suivants.



Il y aura deux cassures, chacune ayant la forme d'un cercle de 4 mm de diamètre. L'aire de la cassure est donc de

$$\begin{aligned} A &= 2\cdot\pi r^2 \\ &= 2\cdot\pi\cdot\left(0,002m\right)^2 \\ &= 2,513\times10^{-5}m^2 \end{aligned}$$

La contrainte de cisaillement est donc de

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F}{A} \\ &= \frac{400N}{2,513\times10^{-5}m^2} \\ &= 1,592\times10^{7}Pa \end{aligned}$$

La contrainte ultime de cisaillement

Un objet va céder en cisaillement si la contrainte dépasse une valeur appelée *la contrainte ultime*, dont la valeur dépend de la substance.

Rupture de l'objet

L'objet se rompt si

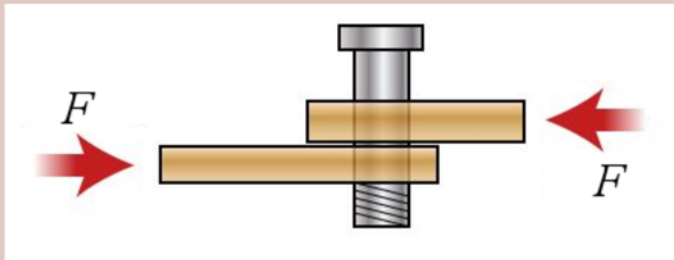
$$\sigma > \sigma_{ultime}$$

Voici la valeur de la contrainte ultime de cisaillement pour quelques substances.

Substance	Contrainte ultime de cisaillement (MPa)
Acier AISI 1020 (faible % de carbone)	345
Acier AISI 1045 (% moyen de carbone)	483
Acier AISI 1095 (% élevé de carbone)	724
Fer forgé	262
Fonte classe 20	221
Fonte classe 40	379
Fonte classe 60	448
Aluminium 3003-H14	97
Aluminium 6061-T6	207
Aluminium 7075-T6	317
Titane Alliage TI-6AL-4V	550
Cuivre	255
Laiton (70/30 brass) (260 Brass OS 15 Temper)	240
Bois (valeur moyenne) (dur et sec, parallèle au grain)	6
Nylon Type 66	69
Copolymère Acétal	52
Polycarbonate (Acrylonitrile Butadiene Styrene = ABS)	69
Polyéthylène Basse densité	16,5
Polyéthylène (haute densité)	23,4
Polyéthylène (haute-densité, ultra-high molecular weight)	24
Polypropylène	26
Polyméthylmetacrylate (Acrylic) (PMMA) (plexiglas)	62

Exemple 10.6.4

Ce boulon en fer forgé a un diamètre de 4 mm. Quelle force minimale doit-on appliquer pour qu'il casse ?



commons.wikimedia.org/wiki/File:Bolt-in-shear.svg

Si on veut que le boulon casse, on doit au moins avoir une contrainte égale à la contrainte ultime de cisaillement. Pour le fer forgé, cette contrainte minimale est de 262 MPa. On aura donc

$$\sigma_{\min} = \frac{F_{\min}}{A}$$

$$262\times 10^6 Pa = \frac{F_{\min}}{A}$$

L'aire correspond à l'aire d'un cercle de 4 mm de diamètre (c'est l'aire de la cassure qu'on aurait si le boulon cassait)

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ &= \pi\left(0,002m\right)^2 \\ &= 1,257\times 10^{-5} m \end{aligned}$$

On a donc

$$262\times 10^6 Pa = \frac{F_{\min}}{1,257\times 10^{-5} m^2}$$

Il ne reste qu'à isoler la force.

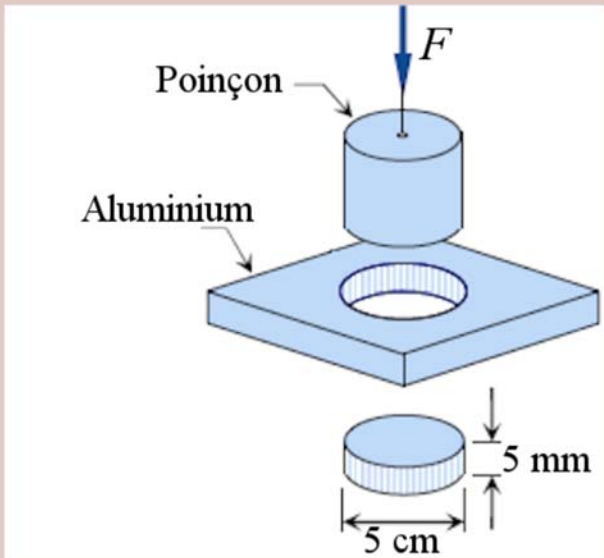
$$262\times 10^6 Pa \cdot 1,257\times 10^{-5} m^2 = \frac{F_{\min}}{1,257\times 10^{-5} m^2}\cdot 1,257\times 10^{-5} m^2$$

$$262\times 10^6 Pa \cdot 1,257\times 10^{-5} m^2 = F_{\min}$$

$$3292 N = F_{\min}$$

Exemple 10.6.5

Avec quelle force le poinçon doit-il pousser pour perforer cette plaque d'aluminium 6061-T6 de 5 mm d'épaisseur ?



www.mathalino.com/reviewer/mechanics-and-strength-of-materials/solution-to-problem-115-shear-stress

Si on veut que le trou se fasse, on doit au moins avoir une contrainte égale à la contrainte ultime de cisaillement. Pour ce type d'aluminium, cette contrainte minimale est de 207 MPa. On aura donc

$$\sigma_{min} = \frac{F_{min}}{A}$$

$$207 \times 10^6 Pa = \frac{F_{min}}{A}$$

L'aire correspond à l'aire de la mince bande qui forme la paroi de petit cercle qui a été poinçonnée. (C'est l'aire de la cassure qui, sur la figure, est représentée par des lignes verticales.) Dépliée, cette bande est un rectangle ayant une longueur égale à la circonférence du cercle et une hauteur égale à l'épaisseur de la plaque. L'aire est donc de

$$\begin{aligned} A &= (2\pi r) \cdot e \\ &= (2\pi \cdot 0,025m) \cdot 0,005m \\ &= 7,854 \times 10^{-4} m^2 \end{aligned}$$

On a donc

$$207\times10^6\,Pa=\frac{F_{\min}}{7{,}854\times10^{-4}\,m^2}$$

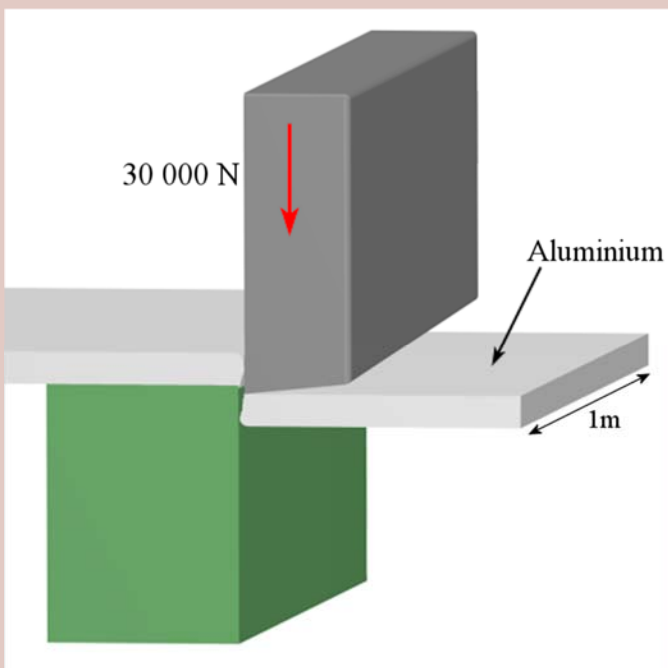
Il ne reste qu'à isoler la force.

$$207\times10^6\,Pa\cdot7{,}854\times10^{-4}\,m^2=\frac{F_{\min}}{7{,}854\times10^{-4}\,m^2}\cdot7{,}854\times10^{-4}\,m^2$$
$$207\times10^6\,Pa\cdot7{,}854\times10^{-4}\,m^2=F_{\min}$$
$$162\,577\,N=F_{\min}$$

Cette force est, en gros, l'équivalent d'un poids de 16 tonnes.

Exemple 10.6.6

Quelle est l'épaisseur maximale d'aluminium 6061-T6 peut-on couper avec cette presse si la feuille d'aluminium a une largeur de 1 m et que la force exercée par la presse est de 30 000 N



www.custompartnet.com/wu/sheet-metal-shearing

Si on veut que la coupure se fasse, on doit au moins avoir une contrainte égale à la contrainte ultime de cisaillement. Pour ce type d'aluminium, cette contrainte minimale est de 207 MPa. On aura donc

$$\sigma_{\min} = \frac{F}{A_{\max}}$$

$$207 \times 10^6 Pa = \frac{F}{A_{\max}}$$

Ici, on donne la force, qui est de 30 000 N.

L'aire correspond à l'aire de la coupure dans la feuille de métal. Cette coupure est un rectangle ayant une longueur de 1 mètre et une hauteur égale à l'épaisseur de la plaque. L'aire est donc de

$$A_{\max} = 1m \cdot e_{\max}$$

On a donc

$$207 \times 10^6 Pa = \frac{30\,000N}{1m \cdot e_{\max}}$$

Il ne reste qu'à isoler l'épaisseur.

$$207 \times 10^6 Pa = \frac{30\,000N}{1m \cdot e_{\max}}$$

$$207 \times 10^6 Pa \cdot e_{\max} = \frac{30\,000N}{1m \cdot e_{\max}} \cdot e_{\max}$$

$$207 \times 10^6 Pa \cdot e_{\max} = \frac{30\,000N}{1m}$$

$$207 \times 10^6 Pa \cdot e_{\max} = 30\,000 \tfrac{N}{m}$$

$$\frac{207 \times 10^6 Pa \cdot e_{\max}}{207 \times 10^6 Pa} = \frac{30\,000 \tfrac{N}{m}}{207 \times 10^6 Pa}$$

$$e_{\max} = \frac{30\,000 \tfrac{N}{m}}{207 \times 10^6 Pa}$$

$$e_{\max} = 0{,}000145m = 0{,}145mm$$

Évidemment, on peut aussi utiliser un facteur de sécurité en cisaillement. Par exemple, si on utilise un facteur de sécurité de 6, on aurait construit notre objet pour qu'elle puisse supporter une force 6 fois plus grande que ce qu'elle doit supporter.

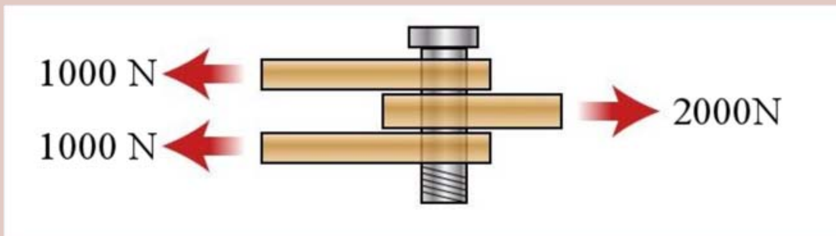
Facteur de sécurité

$$F_{ultime} = facteur \cdot F_{\max}$$

Le F_{ultime} est la force limite qu'on trouve avec la contrainte ultime alors que la force $F_{\max}$ est la force maximale que l'objet doit supporter.

Exemple 10.6.7

Quel doit être le diamètre de ce boulon en acier AISI 1095 pour qu'il puisse résister à ces forces des cisaillements si on utilise un facteur de sécurité de 10 ?



commons.wikimedia.org/wiki/File:Bolt-in-shear.svg

Avec un facteur de sécurité de 10, on va construire l'objet pour que la force ultime soit 10 fois plus grande que les forces indiquées sur la figure.

$$\begin{aligned} F_{ultime} &= facteur \cdot F_{\max} \\ &= 10 \cdot 2000N \\ &= 20\,000N \end{aligned}$$

Si le boulon casse, la contrainte doit être égale à la contrainte ultime de cisaillement. Pour ce type d'acier, cette contrainte minimale est de 724 MPa. On aura donc

$$\begin{aligned} \sigma_{ultime} &= \frac{F_{ultime}}{A} \\ 724 \times 10^6 Pa &= \frac{20\,000N}{A} \end{aligned}$$

L'aire doit donc être de

$$\begin{aligned} 724 \times 10^6 Pa &= \frac{20\,000N}{A} \\ 724 \times 10^6 Pa \cdot A &= \frac{20\,000N}{A} \cdot A \\ 724 \times 10^6 Pa \cdot A &= 20\,000N \\ \frac{724 \times 10^6 Pa \cdot A}{724 \times 10^6 Pa} &= \frac{20\,000N}{724 \times 10^6 Pa} \\ A &= \frac{20\,000N}{724 \times 10^6 Pa} \\ A &= 2,762 \times 10^{-5} m^2 \end{aligned}$$

L'aire correspond à l'aire de de la cassure qu'il y aurait si le boulon cassait. Dans ce cas, le boulon casserait en deux endroits, et l'aire de la cassure serait égale à deux fois l'aire d'un cercle. L'aire est donc de

$$A = 2 \cdot \pi r^2$$

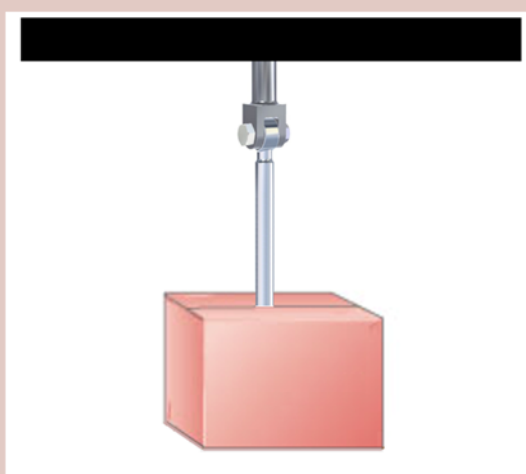
On a donc

$$\begin{aligned}
2\pi r^2 &= 2,762 \times 10^{-5} m^2 \\
\frac{2\pi r^2}{2\pi} &= \frac{2,762 \times 10^{-5} m^2}{2\pi} \\
r^2 &= \frac{2,762 \times 10^{-5} m^2}{2\pi} \\
r^2 &= 4,397 \times 10^{-6} m^2 \\
\sqrt{r^2} &= \sqrt{4,397 \times 10^{-6} m^2} \\
r &= \sqrt{4,397 \times 10^{-6} m^2} \\
r &= 2,097 \times 10^{-3} m \\
r &= 2,097 mm
\end{aligned}$$

Le diamètre étant égal à deux fois le rayon, le boulon doit donc avoir un diamètre de 4,194 mm.

Exemple 10.6.8

Quelle masse maximale peut-on accrocher à cette tige si le boulon dans la tige est fait de polycarbonate et qu'il a un diamètre de 1 cm ? On utilise un facteur de sécurité de 5.



www.epi-eng.com/mechanical_engineering_basics/stress_and_strain.htm

Si le boulon casse, la contrainte doit être égale à la contrainte ultime de cisaillement. Pour ce type de matériau, cette contrainte minimale est de 69 MPa. On aura donc

$$\sigma_{ultime} = \frac{F_{ultime}}{A}$$
$$69\times 10^6 Pa = \frac{F_{ultime}}{A}$$

L'aire correspond à l'aire de de la cassure qu'il y aurait si le boulon cassait. Dans ce cas, le boulon casserait en deux endroits, et l'aire de la cassure serait égale à deux fois l'aire d'un cercle. L'aire est donc de

$$\begin{aligned} A &= 2\cdot \pi r^2 \\ &= 2\cdot \pi \cdot (0,005m)^2 \\ &= 1,571\times 10^{-4} m^2 \end{aligned}$$

On trouve donc la force ultime avec

$$69\times 10^6 Pa = \frac{F_{ultime}}{A}$$
$$69\times 10^6 Pa = \frac{F_{ultime}}{1,571\times 10^{-4} m^2}$$
$$69\times 10^6 Pa\cdot 1,571\times 10^{-4} m^2 = \frac{F_{ultime}}{1,571\times 10^{-4} m^2}\cdot 1,571\times 10^{-4} m^2$$
$$69\times 10^6 Pa\cdot 1,571\times 10^{-4} m^2 = F_{ultime}$$
$$F_{ultime} = 10838N$$

Avec un facteur de sécurité de 5, on va construire l'objet pour que la force ultime soit 5 fois plus grande que la force maximale qui s'exercera sur le boulon.

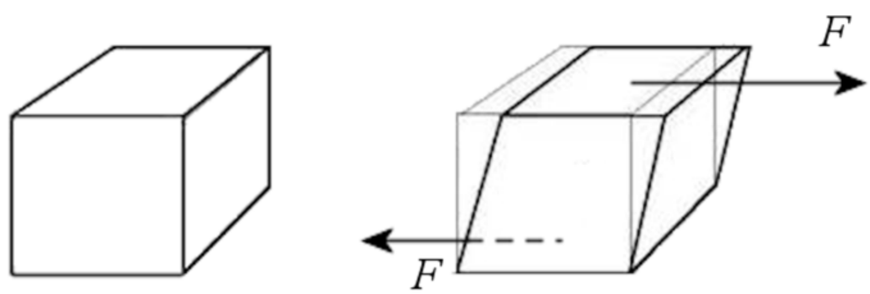
$$\begin{aligned} F_{ultime} &= facteur\cdot F_{\max} \\ 10838N &= 5\cdot F_{\max} \\ \frac{10838N}{5} &= \frac{5\cdot F_{\max}}{5} \\ \frac{10838N}{5} &= F_{\max} \\ F_{\max} &= 2168N \end{aligned}$$

Cette force correspond à une masse de

$$m \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg} = 2168N$$
$$\frac{m \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg}}{9{,}8\tfrac{N}{kg}} = \frac{2168N}{9{,}8\tfrac{N}{kg}}$$
$$m = \frac{2168N}{9{,}8\tfrac{N}{kg}}$$
$$m = 221{,}2kg$$

La déformation due à la contrainte de cisaillement

Pour des contraintes inférieures à la contrainte ultime de cisaillement, l'objet se déforme de la façon montrée sur la figure.



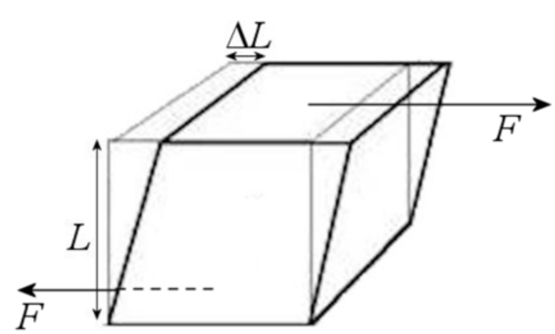
www.emse.fr/~bouchardon/enseignement/processus-naturels/up1/web/la-terre-est-ronde/terre-ronde-geodynamique-0302-geophysique-seismicite.htm

On définit encore la déformation unitaire par la formule suivante

Déformation unitaire

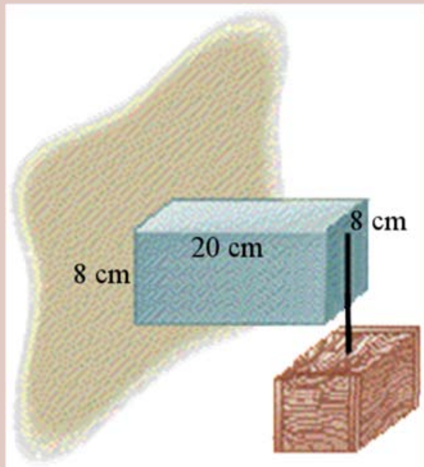
$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

où ΔL et L sont les mesures suivantes. La longueur L est toujours la distance entre les deux forces.



Exemple 10.6.9

Quand on attache une caisse à l'extrémité d'un bloc de fer, le bout du bloc de fer descend de 0,8 mm. Quelle est la déformation unitaire du morceau de fer ?

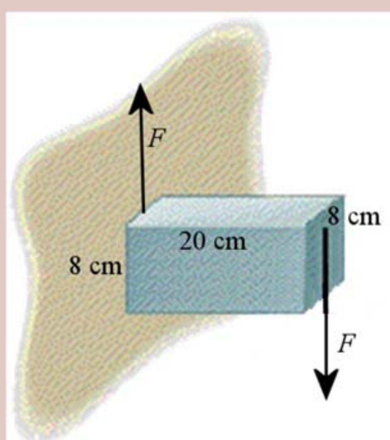


www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/drawing-shows-154-kg-crate-hangingfrom-end-steel-bar-length-bar-012-m-cross-sectional-area-q715603

La déformation unitaire est de

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Il est assez évident que la baisse du bout de la tige correspond à la longueur ΔL. On a donc ΔL = 0,8 mm. La longueur L est la distance entre les forces. On a une force vers le bas faite par la corde reliée à la caisse, et une force vers le haut faite par le mur qui retient le bloc de fer.

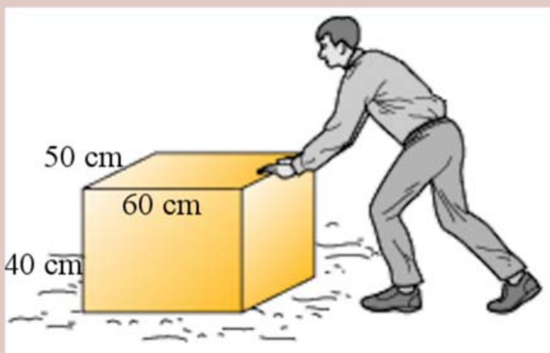


La distance entre les forces est de L = 20 cm. La déformation unitaire est donc de

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$
$$= \frac{0,8\times 10^{-3}m}{0,2m}$$
$$= 0,004$$

Exemple 10.6.10

Quand Carlos pousse horizontalement sur le dessus la boite pour qu'elle se déplace à vitesse constante malgré la friction entre le sol et la boite, elle subit une déformation unitaire de 0,0003. Quelle est la valeur de ΔL ?

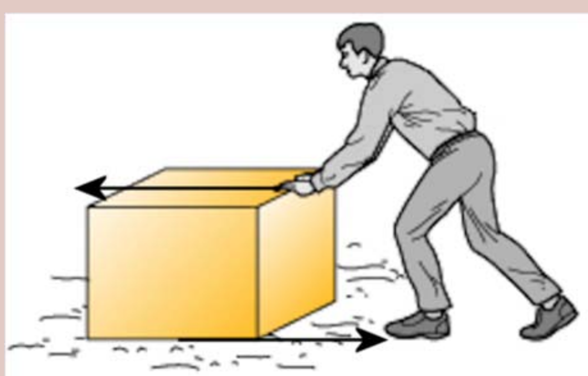


www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/baggage-handler-airport-applies-constant-horizontal-forcewith-magnitude-push-box-mass-acro-q371251

On a

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Les forces de cisaillement dur la boite sont dues à la poussée de Carlos et à la friction entre la boite et le sol.



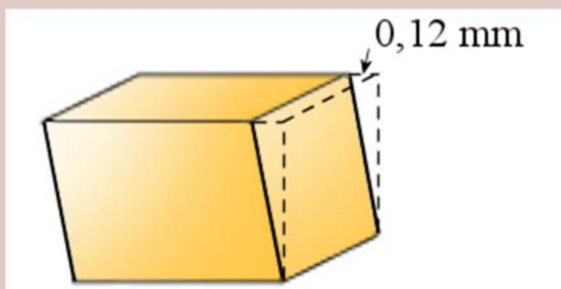
La distance L est la distance entre les forces, ce qui correspond à la distance entre le dessus et le dessous de la boite. On a donc L = 0,4 m. On ainsi

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$
$$0,0003 = \frac{\Delta L}{0,4m}$$

Si on isole ΔL, on a

$$0,0003 \cdot 0,4m = \frac{\Delta L}{0,4m} \cdot 0,4m$$
$$0,0003 \cdot 0,4m = \Delta L$$
$$\Delta L = 0,00012m = 0,12mm$$

Le dessus de la boite n'est donc pas exactement au-dessus du dessous de la boite, il est décalé de 0,12 mm vers la gauche par rapport au dessous de la boite.



Le lien entre la déformation unitaire et la contrainte de cisaillement

Tout comme avec la compression et la tension, il y a un lien entre la contrainte de cisaillement. Ce lien est

Déformation unitaire selon la contrainte de cisaillement

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{G}$$

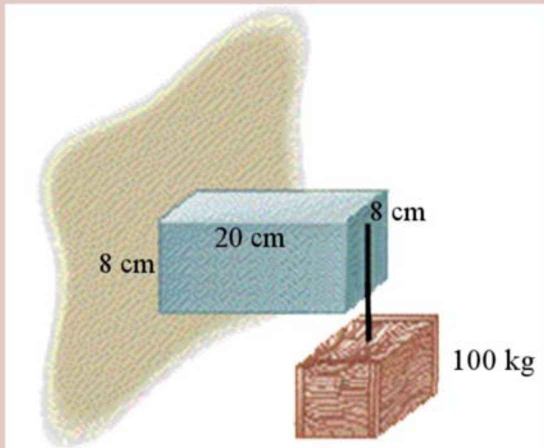
Où G est le module de cisaillement.

Le tableau suivant vous donne la valeur du module de cisaillement pour quelques substances

Substance	Module de cisaillement (GPa)
Acier AISI 1020 (faible % de carbone)	79
Acier AISI 1045 (% moyen de carbone)	79
Acier AISI 1095 (% élevé de carbone)	79
Acier AISI 4140	79
Acier inoxydable 304 (Stainless steel 304)	76
Fer forgé	69
Fonte classe 20	31
Fonte classe 40	38
Fonte classe 60	55
Aluminium 3003-H14	26
Aluminium 6061-T6	26
Aluminium 7075-T6	28
Titane Alliage TI-6AL-4V	44
Titane Pure, Grade I	45
Cobalt-Chrome MP35N 0 % cold reduction	83
Cuivre	46
Laiton (70/30 brass) (260 Brass OS 15 Temper)	40
Nylon Type 66	0,52
Polyméthylmetacrylate (Acrylic) (PMMA) (plexiglas)	1,4
Kevlar 29	2,17
Verre (pyrex 7740)	26
Fil d'araignée (Nephila Clavipe)	2,38
Os	80

Exemple 10.6.11

De quelle distance descend le bout d'un bloc de fer forgé ayant les dimensions montrées sur la figure quand on y attache une caisse de 100 kg ?



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/drawing-shows-154-kg-crate-hangingfrom-end-steel-bar-length-bar-012-m-cross-sectional-area-q715603

La force exercée par la caisse est

$$\begin{aligned} F &= m \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg} \\ &= 100kg \cdot 9{,}8\tfrac{N}{kg} \\ &= 980N \end{aligned}$$

Pour calculer la contrainte, il faut l'aire de la cassure qu'il y aurait si le bloc cassait. Cette aire est égale à l'aire du bout du bloc de fer.

$$\begin{aligned} A &= 0{,}08m \cdot 0{,}08m \\ &= 0{,}0064m^2 \end{aligned}$$

La contrainte est donc de

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F}{A} \\ &= \frac{980N}{0{,}0064m^2} \\ &= 153\,125Pa \end{aligned}$$

On sait alors qu'il n'y a pas de rupture, puisque cette contrainte est bien inférieure à la contrainte ultime de cisaillement du fer forgé qui est de 262 MPa.

Avec le module de cisaillement du fer forgé (69 GPa), on peut trouver la déformation unitaire.

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\sigma}{G}\\ &= \frac{153\,125 Pa}{69\times 10^9 Pa}\\ &= 2{,}219\times 10^{-6}\end{aligned}$$

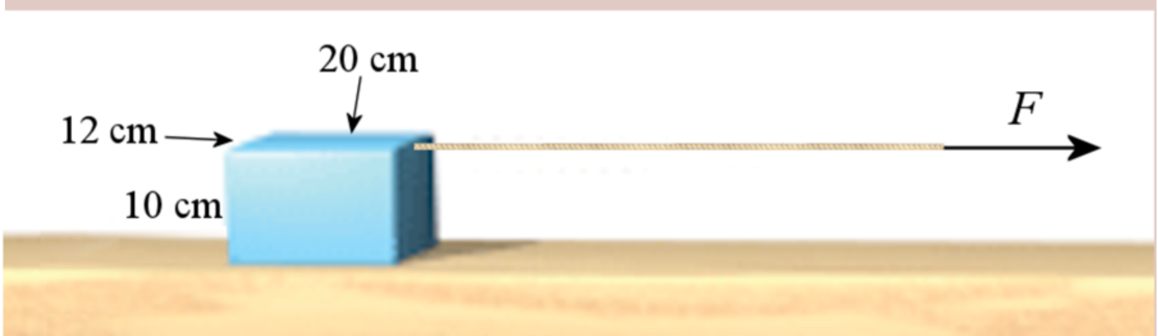
Finalement, on trouve le déplacement du bout du bloc de fer avec

$$\begin{gathered}\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}\\ 2{,}219\times 10^{-6} = \frac{\Delta L}{0{,}2m}\\ 2{,}219\times 10^{-6}\cdot 0{,}2m = \frac{\Delta L}{0{,}2m}\cdot 0{,}2\\ 2{,}219\times 10^{-6}\cdot 0{,}2m = \Delta L\\ \Delta L = 4{,}438\times 10^{-7} m\end{gathered}$$

Cette baisse est d’à peine 0,4438 µm.

Exemple 10.6.12

Le bloc sur la figure est fixé solidement à la planche de bois. Quand on tire avec une force F dans la direction montrée sur la figure, le dessus du bloc se déplace de 5 µm vers la droite. Quelle est la grandeur de la force si le bloc est en plexiglas ?



www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/physics-archive-2010-november-30

La déformation unitaire est de

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$
$$= \frac{5 \times 10^{-6} m}{0,1m}$$
$$= 5 \times 10^{-5}$$

Avec le module de cisaillement du plexiglas (1,4 GPa), on peut trouver la contrainte de cisaillement.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{G}$$
$$5 \times 10^{-5} \cdot 1,4 \times 10^{9} Pa = \frac{\sigma}{1,4 \times 10^{9} Pa} \cdot 1,4 \times 10^{9} Pa$$
$$5 \times 10^{-5} \cdot 1,4 \times 10^{9} Pa = \sigma$$
$$\sigma = 7 \times 10^{4} Pa$$

Pour calculer la force, il faut l'aire de la cassure qu'il y aurait si le bloc cassait. Cette aire est égale à l'aire du dessus du bloc de plexiglas.

$$A = 0,12m \cdot 0,2m$$
$$= 0,024m^2$$

On a donc

$$\sigma = \frac{F}{A}$$
$$7 \times 10^{4} Pa = \frac{F}{0,024m^2}$$
$$7 \times 10^{4} Pa \cdot 0,024m^2 = \frac{F}{0,024m^2} \cdot 0,024m^2$$
$$7 \times 10^{4} Pa \cdot 0,024m^2 = F$$
$$F = 1680N$$

RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS

Contrainte (ou stress)

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Unité de la contrainte (ou stress)

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

Rupture de l'objet

L'objet se rompt si

$$\sigma > \sigma_{ultime}$$

Facteur de sécurité

$$F_{ultime} = facteur \cdot F_{\max}$$

Déformation de l'objet

La déformation est permanente si la contrainte est supérieure à la limite d'élasticité.

$$\sigma > \sigma_{élasticité}$$

Déformation unitaire selon la contrainte de compression ou de tension

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Déformation unitaire selon la contrainte de cisaillement

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{G}$$

EXERCICES

10.1 La contrainte

1. Calculez la contrainte de compression dans un pilier carré de section carré, de 100 mm de côté, soumis à une charge de 90 kN.

2. Il est indiqué par le manufacturier que l'on peut suspendre au maximum un poids de 50 livres à un fil de pêche de 1/16 pouce de diamètre. Quelle est alors la contrainte dans le fil ?

10.2 La contrainte ultime

3. Quelle est la force de tension maximale que l'on peut exercer sur un câble d'acier (AISI 1095) de 5 mm de diamètre ?

10.4 La déformation unitaire

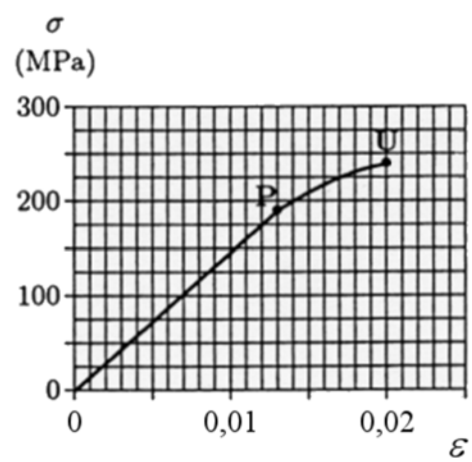
4. Un câble de 105 m mesure 50 mm de plus quand il supporte une charge de 4500 N. Quelle est sa déformation unitaire ?

5. Une poutre de 5 m subit une déformation unitaire de 0,002 quand on la comprime avec une certaine force. De combien de mm est-elle plus courte ?

10.5 Le lien entre la contrainte et la déformation unitaire

6. Voici la courbe contrainte-déformation d'un matériau en tension.

a) Quelle est la limite d'élasticité du matériau ?
b) Quelle est la contrainte ultime du matériau ?
c) Quel est le module de Young de ce matériau ?



7. Un câble d’acier (AISI 1095) de 2 cm de diamètre et de 25 m de longueur supporte un poids de 50 kN.

a) Calculez la contrainte s’exerçant sur le fil
b) Calculez la déformation unitaire.
c) Calculez l’élongation du fil.
d) Le câble reviendra-t-il à sa longueur initiale si on enlève le poids que supporte le câble ?

8. Un cylindre plein en aluminium (6061-T6) de 80 mm de long doit subir une tension de 3 000 N.

a) Quel doit être le diamètre minimal de la tige pour qu’elle ne se déforme pas de façon permanente ?
b) Quel doit être le diamètre minimal de la tige pour qu’il n’y ait pas de rupture ?

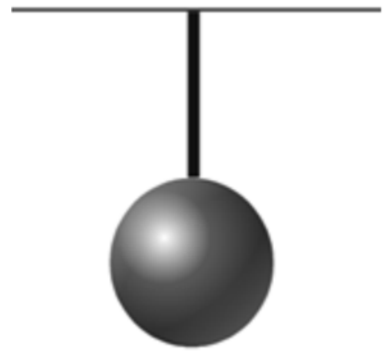
9. Un ascenseur est suspendu par un câble d’acier (AISI 4140) de ¾ pouce de diamètre. Quand l’ascenseur est au premier étage, le câble a une longueur de 80 pieds. L’ascenseur vide à une masse de 500 kg.

a) Quelle est la contrainte faite sur le câble ?
b) Quelle est la déformation unitaire du câble ?
c) De combien raccourcirait le câble s’il n’avait pas à soutenir l’ascenseur ?
d) Quelle est la force maximale que peut soutenir ce câble ?
e) Combien de personnes (de 70 kg) au maximum peuvent embarquer dans l’ascenseur si on veut qu’il y ait un coefficient de sécurité de 10 ?

10. Nous allons calculer la hauteur maximale d’une colonne de brique de manière à ce que la brique du bas ne se brise pas à cause du poids des briques au-dessus d’elle. La brique est haute de 4 cm, longue de 24 cm, large de 8 cm et une masse de 1,5 kg. La contrainte de compression ultime de la brique est de 1,7 MPa.

a) Calculer le poids d’une brique.
b) Calculer la section d’une brique
c) Calculer la force de compression maximale que peut soutenir une brique.
d) Calculer le nombre de briques nécessaire qu’il faut empiler pour atteindre la force maximale de compression de la brique du bas.
e) Calculer la hauteur que représente ce nombre de briques.

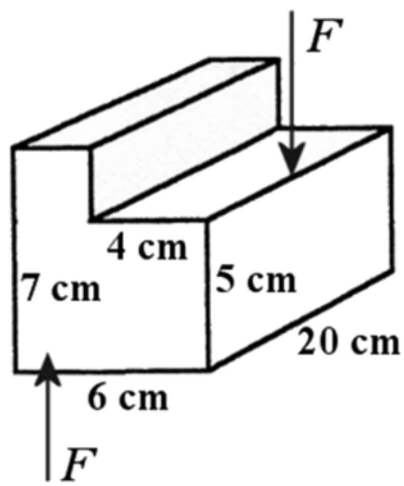
11. Une longue tige d'acier (acier inoxydable 304) d'une longueur de 4 m et ayant un diamètre de 2 cm est fixée au plafond. À l'autre bout de la tige, on a fixé une sphère de 32,67 kg.



a) Calculez la force de gravitation qui s'exerce sur la sphère.
b) Calculez la contrainte s'exerçant sur la tige.
c) Calculez la déformation unitaire de la tige.
d) Calculez l'élongation de la tige.

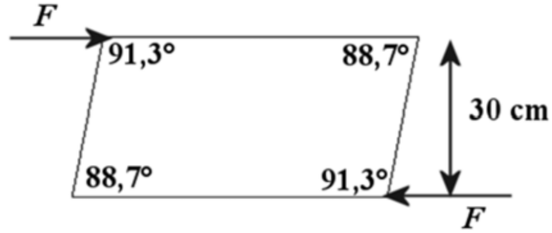
10.6 Le cisaillement

12. Calculez la contrainte de cisaillement dans le bloc de la figure si *F* est de 2000 N. Si le bloc est en plexiglas, va-t-il casser ?



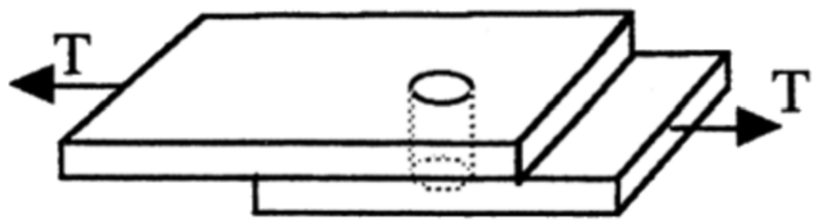
13. Une pièce rectangulaire soumise à un effort de cisaillement se déforme en parallélogramme dont deux angles mesurent 88,7° et les deux autres 91,3°. Sachant que sa hauteur est de 30 cm…

a) calculer la déformation unitaire de cet objet.
b) le déplacement latéral entre le dessus et le dessous de cet objet.



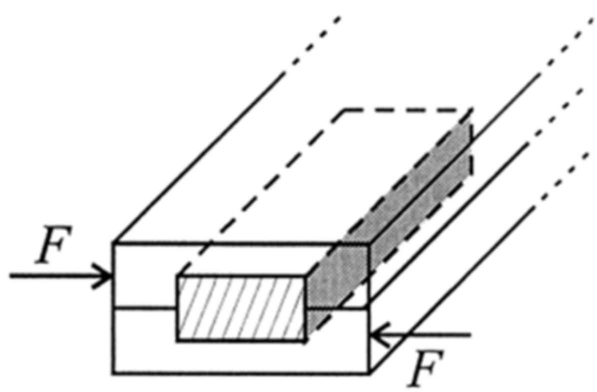
14. Les plaques de la figure ont 1,6 cm d'épaisseur, 8 cm de large et 1 m de long. La force T vaut 15 000 N. Un boulon en acier AISI 1045 de 2 cm de diamètre et de 3,2 cm de long retient ensemble les 2 plaques.

a) Calculer la contrainte de cisaillement sur le boulon.
b) Quelle sera la déformation unitaire de cisaillement du boulon ?
c) De combien se déplacent les deux plaques soumises au cisaillement l'une par rapport à l'autre ?
d) Quelle est la force T maximale que le boulon peut supporter ?

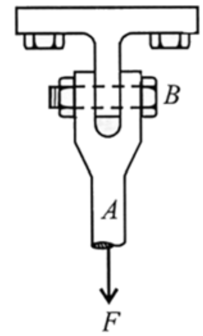


15. Une clavette (en aluminium 6061-T6) retient deux pièces soumises à une force de cisaillement de F = 80 000 N. La clavette a une épaisseur de 16 mm, une largeur de 25 mm et une longueur de 150 mm.

a) Quelle est la contrainte de cisaillement sur la clavette ?
b) Quelle est la déformation unitaire de cisaillement de la clavette ?
c) De combien se déplacent les deux pièces soumises au cisaillement l'une par rapport à l'autre ?
d) Quelle est la force ultime que peuvent subir les deux pièces avant que la clavette ne casse ?

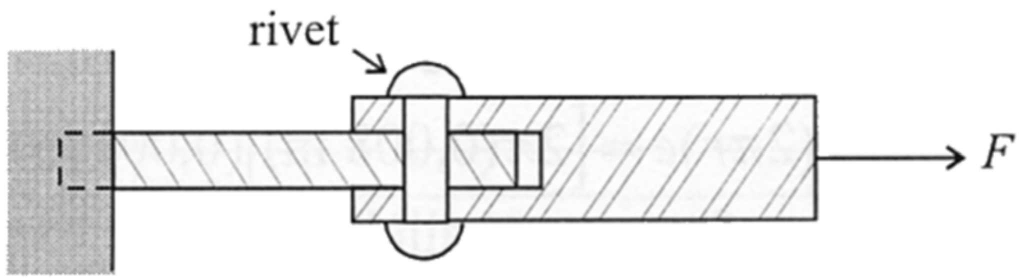


16. Une tige supportant une force de tension F est reliée à deux barres par un boulon en cuivre de 1 cm de diamètre. Quelle est la force F maximale que l'on peut appliquer sur la tige avant que le boulon ne casse ?

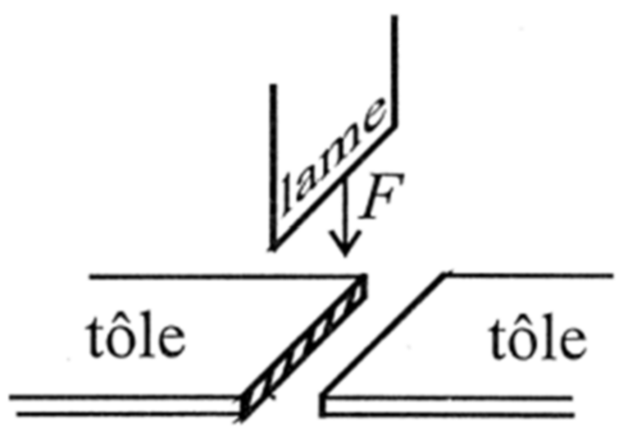


17. Une barre est encastrée dans une paroi. Cette barre est rivetée à une barre rainurée. Le rivet a un diamètre de 0,5 cm.

a) Quelle est la force F maximale qui peut être appliquée sans que le rivet casse si ce dernier est en acier AISI 1095 ?
b) Quelle est la force F maximale qui peut être appliquée sans que le rivet casse si ce dernier est en plastique ABS ?



18. Sur la figure suivante, la force F exercée par la lame ne doit pas dépasser 10 533 livres. Quelle est l'épaisseur maximale d'une tôle d'aluminium 3003-H14 de 6 pouces de largeur que l'on peut découper à l'aide de cette lame ?



RÉPONSES

10.1 La contrainte

1. 9 MPa
2. 112,2 MPa

10.2 La contrainte ultime

3. 19 222 N

10.4 La déformation unitaire

4. $4,76 \times 10^{-4}$
5. 10 mm

10.5 Le lien entre la contrainte et la déformation unitaire

6. a) 190 MPa b) 240 MPa c) 14,6 GPa
7. a) 159 MPa b) $7,68 \times 10^{-4}$ c) 1,922 cm d) oui
8. a) 3,72 mm b) 3,51 mm
9. a) 17,19 MPa b) $8,305 \times 10^{-5}$ c) 2,03 mm d) 176 999 N e) 18 personnes
10. a) 14,7 N b) 0,0192 m² c) 32 640 N d) 2 220 e) 88,8 m
11. a) 320,2 N b) 1,019 MPa c) $5,364 \times 10^{-6}$ d) 0,0214 mm

10.6 Le cisaillement

12. 2×10^{5} Pa, non
13. a) 0,0227 b) 0,68 cm
14. a) 47,7 MPa b) $6,04 \times 10^{-4}$ c) $1,93 \times 10^{-5}$ m d) 151 739 N
15. a) 21,3 MPa b) $8,2 \times 10^{-4}$ c) 0,0131 mm d) 776 250 N
16. 40 055 N
17. a) 28 431 N b) 2710 N
18. 3,17 mm