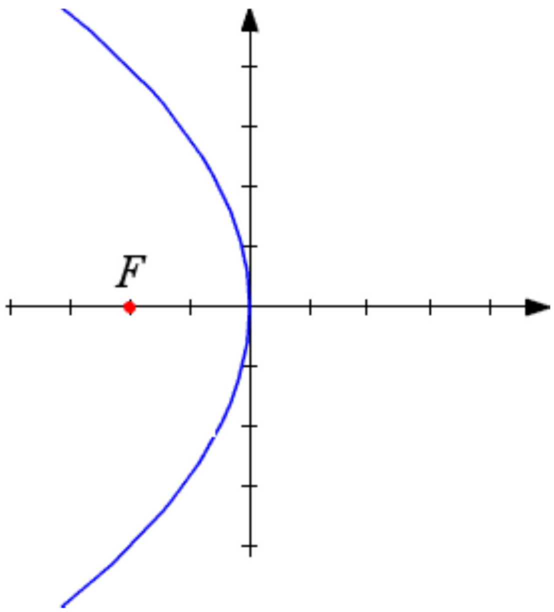
Formule de la parabole en coordonnées cartésiennes à partir de la formule en coordonnées polaires

En coordonnées cartésiennes, l'équation d'une parabole est

$$x = -\frac{y^2}{4a}$$

où a est la distance focale. Le x et le y sont inversées et il y a un signe négatif, car notre parabole doit avoir cette orientation.



www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/topics/focus-of-a-parabola

Toutefois, notre formule en coordonnées polaires est centrée sur le foyer. Il faut donc déplacer notre parabole de a vers la gauche. Cela veut dire que l'équation de la parabole en cartésien est

$$x - a = -\frac{y^2}{4a}$$

Voyons maintenant si on peut arriver à cette équation à partir de notre équation en coordonnées polaires. L'équation est

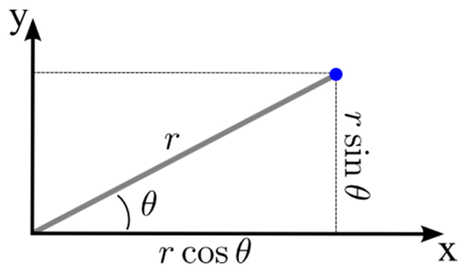
$$r = r_p \frac{1+e}{1+e\cos\theta}$$

Ici, on doit avoir $e = 1$ et $r_p = a$. L'équation est donc

$$r = a\frac{2}{1+\cos\theta}$$

Pour passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes, on a besoin des transformations suivantes.

$$r\cos\theta = x$$
$$r^2 = x^2 + y^2$$



mathinsight.org/image/polar_coordinates_cartesian

On a alors

$$\begin{gathered}
r = a\frac{2}{1+\cos\theta} \\
r\left(1+\cos\theta\right) = 2a \\
r + r\cos\theta = 2a \\
\sqrt{x^2+y^2} + x = 2a \\
\sqrt{x^2+y^2} = 2a - x \\
x^2 + y^2 = \left(2a - x\right)^2 \\
x^2 + y^2 = 4a^2 - 4ax + x^2 \\
y^2 = 4a^2 - 4ax \\
\frac{y^2}{4a} = a - x \\
x - a = -\frac{y^2}{4a}
\end{gathered}$$

On obtient exactement la forme cartésienne, ce qui montre que les deux formules de la parabole sont équivalentes.