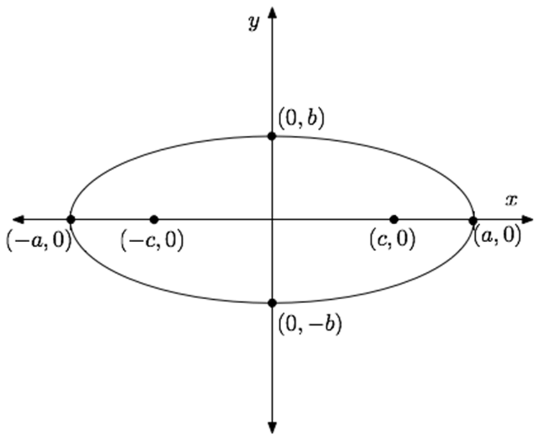
Formule de l'ellipse en coordonnées cartésiennes à partir de la formule en coordonnées polaires

En coordonnées cartésiennes, l'équation d'une ellipse est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Toutefois, l'origine des coordonnées de cette ellipse est au centre de l'ellipse.



www.math.toronto.edu/preparing-for-calculus/6_graphing/we_2_ellipses.html

Toutefois, notre formule en coordonnées polaires est centrée sur le foyer. Il faut donc déplacer notre ellipse de c vers la gauche. Cela veut dire que l'équation de l'ellipse en cartésien est

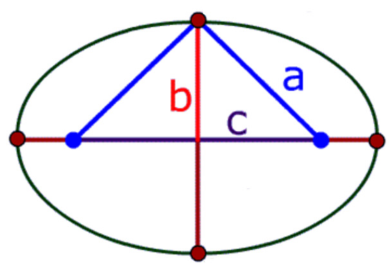
$$\frac{(x+c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Puisque $c = ae$, la forme cartésienne est

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

De plus, comme

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2-c^2 \\ &= a^2-a^2e^2 \\ &= a^2\left(1-e^2\right) \end{aligned}$$



www.mathwarehouse.com/ellipse/focus-of-ellipse.php

L'équation en coordonnées cartésiennes devient donc

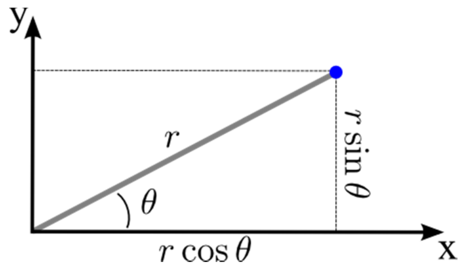
$$\frac{(x+ae)^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$$

Voyons maintenant si on peut arriver à cette équation à partir de notre équation en coordonnées polaires. L'équation est

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

Pour passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes, on a besoin des transformations suivantes.

$$r\cos\theta = x$$
$$r^2 = x^2+y^2$$



mathinsight.org/image/polar_coordinates_cartesian

On a alors

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$
$$r(1+e\cos\theta)=a(1-e^2)$$
$$r+er\cos\theta=a(1-e^2)$$
$$r+ex=a(1-e^2)$$
$$r=a(1-e^2)-ex$$
$$r^2=\left(a(1-e^2)-ex\right)^2$$
$$x^2+y^2=\left(a(1-e^2)-ex\right)^2$$

Il ne reste qu'à faire quelques manipulations algébriques.

$$x^2 + y^2 = \left(a\left(1-e^2\right)-ex\right)^2$$

$$x^2 + y^2 = a^2\left(1-e^2\right)^2 - 2a\left(1-e^2\right)ex + e^2x^2$$

$$x^2 - e^2x^2 + 2a\left(1-e^2\right)ex + y^2 = a^2\left(1-e^2\right)^2$$

$$x^2\left(1-e^2\right) + 2a\left(1-e^2\right)ex + y^2 = a^2\left(1-e^2\right)^2$$

$$x^2 + 2aex + \frac{y^2}{1-e^2} = a^2\left(1-e^2\right)$$

Voici le petit tour de passe-passe : on ajoute a^2e^2 de chaque côté pour compléter le carré à gauche de l'équation.

$$x^2 + 2aex + a^2e^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = a^2\left(1-e^2\right) + a^2e^2$$

$$\left(x+ae\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = a^2 - a^2e^2 + a^2e^2$$

$$\left(x+ae\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = a^2$$

$$\frac{\left(x+ae\right)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2\left(1-e^2\right)} = 1$$

On obtient exactement la forme cartésienne, ce qui montre que les deux formules de l'ellipse sont équivalentes.